

岩石塑性应变梯度与 II 类岩石变形行为研究

The study of plastic strain gradient and class II behavior of rock

潘一山

(辽宁工程技术大学工程力学所, 123000)

徐秉业

(清华大学工程力学系, 100084)

王明洋

(工程兵工程学院, 210007)

文 摘 提出了岩石塑性变形的应变梯度理论, 并采用该理论解释了岩石力学界长期争论的关于 II 类岩石变形行为是否存在的问题。文中证明 II 类岩石变形行为是有条件存在的, 只要岩石试件的长度 L , 弹性模量 E , 峰值后降模量 λ 及岩石内部长度 l 满足 $1 - 2\pi(1 + \frac{E}{\lambda}) \frac{l}{L} > 0$, 就会出现 II 类变形行为, 并分析了 II 类岩石变形行为发生的影响因素。

关键词 岩石, 塑性应变梯度, II 类变形曲线

中图法分类号 TU 452

作者简介 潘一山, 男, 34 岁, 清华大学博士, 现任辽宁工程技术大学力学系主任, 主要从事岩石力学研究工作。

Pan Yishan

(Liaoning Technical University, 123000)

Xu Bingye

(Tsinghua University, 100084)

Wang Mingyang

(Nanjing Engineering College, 210007)

Abstract In this paper the theory of plastic strain gradient has been put forward and thereby the problem is discussed on whether the deformational behaviour of the rock of class II is exist. It has been proved that the existence of the deformational behaviour for the rock of class II is conditional, that is, when $1 - 2\pi \frac{E}{\lambda} \frac{l}{L} > 0$ the behaviour manifests itself. The influence of the height of rock specimen, the descending modulus λ of rock and the internal length l on the class II behavior has been discussed.

Key words rock, plastic stain gradient, class II behavior

1 引 言 *

II 类岩石变形行为是 Wawersik 和 Fairhurst 于 1970 年首次提出^[1], 他们在刚性试验机上对大理石、花岗岩、盐岩和板岩等作了大量的单轴压缩试验后, 发现岩石全程应力应变曲线可分成两类。如图 1 所示, 第 I 类(称 Class I)岩石超过峰值强度后, 其变形过程是稳定的, 可控制的, 欲使试件承载能力进一步降低, 必须施加外力做功。第 II 类变形行为(称 Class II)在超过峰值强度后, 即使在理想的刚性试验机上, 变形破坏也无法控制, 此时岩石的破坏变形是不稳定的或是自持续的, 如图 1 所示。

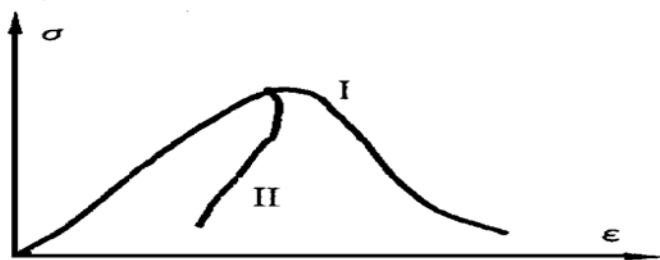


图 1 岩石两类变形行为

Fig. 1 The two kinds of deformation behavior of rock

岩石 II 类变形行为有悖于常识, 因此它一直是岩石力学界长期争论的一个问题。Hudson et al(1972) 建议岩石试件中的非均匀破坏或许是引起岩石 II 类变形

行为的可能原因^[2], 即试件的一部分区域被加载和破坏, 而试件的其余部分仍然是完好的, 而且是弹性加载和卸载。Hudson 只是从现象进行简单解释, 但试件中为什么产生非均匀破坏却不清楚。C. He et al(1990)^[3] 提出弹簧模型证明了 II 类岩石行为的存在, 认为破坏局部化是引起 II 类岩石行为的原因。弹簧模型形象、简单, 但不能反映破坏局部化区域大小对 II 类岩石行为的影响。王明洋等(1997)^[4] 提出直杆模型, 直杆模型解释了局部变形破坏区尺寸对 II 类岩石行为的影响, 但对于软化区和弹性区的尺寸只是人为假设大小, 因而缺乏物理根据。本文根据岩石破坏的非均匀和变形的非局部作用现象, 建立了岩石塑性应变梯度理论, 并解析地得到了发生 II 类岩石变形行为的表达式, 进而分析了影响 II 类岩石变形行为的因素。

2 岩石非均匀塑性变形及非局部作用的应变梯度理论

岩石进入塑性变形破坏阶段时, 会产生强烈的非均匀变形。一个宏观均匀的岩石试件, 受到均匀的压缩载荷作用, 在峰值强度前, 岩石试件各处的变形场基本上均匀的, 而在接近和超过峰值强度后, 变形会强烈集

* 到稿日期: 1998

中到一个区域或条带上,称为变形局部化,变成非均匀的变形场,这是传统的宏观连续介质理论无法预测的。

传统的宏观连续介质力学存在的主要问题是,它是局部的理论,即在一个物质点上的应力被认为仅和该点过去的变形历史有关。而事实上,材料中一个物质点的状态受到周围点发生变形显著影响,尤其对于岩石类材料,影响其力学性质的主要因素是颗粒直径分布及裂隙的发育情况等,所以产生塑性变形是非局部的。为了对岩石塑性变形的非均匀和非局部作用进行描述,引入应变梯度,即岩石破坏不仅是该点变形历史的函数,而且和非局部的应变梯度有关。

Fleck 等人(1994)^[5]为了验证应变梯度对材料破坏的影响进行了著名的拉伸和扭转试验。拉伸试验结果表明,铜丝的直径大小并不影响试验结果。事实上,尽管铜丝尺寸变化,但并没有应变梯度的变化。而扭转试验结果中,随着直径减小即应变梯度的增加,扭转硬化随着应变梯度的增加而增加,由此可以得出结论,材料的本构关系不仅和应变有关,而且和应变梯度有关,即

$$\sigma = f(\epsilon, l \frac{d\epsilon}{dx}) \quad (1)$$

式中 第二项是应变梯度,为了统一量纲,必须引入一个长度的参数 l , 式中 l 为材料内部长度参数。 l 的大小反映了材料非局部作用的尺度。对于粒状岩石, l 的大小和粒径尺寸相当,对于裂隙体岩石,和裂隙尺寸相当。

分析上面式中的第二项我们发现,实际上, $l \frac{d\epsilon}{dx} \approx l \frac{\epsilon}{L}$, 式中 L 为所分析问题的与变形相关的特征长度尺度。对于通常的岩石变形问题,特征尺度较大, $L \gg l$, 则, $l \frac{d\epsilon}{dx} \approx l \frac{\epsilon}{L} \approx 0$, 所以此时忽略梯度效应的传统理论是足够的。

当研究岩石的破坏变形,岩石产生变形局部化时,变形局部化的尺度成为关键尺度。试验表明,岩石变形局部化区域的宽度 L 为毫米级,因而此时有 $L \approx l$, 则 $l \frac{d\epsilon}{dx} \approx l \frac{\epsilon}{L} \approx \epsilon$, 即此时应变梯度和应变是同量级的,所以在研究岩石破坏的局部化变形时,必须考虑应变梯度的影响。Aifantis 等^[6]采用屈服函数的应变梯度依赖研究了岩石变形局部化问题,本文采用屈服函数的梯度依赖,研究单轴压缩过程的变形局部化,进而研究岩石 II 类变形行为产生的原因和条件。

3 岩石单轴压缩应力变形解析分析

如图 2 所示,长度为 L 的岩石试件,宏观上是均质的,受到均匀的压缩应力 σ 作用,简化为一维问题,取图 2 所示坐标系,坐标原点处于试件中心。

在弹性阶段,岩石的本构关系为

$$\sigma = E\epsilon \quad (2)$$

式中 E 为弹性模量。达到峰值强度 σ_c 后,岩石进入应变软化的塑性变形,考虑岩石的应变梯度,根据各向同性假设,只能是偶次阶应变梯度^[7],取简单的二阶梯度,屈服函数为

$$f = \sigma - \bar{\sigma}(\epsilon, \frac{d^2\epsilon}{dy^2}) = 0 \quad (3)$$

式中 $\bar{\sigma}$ 为流动应力; ϵ 为塑性应变。假设岩石超过峰值强度后按线性规律软化,斜率的绝对值为 λ , 称为降模量,如图 3 所示。

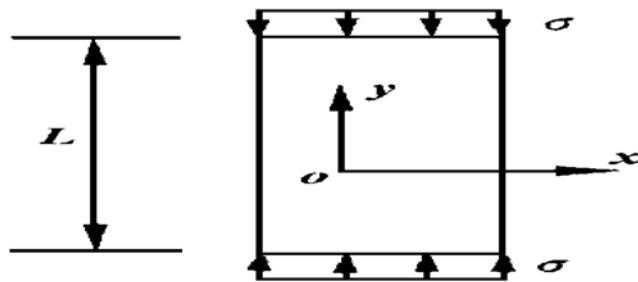


图 2 受单轴压缩的岩石试件

Fig. 2 The uniaxially compressed rock specimen

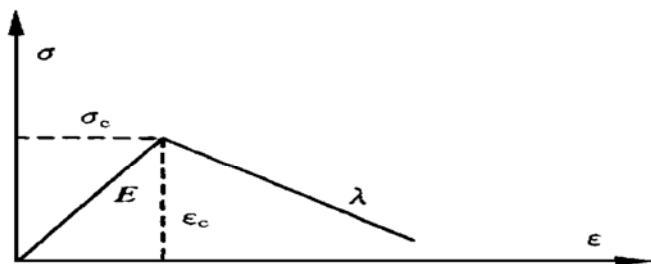


图 3 岩石应力应变关系

Fig. 3 The stress-strain relationship of rock

假设流动应力与二阶应变梯度成线性, 则

$$\bar{\sigma} = \sigma_c - \frac{E\lambda}{E + \lambda} \epsilon - c \frac{d^2\epsilon}{dy^2} \quad (4)$$

式中第三项为应变梯度项, c 为常数。对上述方程求解得

$$\epsilon = A \cos \frac{y}{l} + (\bar{\sigma} - \sigma_c) \frac{E + \lambda}{E\lambda} \quad (5)$$

式中 A 为积分常数; l 为内部长度,

$$l = \sqrt{\frac{c}{E\lambda}(E + \lambda)} \quad (6)$$

由式(5)得塑性应变率

$$\dot{\epsilon} = A \cos \frac{y}{l} + \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{E\lambda}(E + \lambda) \quad (7)$$

由屈服函数方程(3)微分得出的一致性条件 $\dot{\sigma} - \dot{\bar{\sigma}} = 0$ 代入(7)式得,

$$\dot{\epsilon} = A \cos \frac{y}{l} + \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{E\lambda}(E + \lambda) \quad (8)$$

如图 4 所示, 假设超过峰值强度后, 岩石变形局部化, 局部化的塑性软化区宽度为 w , 则在岩石试件 $y = \pm \frac{w}{2}$ 为弹塑性交界处, 有边界条件 $\dot{\varepsilon} = 0$, 将其代入(8)式得塑性应变率

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\dot{\sigma}}{E\lambda}(E + \lambda)\left[1 - \frac{\cos(y/L)}{\cos(w/2l)}\right] \quad (9)$$

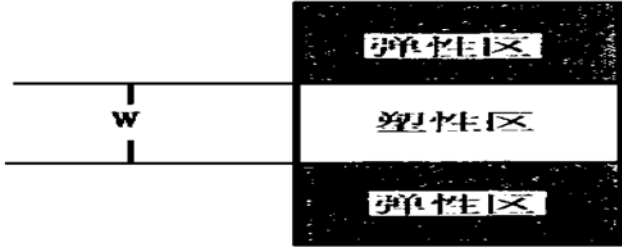


图 4 变形局部化区域及尺寸

Fig. 4 The deformational localization zone and size

所以岩石局部化的塑性软化区内总应变率

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{\dot{\sigma}}{E\lambda}(E + \lambda)\left[1 - \frac{\cos(y/L)}{\cos(w/2l)}\right] \quad (10)$$

局部化变形的塑性软化区之外为弹性区, 而弹性区的应变率为 $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}$, 根据几何方程, 可求出岩石试件端部的位移速度

$$\dot{u}(L/2) = \frac{L\dot{\sigma}}{2E} - \frac{\dot{\sigma}}{E\lambda}\left[\frac{w}{2} - l \tan(w/2l)\right](E + \lambda) \quad (11)$$

试件中实际能取得的状态, 即实际能存在的局部化软化塑性区宽度, 应为位移速率绝对值取得最大值的状态, 由此得

$$\frac{d(\dot{u}(L/2))}{d(w/2)} = 0 \quad (12)$$

将(11)式代入上式得

$$\cos(w/2l) = \pm 1 \quad (13)$$

满足上述方程的最小非零解为

$$w = 2\pi l \quad (14)$$

上式给出了岩石试件局部化变形的塑性软化区宽度, 它由参数 λ 和 l 完全确定, 也是一个不独立的岩石材料常数。如图 4 所示, 在均匀压应力作用下, 超过峰值强度后, 则在岩石试件中部出现了宽度为 w 的局部塑性软化区, 其外部还是弹性变形区, 通过引入二阶塑性梯度理论, 我们解析地导出了局部软化区的宽度。

将(14)式代入(10)式得局部软化区的应变率

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{\dot{\sigma}}{E\lambda}(E + \lambda)[1 + \cos(y/l)] \quad (15)$$

将(14)式代入(11)式, 可得岩石试件两端的位移速率差,

$$\Delta \dot{u} = \dot{u}(L/2) - \dot{u}(-L/2) = \left[\frac{L}{E} - \frac{w}{E\lambda}(E + \lambda)\right]\dot{\sigma} \quad (16)$$

假设岩石内部长度参数 $l = 5 \text{ mm}$, 弹性模量 $E = 2 \times 10^4 \text{ MPa}$, 软化降模量 $\lambda = \frac{1}{9}E = 1.1 \times 10^3 \text{ MPa}$, 峰值抗压强度 $\sigma_c = 20 \text{ MPa}$, 岩石试件高度 $L = 100 \text{ mm}$, 对其施加变形至 $\Delta u = 0.2 \text{ mm}$, 则局部化的软化区宽度 $w = 31.4 \text{ mm}$ 。岩石试件中的应变绘成图 5, 从图中可以看出:

(1) 均匀压应力作用下, 岩石试件各处变形是不同的, 变形局部化带 $w = 2\pi l$ 内产生塑性变形, 变形局部化带外还是均匀的弹性变形。所以岩石单轴压缩试验中观测到的变形局部化现象, 我们通过引入应变梯度, 通过理论分析很好地模拟出来了, 与试验中观测到的现象一致。

(2) 变形强烈集中在局部化带内, 局部化带的中心变形最大, 是外围弹性变形的数倍。

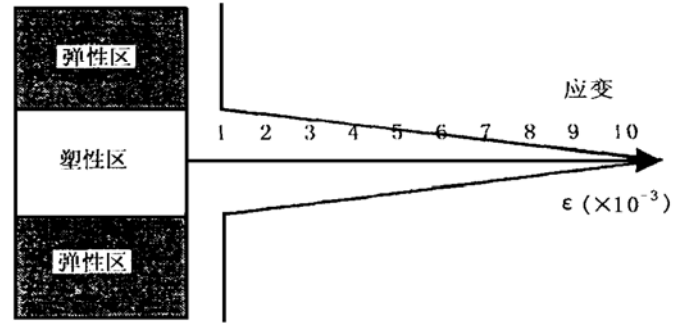


图 5 单轴压缩岩石试件各处的应变

Fig. 5 The strain at various positions in the uniaxially compressed rock specimen

由(16)式得

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma_c} = \frac{1}{\left|1 - 2\pi\left(1 + \frac{E}{\lambda}\right)\frac{L}{l}\right|} \left|\frac{\Delta \dot{u}}{L} / \dot{\varepsilon}_c\right| \quad (17)$$

所以 I 类岩石变形行为发生的条件为

$$1 - 2\pi\left(1 + \frac{E}{\lambda}\right)\frac{L}{l} > 0 \quad (18)$$

但是当岩石的参数满足下面关系时:

$$1 - 2\pi\left(1 + \frac{E}{\lambda}\right)\frac{L}{l} < 0 \quad (19)$$

则在岩石超过峰值强度后, 岩石承载能力下降, 即应力率小于零, 此时由(17)式及(19)式可见 $\Delta \dot{u}$ 与 $\dot{\sigma}$ 同号, 所以端部位移也在下降, 即此时表现为 II 类变形行为。所以(19)式为 II 类岩石变形行为的发生条件。

分析岩石 I, II 类变形行为发生条件(18)式及(19)式可见, 影响岩石变形行为的主要参数为 E , λ , l , L 。下面分析这些参数对岩石行为的影响。

(3) 试件高度变化时对 I, II 类岩石行为的影响

图6绘出了岩石试件高度变化时, I, II类岩石行为的转换。可见当岩石试件高度较短时, 岩石表现为I类曲线, 随着试件尺寸的增加, 岩石行为向II类过渡, 当 $L = 314 \text{ mm}$ 时, 达到临界状态。当 $L = 320 \text{ mm}$ 时, 岩石表现为II类变形行为。所以只有当岩石试件高度较大时, 才易出现II类岩石变形行为。

(4) 降模量变化对I, II类岩石变形行为的影响

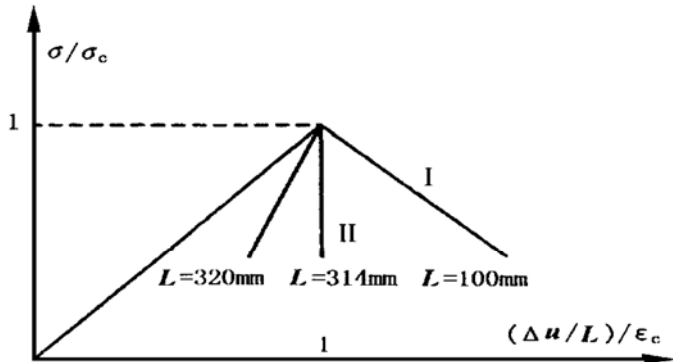


图6 试件高度对I, II类岩石行为影响

Fig. 6 The influence of the specimen height on rock behavior of class I and II

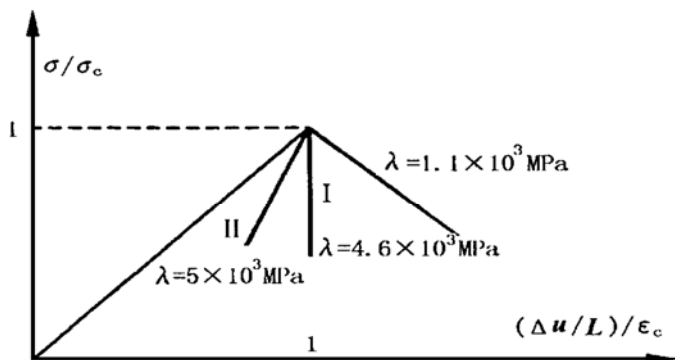


图7 降模量对I, II类岩石行为影响

Fig. 7 The influence of the descending modulus λ on rock behavior of class I and II

由图7可见, 当降模量 λ 较小时, 即岩石延性较强而脆性较弱时, 岩石表现为I类变形行为, 随着 λ 增加, 岩石脆性增强, 向II类行为转换。当 $\lambda = 4.6 \times 10^3 \text{ MPa}$ 时, 达到临界状态。当 $\lambda = 5.0 \times 10^3 \text{ MPa}$ 时, 岩石表现为II类变形行为。所以岩石越脆, 越易产生II类变形行为。

(5) 内部长度对I, II类岩石变形行为的影响

由图8可见, 当岩石内部长度较大时, 岩石表现为I类变形行为, 随着内部长度的减小, 即岩石长程作用的减小, 则岩石向II类变形行为过渡, 当 $l = 1 \text{ mm}$ 时, 成为II类变形行为。所以 l 越小, 即岩石颗粒直径越

小, 裂隙越不发育, 则越易发生II类岩石变形行为。

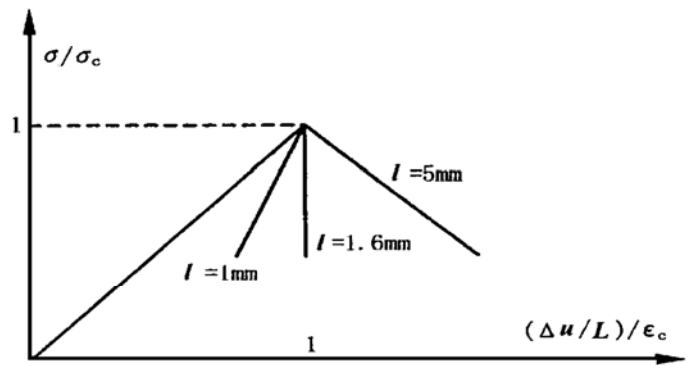


图8 岩石内部长度变化时对I, II类岩石行为的影响

Fig. 8 The influence of the internal length on rock behavior of class I and II

4 结 论

本文采用岩石塑性应变梯度理论, 对岩石力学中长期争论的II类岩石变形行为问题进行了研究, 解析地导出了发生II类岩石行为的条件:

$$1 - 2\pi \left(\frac{E}{\lambda} + 1 \right) \frac{l}{L} > 0$$

指出降模量越小, 即岩石越脆, 试件尺寸越大, 以及内部长度越小, 越容易产生II类岩石行为。

参 考 文 献

- 1 Wawersik W, Fairhurst C. A study of brittle fracture in laboratory compression experiments. *Int J Rock Mech Min Sci*, 1970, 7: 561~ 575
- 2 Hudson J A, Crouch S L. Fairhurst soft stiff and sero- controlled testing mechanics: A review with reference to rock failure. *Engin Geol* 1972, 6: 155~ 189
- 3 C He et al. A study of the class II behavior of rock. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 1990, 23: 261~ 273
- 4 王明洋等. 岩石单轴试验全程应力应变曲线讨论. *岩石力学与工程学报*, 1998, 17(1)
- 5 Fleck N A, Hutchison J W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J Mech Solids*, 1994, 41(12): 1825 ~ 1857
- 6 Aifantis E C. The physics of plastic deformation. *Int J Plasticity* 1987, (3): 211~ 247
- 7 De Borst, et al. Gradient- dependent plasticity: Formation and algorithmic aspects, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 35: 521~ 539