

岩石破坏过程的折迭突变模型^{*}

Flod catastrophe model of damaging process in rock

潘岳

青岛建筑工程学院建筑工程系, 青岛, 266520)

文 摘 将试验机刚度作为有限量, 据能量平衡原理建立的岩石破坏的数学模型可归结为折迭突变模型。该模型包含的参数有能量输入率 J 和系统刚度比 K , 故可恰当地描述岩石破坏时, 可能出现的跳跃性失稳 (脆性破坏) 现象及试验中观察记录到的其他现象, 对系统作稳定性分析, 并可为伺服加载控制原理提供理论依据。

关键词 岩石, 破坏过程, 折迭突变模型

中图法分类号 TU 456

作者简介 潘岳, 男, 1947 年生, 副教授。1970 年毕业于东北大学, 现从事岩土力学和结构稳定方面的研究工作。

Pan Yue

Qingdao Institute of Architecture and Engineering, Qingdao, 266520)

Abstract Taking stiffness of test machine as finite value, the mathematical model of damaging process in rock specimen, which is established by the energy balance principle, can be sorted into the fold catastrophe model. The model, including parameters of energy importing rate J and system stiffness ratio K , can properly describe the jumping instability or brittle damaging phenomenon that may occur and other phenomena that are recorded in the test when rock and reinforced concrete members damage under different loading ways. It can also analyze the stability of the system and provide theoretic basis for the servo-control loading principle.

Key words rock, damage process, fold catastrophe model

1 前 言^{*}

地震、矿业及诸多工程学科均关注岩石在其承载强度之后破坏阶段的力学性质, 迄今已有大量关于岩石结构、岩石在破坏阶段研究的文献发表。岩石试件在试验机上作压缩试验时, 其荷载-位移全过程曲线—— $f(u)$ 曲线如图 1 所示。曲线有上升段, 峰值和弱化段。高强度砼构件在不同受载方式下的破坏, 受拉钢筋颈缩后的拉断, 含裂纹构件裂纹的扩展, …, 它们破坏阶段的荷载-位移关系都与图 1 中 $f(u)$ 曲线弱化段十分类似。实践与试验表明, 这些构件的破坏有着某种共同点, 即在一些情况下构件以延性形式破坏, 在另一些情况下却突然发生脆性破坏。构件会以两种形式破坏, 其根本原因是相同的, 故可通过岩石试件单轴压缩时的破坏为代表, 来对一些材料或构件受荷时呈不同破坏形式问题作表现的数学描述。

Cook (1995) [1] 通过对岩石的压缩试验, 认为在试件承载强度之后的单位位移中, 试验机释放的应变能大于试件所能吸收的能量时, 试件发生脆性破坏, 并得到试件发生脆性破坏的条件是 $f(u)$ 曲线弱化段上某点对应的位移 u 处, 有

$$f'(u) + k_m < 0 \quad (1)$$

其中 $f'(u)$ 为试件 $f(u)$ 曲线在 u 处的斜率, k_m 是试验机刚度, Salaman (1970) [2] 则指出, 要使得试件以延性形式破坏, 必须

$$f'(u) + k_m \geq 0 \quad (2)$$

众所周知, 式 (1), (2) 是正确的, 数 10 年来被国内外学者作为岩石试件在普通试验机上作压缩试验时, 是发生脆性或是延性破坏的判据。但式 (1), (2) 提供的信息量尚不多, 人们并不就此满足。实际上, 对于满足式 (1) 的试件, $f'(u_j) + k_m = 0$ (u_j 是试件发生脆性破坏时的位移值) 只是试件脆性破坏的临界条件。它在试件破坏中的地位, 仅相当于非线性稳定理论中结构形状突变的临界点。那么是否存在包括此临界条件的既可描述试件的脆性破坏, 又可描述试件的延性破坏即其准静态平衡路径的数学模型呢? 文献 [3] 首次用突变理论来讨论岩石破坏并取得初步成功。但由于讨论中没有考虑荷载功的作用, 故所导得的尖点突变模型未能同时对伺服加载控制原理等问题进行描述。本文拟引入荷载功, 从岩石作延性破坏时系统总能量保持平衡的原理出发, 来建立数学模型对岩石破坏过程进行描述。

^{*} 山东省自然科学基金资助项目 (98-A08011)

2 岩石试件破坏的折迭突变模型

2.1 试验机-试件系统的力学模型

在对试件加载的同时,试验机自身也在发生变形,由于试验机始终处于弹性阶段,其荷载-位移关系如图 1 中斜率为 $\tan \alpha$ 的半直线 om 所示。采用伺服控制试验机总可获得试件的荷载-位移关系即图 1 中的 $f(u)$ 曲线,在压力 N 达到试件的承载强度后,试验机和试件组成的共同作用系统的平衡位置处在 $f(u)$ 曲线的弱化段上。在 $f(u)$ 曲线弱化段上,试验机相当于一刚度为 $k_m = \tan \alpha$ 的弹簧。由于使试件产生位移 du (>0) 的力的改变量为 $df(u)$,所以试件的力效应可用刚度 $k_s = df(u)/du = f'(u)$ 的弹簧来表示。在 $f(u)$ 曲线下陷段 $f'(u) < 0$ 。图 2 中弹簧 k_m 上的力 P 为试验机油缸内活塞端面上的油压力, P 为作用在弹簧系统 k_m 和 k_s 上的外力。 $u_p = u_m + u$ 为力 P 的位移。其中, u_m 为试验机的位移。采用准静态紧凑压缩加载方式,油缸进油率为常数,即 $du_p/dt = c_1$, c_1 为一小常数。以下不作特殊说明,均认为作紧凑压缩加载。试件位移 u 缓慢增加时,有关系式

$$f(u) = N = k_m u_m = P \quad (3)$$

式 (3) 是系统位置位于 $f(u)$ 曲线弱化段上且呈准静态变化时,系统参量间的约束条件。

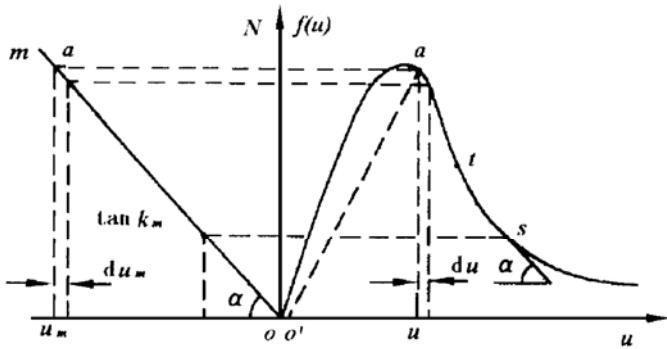


图 1 试验机、试件的荷载-位移曲线

Fig.1 Load-displacement relation of test machine and rock specimen

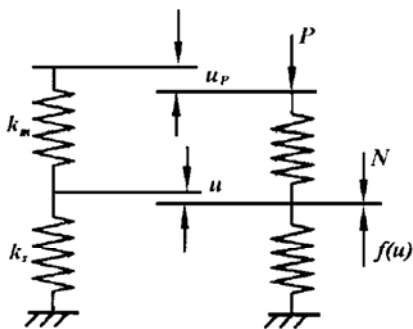


图 2 试验机-试件系统的力学模型 [1]

Fig.2 Mechanic model of system of test machine and rock specimen

2.2 岩石破坏过程的折迭突变模型

图 1 中 Δoau_m 的面积为试验机内所蓄的弹性应

变能。曲边梯形 oau 的面积为试件位移到 u 时已吸收的能量,其中包括使试件内的裂纹产生和扩展已耗散的能量和面积为 $\Delta o'au$ 的弹性能。在承载强度之后试件位移增加 du 时,试验机要释放弹性能 $-Ndu_m$ 。由式 (1) 知,当 $du_m < du$ 时,

$$-Ndu_m < f(u)du$$

即试验机释放的弹性能小于使试件位移 du 所需提供的能量 $f(u)du$ 。故需外力做功补充能量 Pdu_p 才能使试件产生位移。试验中在 $f(u)$ 曲线弱化段的某区段上,系统处于准静态。在这样的区段上

$$f(u)du + Ndu_m - Pdu_p = 0 \quad (4)$$

式 (4) 是以试件位移至 u 时的状态为参考态建立的,试件有微位移 du (>0) 而系统处于准静态时的能量平衡关系。式 (4) 两端除 du , 利用约束条件式 (3), 并考虑到 k_m 为常数, $Ndu_m/du = f(u)f'(u)/k_m$, 可以从式 (4) 导得系统位置作准静态变化时的平衡方程

$$f'(u) + \frac{f(u)f'(u)}{k_m} - J = 0 \quad (5)$$

式中已记

$$P \frac{du_p}{du} = J \quad (6)$$

J 为使构件产生单位位移时外界所需输入的能量,可称为能量输入率或广义地称为能量流通率,为系统的加载参数。从导出式 (5) 可知,当 $J > 0$, 试件作准静态位移; 当 $J = 0$, 则表明无需外力做功, 仅凭系统内部的能量转移, 试件中的位移便可自动加大, 系统处于临界状态。故可用

$$J = 0 \quad (7)$$

来判定系统失去准静态或试件发生脆性破坏的临界条件。若已知 $f(u)$ 的表达式, 即可得到用 u 的显式及参数 k_m, J 表示的系统准静态平衡路径。 $f(u)$ 的表达式有若干种, 本文采用假定材料微元强度分布服从 Weibull 分布 [5], 根据损伤理论, 通过实验确定的 $f(u)$ 的表达式为

$$\sigma = E\epsilon^{-\epsilon/\epsilon_0} \text{ 或 } f(u) = \lambda u \exp(-u/u_0) \quad (8)$$

式中 $\lambda = EA/L$ 为试件的初始刚度, E 是弹模, A 和 L 是试件变形前的横截面面积和长度。 u_0 是试件承载强度所对应的位移值。 $f(u) = \lambda u \cdot \exp(-u/u_0)$ 曲线弱化段上有一个拐点。将其中对应的位移值记为 u_1 。

由 $f''(u) = \frac{\lambda}{u_0} (-2 + \frac{u}{u_0}) \exp(-u/u_0) = 0$ 知, $u_1 = 2u_0$ 。

$f(u)$ 曲线弱化段拐点处的斜率最陡。将式 (5) 中的 $f(u), f(u) \cdot f'(u)$ 在 u_1 处展开, 并利用 $u_1 = 2u_0$ 可得

$$\left. \begin{aligned} f(u_1) &= \lambda u_1 e^{-2}, f'(u_1) = \lambda e^{-2}, f''(u_1) = 0, \dots \\ f \cdot f'_{u_1} &= -\lambda^2 u_1 e^{-4}, f \cdot f'_{u_1}' = \lambda^2 e^{-4}, \dots \\ f \cdot f'_{u_1}'' &= \frac{4}{u_1} \lambda^2 e^{-4}, \dots \end{aligned} \right\}$$

代入式(5), 经整理后可得

$$2\left(\frac{u-u_1}{u_1}\right)^2 + (1-K)\frac{u-u_1}{u_1} - (1-K) - \frac{k_m}{u_1 \lambda^2 e^{-4}} J + O\left(\frac{u-u_1}{u_1}\right)^3 = 0 \quad (9)$$

$$\text{式中} \quad K = \frac{k_m}{\lambda e^{-2}} \quad (10)$$

为试验机刚度与 $f(u)$ 曲线软化段拐点处斜率的负值之比。 K 在 1 附近取值, 为这个共同作用系统的刚度参数。式(9)中 $[(u-u_1)/u_1]^2$ 的系数不为零, 在突变理论中它对应的折迭突变模型的 2 参数平衡方程^[6,7], 故可略去 $\left(\frac{u-u_1}{u_1}\right)^3$ 项及比 $\left(\frac{u-u_1}{u_1}\right)^3$ 更高次的项来讨论系统的稳定性。式(9)可改写为

$$\left(\frac{u-u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4}\right)^2 - \left(\frac{1-K}{4}\right)^2 - \frac{1-K}{2} - \frac{K}{2f(u_1)} \cdot J = 0 \quad (11)$$

作变量代换

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{u-u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4} \\ a &= -\left(\frac{1-K}{4}\right)^2 - \frac{1-K}{2} - \frac{K}{2f(u_1)} \cdot J \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

可将式(8)化为折迭突变平衡方程的正则形式

$$x^2 + a = 0 \quad (13)$$

式中 x 是状态变量, a 是控制变量。 $a > 0$ 时系统空状态。 $a = 0$ 是个分枝点。 $a \leq 0$ 时其形状为一抛物线, 如图 3。式(12)将 $f(u)$ 曲线上 $(u-u_1)/u_1 = (K-1)/4$ 的点映射到图 3 中原点 $x=0, a=0$ 。由约束条件式(8)得

$$J = P \frac{du_P}{du} = P \frac{du_m + du}{du} = P \frac{f'(u) + k_m}{k_m} \quad (14)$$

图 1 中 $f(u)$ 曲线软化段上 u 增大时 $f'(u)$ 从 $f'(u_0) = 0$ 起负向增大。在拐点处达到负向极值 $f'(u_1)$ 。拐点以下 $f'(u)$ 由负极值而向零变化。在 $f(u)$ 曲线软化段的某些区段上 $K \cdot J/2f(u_1)$ 取正值, 故式(11), (12)可写为

$$\begin{aligned} \frac{u-u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4} &= x_1 \\ &= -\sqrt{\left(\frac{1-K}{4}\right)^2 + \frac{1-K}{2} + \frac{K}{2f(u_1)} J} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{u-u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4} &= x_2 \\ &= \sqrt{\left(\frac{1-K}{4}\right)^2 + \frac{1-K}{2} + \frac{K}{2f(u_1)} J} \end{aligned} \quad (16)$$

式(15), (16)是系统准静态平衡路径的两个分枝, 它们分别对应于 $f(u)$ 曲线软化段拐点以上和以下的某区段。实际问题规定, 平衡路径最终是要到达分枝 2 的。由于对于相同的参数值, 系统有两个平衡位置, 当参数 K 和 J 按图 1 中实际趋向变化时, 若平衡位置由分枝 1 经原点过渡到分枝 2, 试件将以延性形式破坏。否则, 平衡位置将发生跳跃, 试件以脆性形式破坏。

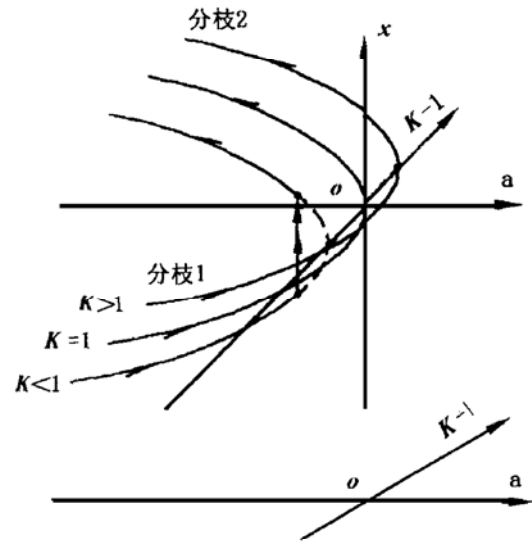


图 3 岩石破坏过程折迭突变的平衡曲面

Fig.3 Fold catastrophe balancing curved surface of damaging process in rock

2.3 折迭突变对试件破坏的描述

K 固定时由式(12), (14), (15)知, 当 $(u-u_1)/u_1 < (K-1)/4$ 且 u 增大时, $f'(u)$ 及 J 减小, 故 a 与 x_1 由负值向零变化, 即平衡位置 (a, x_1) 沿分枝 1 右行; 由式(12), (14), (16)知, 当 $(u-u_1)/u_1 > (K-1)/4$, 且 u 增大 $f'(u)$ 及 J 增大, 故 a 负向增大而 x_2 正向增大, 即平衡位置 (a, x_2) 沿分枝 2 左行。由此看到图 1 和图 3 中参数与状态变量的变化趋向完全一致。下面来看 K 值变化时, $(u-u_1)/u_1$ 趋近和离开 $(K-1)/4$ 时的情形。

$$(1) k_m < -f'(u_1), \text{即 } K < 1$$

平衡位置沿分枝 1 右行, 存在某点 $x_i < 0$ 即 $(u-u_1)/u_1 < (K-1)/4$ 处, 有

$$-f'(u_j) < -f'\left[\left(1 + \frac{K-1}{4}\right)u_1\right] < -f'(u_1)$$

会使得

$$f'(u_j) + k_m = 0 \quad (17)$$

这时式(14)中的

$$du_p/du = 0 \quad (18)$$

或 $J=0$, 即式 (7) 得到满足, 系统处于临界状态。由前文知 $du_p/dt = c_1$ 。 du_p 是微量, 但并不为零。系统平衡位置在不包括原点的分枝 1 上变化时, du_p 与 du 必是同阶量。 $du_p/du = 0$ 或 $du/du_p \rightarrow \infty$ 表明, 在 u_j 处位移 u 将有一个突然改变量而使平衡位置脱离分枝 1, 由于除 $a=0$ 外, 同一 a 值 x 有两个状态。故平衡位置将从分枝 1 上的 x_j 点跳到分枝 2 上的 x_s 点。由式 (17), (15), (16) 知, x 或 $(u-u_1)/u_1$ 的跳跃幅值为

$$2\sqrt{\left(\frac{1-K}{4}\right)^2 + \frac{1-K}{2}} \quad (19)$$

而跳跃时的位移

$$\frac{u_j - u_1}{u_1} = -\left[\frac{1-K}{4} + \sqrt{\left(\frac{1-K}{4}\right)^2 + \frac{1-K}{2}}\right] \quad (20)$$

对于弹性体, 例如扁拱, 伴随跳跃的动能, 将在第 2 个位置处扁拱作阻尼振时耗散。但对内部已充满裂纹的岩石或混凝土试件便不同了, 伴随跳跃的动能将促使尚在受荷的试件内部裂纹高速扩展, 即使试件发生脆性破坏, 这是实际问题所规定的。

$$2) k_m = -f'(u_1), \text{ 即 } K=1$$

这时式 (15), (16) 成为

$$\frac{u - u_1}{u_1} = x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2f(u_1)}} \cdot J \quad (21)$$

$$\frac{u - u_1}{u_1} = x_2 = \sqrt{\frac{1}{2f(u_1)}} \cdot J \quad (22)$$

平衡位置沿分枝 1 右行, J 由正而减小。当 $u = u_1$ 时, 据条件 $k_m = -f'(u_1)$, 由式 (14) 知, 式 (7), (18) 也得到满足。由于这时 $a=0$, $x_1 = x_2 = 0$, 平衡位置是经原点脱离分枝 1, 平稳 (无跳跃) 地过渡到分枝 2。故试件将以延性形式破坏, 如图 3。

$$3) k_m > -f'(u_1), \text{ 即 } K > 1$$

式 (15), (16) 右端根号内 $\frac{1-K}{2}$ 为负值, 平衡位置沿分枝 1 右行, $u = u_1$ 时, 由约束条件式 (3) 得

$$\left. \frac{K}{2f(u_1)} J \right|_{u=u_1} = \frac{K}{2f(u_1)} f(u_1) \frac{f'(u_1) + k_m}{k_m} = \frac{K-1}{2}$$

尽管这时式 (15) 等号两端相等, 但 x_1, a 并不为零。因为 $K > 1$ 时,

$$\left. \frac{dJ}{du} \right|_{u=u_1} = \frac{f'^2 + k_m f' + f \cdot f''}{k_m} \Big|_{u=u_1} = \frac{\lambda e^{-2}}{K} - \lambda e^{-2} < 0$$

即 J 在 $u = u_1$ 时仍在下降, 这是因为在拐点之后, 虽然式 (14) 中的 $(f' + k_m)$ 从 $(1-K)/2$ 起增大, 但在拐点附近 J 中 $N = f(u)$ 下降得更快的缘故。将 $u = [1 + (K-1)/4]u_1$ 代入式 (14), 并将 $\exp[-(K-1)/2]$ 展开和

略去 $(K-1)^2$ 以上的项可得

$$\frac{K}{2f(u_1)} J = -\left(\frac{1-K}{4}\right)^2 - \frac{1-K}{2} \quad (23)$$

这使得式 (15), (16) 等号两端的 x 和 a 均为零, 平衡路径分枝 1, 2 在原点相连如图 3。试件以延性形式破坏。

$$4) k_m < -f'(u_1), \text{ 即 } K < 1$$

这时, 在普通试验机上加加载, 试件将发生脆性破坏。若欲使试件以等位移速率 $du/dt = c_2$ 破坏, 理论上可采用下述加载方式。加载速率 du_p/dt 是一个与试验机油缸进油率有关的可控量。由式 (14), $du_p/dt = [f' + k_m]/k_m du/dt$ 。现令

$$\lim_{u \rightarrow u_j} \frac{du_p}{dt} = \lim_{u \rightarrow u_j} \frac{f'(u) + k_m}{k_m} \cdot c_2 \quad (24)$$

当 $(f' + k_m)c_2/k_m \rightarrow 0$ 时, 控制油率使 du_p/dt 与式 (24) 右端以同样的速率趋于零, 即油缸停止进油。在 $(u_j - u_1)/u_1 < (u - u_1)/u_1 \leq (K-1)/4$ 阶段, 即 $(f' + k_m)c_2/k_m < 0$ 时, 油缸以同样的速率向外排油等等。即可保证试件以等位移速率破坏。从而在 $u = \left(1 + \frac{K-1}{4}\right)u_1$ 时, 式 (23) 也成立, 使式 (15), (16) 中的 x 和 a 均为零。分枝 1 和分枝 2 在原点相连, 试件以延性形式破坏。为研究岩石、砼及钢筋砼构件在承载强度后的弱化段的本构关系, 近年来所生产的电液伺服控制试验机已具备上述加载功能。

2.4 平衡路径及临界点的稳定形式

式 (11) 对 u 求导数可得

$$\frac{dJ}{du} = \frac{4f(u_1)}{u_1 K} \left(\frac{u - u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4} \right) \quad (25)$$

由 $dJ/du = 0$ 可确定平衡路径的分枝点 [Koiter^[8,9] 就是用 $d\lambda/d\delta = 0$ 来确定平衡路径分枝点的, 其中 λ 是加载参数, δ 是位移参数)

$$\frac{u - u_1}{u_1} = \frac{K-1}{4} \quad (26)$$

由式 (15) 知, 在分枝 1 上 $dJ/du < 0$, 这表明使试件增加单位位移的加载参数值或外界对系统的能量输入率 J 在连续减小, 所以平衡路径 1 是不稳定的。

由式 (16) 知, 在分枝 2 上 $dJ/du > 0$, 因为在分枝 2 上, 虽然式 (14) 中作用在试件上的力 $P(u_p)$ 在减小, 但因 $f'(u)$ 增大很快, 从而使试件产生单位位移的能量输入率 J 要不断加大, 所以平衡路径 2 是稳定的。

$K < 1$ 时, 跳跃点 $x = x_j$ 或 $u = u_j$ 在分枝 1 上。故在此跳跃分枝点上, 系统状态自然是不稳定的。 $K \geq 1$ 时, 在分枝点 $(u - u_1)/u_1 = (K-1)/4$ 上, $dJ/du = 0$ 但

$$\frac{d^2 J}{du^2} = \frac{4f(u_1)}{u_1^2 K} > 0 \quad (27)$$

故系统状态是稳定的。

3 讨论与结论

①从2.3节的①~④)的讨论中看到,折迭突变式①)和图3可以正确地描述参数 J 和 K 变化时的试验机试件共同作用系统所可能具有的4种力学行为,并以 $[(u - u_1)/u_1]^2$ 的精度,给出系统参量间的一些关系式,如 $K < 1$ 时跳跃分枝点的位移值式②0)及平衡位置的跳跃幅值式④9)。从式中看到 K 越小, u_j 离峰值位移 u_0 越近,跳跃时的幅值就越大。这恰当地描述了岩石越坚硬和强度等级越高的钢筋混凝土小偏压柱(其 $f(u)$ 曲线弱化段越陡)脆性破坏越剧烈的现象^[10]。式④4)表明, $K < 1$ 时,分枝点位于 $f(u)$ 曲线拐点上方,这会对关心坚脆性岩石和高强度混凝土弱化段本构关系的学者有启发作用。

②文中据能量平衡关系求得加载参数是能量输入率 $J = P \cdot du_p/du$, J 不完全是力,但与力有相同的量纲。本文在2.4节中用 $dJ/du = 0$ 确定平衡路径的分枝点 $(u - u_1)/u_1 = (K - 1)/4$,并用 $dJ/du > 0$, $dJ/du < 0$ 符合物理意义地判定了平衡路径的稳定性。

由于加载参数 J 可以是能量流通率。故折迭突变式①)可以同时描述 $K = k_m/[f'(u_1)] < 1$ 的坚脆性试件以延性形式破坏的过程(这时已是系统对外界做功),为伺服加载控制原理提供理论依据。

③ $f'(u)$ 在拐点达到其负极大值。在拐点上、下 $f'(u)$ 有着某种对称性,故式⑤)或④2)才可能将 $f(u)$ 曲线弱化取映成图3中关于 a 轴或 J 对称的抛物线。作为弹性体的扁三铰拱或扁曲线拱,在荷载达到临界值时,拱垂直下跃。这要求荷载保持不变,并且是与拱有同样速度下跃的随从力,实际中这是做不到的,本文2.3节①)中描述的跳跃点 x_j 或 x_s 或 u_j 和 u_s 处,由于 $f'(u_j) + k_m = f'(u_s) + k_m$,即 $J(u_j) = J(u_s) = 0$ (28)

从而保证了在相同的参数值 $a = \{[(1 - K)/4]^2 + (1 - K)/2\}^{-2}$ 时,平衡位置从 x_j 跳到 x_s 。而此时 $J(u_j)$ 和 $J(u_s)$ 中的力

$$N(u_j) = P(u_j) > P(u_s) = N(u_s) \quad (29)$$

这是与实际相符合的结果。图4^[5]是用光电位移传感器测得的岩石脆性破坏时的荷载-位移关系。程序编制使得在跳跃阶段,微机自动转入快采样。其他阶段,

微机慢采样。试验表明,式②9)是正确的。

④)在一些突变理论的应用文献中,常将伴有跳跃现象的问题归结为实点突变。实际上只要有适当条件,已归结为折迭突变的问题中,其状态变量也可以发生跳跃。自然界和科学实践中有很多事物其某种功能或状态都经历了一个不可逆的发展—鼎盛—弱化有反弯点的衰减过程,类似于图1中的 $f(u)$ 曲线。其衰减过程有渐变、有突变,而折迭突变正是描述这类现象恰当的数学模型。

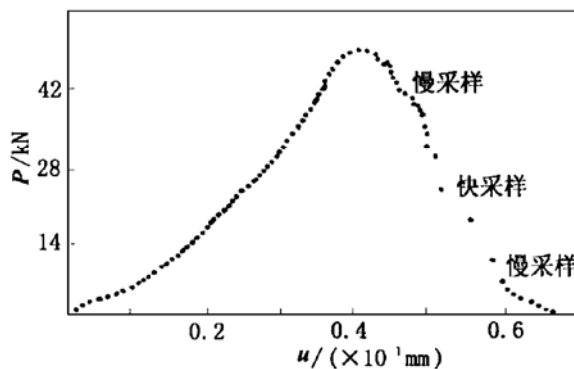


图4 岩石脆坏时的荷载-位移关系

Fig.4 Load-displacement relation of rock in brittle damaging process^[5]

参 考 文 献

- 1 Cook N G W. The failure of rock. Int J Rock Mech, 1965, 2: 389 ~ 403
- 2 Salamon M D G. Stability instability and design of pilla working. Int J Rock Mech, 1970, 7: 613 ~ 631
- 3 唐春安. 岩石破裂过程中的灾变. 北京: 煤炭出版社, 1993. 31 ~ 41, 65 ~ 69
- 4 潘岳. 伺服控制加载原理的能量分析. 岩土工程学报, 1994, 16 (4): 75 ~ 80
- 5 唐春安, 徐小荷. 岩石损伤参量与本构关系的统计理论解及实验确定. 岩石、混凝土断裂与强度. 1988, 8 (1): 80 ~ 86
- 6 Poston T, Stewart I. Catastrophe theory and its application. London: Pitman 1978. 150 ~ 151
- 7 Saunder D H. 灾变理论入门. 凌复华译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1983. 93 ~ 94
- 8 Koiter W T. Elastic stability and postbuckling behaviour, nonlinear problem. Madisom: University of Wisconsin Press, 1963. 257 ~ 275
- 9 吴明德. 弹性杆件稳定理论. 北京: 高等教育出版社, 1988. 136 ~ 140
- 10 袁国干主编. 钢筋混凝土基本结构设计原理. 上海: 同济大学出版社, 1990. 80 ~ 291