

Hencky 第二定律的探讨

The discussion about Hencky's second law

张振营

(青岛建筑工程学院建工系, 青岛, 266033)

中图法分类号 TU 43

作者简介 张振营, 男, 1963 年生, 1984 年 7 月毕业于西安冶金建筑学院建工系, 任职青岛建筑工程学院建工系, 副教授, 现浙江大学岩土工程专业在职研究生, 一直从事土力学、地基与基础的教学与科研工作。

1 前言

所谓滑移线, 即材料破裂面的迹线。掌握应力滑移线 (相应的还有速度滑移线) 的物理与几何性质, 对于构造应力场, 求解极限荷载是至关重要的。滑移线是这样规定的: 以大主应力迹线为基线, 顺时针转 μ 角为 α 线, 逆时针转 μ 角为 β 线^[1] (见图 1)。对 Tresca 材料, 两条滑移线 (α 线和 β 线) 正交, $\mu = 45^\circ$; 对 Coulomb 材料, 两条滑移线 (α 线和 β 线) 的夹角为 2μ , 其中 $\mu = 45^\circ - \varphi/2$, φ 为土体的内摩擦角。应力滑移线有许多性质, Hencky 第二定律便是其中一条。Hencky 认为, 沿 β (α) 滑移线移动, 则 α (β) 滑移线的曲率半径的变化等于沿 β (α) 线滑移的距离^[2]。这对 Tresca 材料来说是正确的, 也即对金属材料是适用的, 而对 Coulomb 材料, 也即对一般地基土体, 既有内聚力 c , 又有内摩擦角 φ , 本文认为, 滑移线的性质应与材料的属性有关。经过反复推导计算, 得出结论: 沿 β (α) 滑移线移动, 则 α (β) 滑移线曲率半径的变化等于沿 β (α) 线滑移的距离与 $\cos \varphi$ 的乘积。

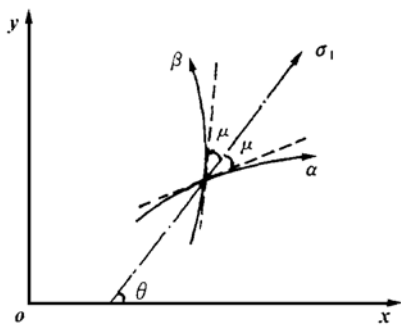


图 1 α, β 线的规定
Fig. 1 Stipulation for α, β slip lines

2 公式推导

两组无限接近、夹角为 2μ ($\mu = 45^\circ - \varphi/2$) 的滑移线 (α, β 线) 如图 2 示。过 A 点作 α 线的切线 AF , 作 AF 的垂线, 截取 $\overline{AO} = R_\alpha$, R_α 为曲率半径。两条 β 线 (α 线) 的转角用 $\Delta\theta_\alpha$ ($\Delta\theta_\beta$) 表示。以 O 点为圆心, R_α

为半径作圆弧 $\widehat{AB}$, 则 $\widehat{AB} = R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha$ 。将 AO 线向右转动与 β 线在 A 点的切线相交于 O' 点, 并使 $\overline{AO'} = R_\alpha$, 过 O' 点转动 $\Delta\theta_\alpha$ 角并作射线 $O'E'$, 以 O' 点为圆心, R_α 为半径作圆弧 $\widehat{A'C}$, 则 $\widehat{AC} = R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha$ 。连接 A', C 两点, 形成一直角三角形 $A'CA$, 由于 $\Delta\theta_\alpha$ 很小, 即 $A' \rightarrow A$, 则 $\overline{AC} \approx \widehat{AC}$, $\overline{AA'} \approx \widehat{AA'} = \Delta S_\alpha$, 在直角三角形 $A'CA$ 中, $\angle A'AC = 90^\circ - 2\mu$, $\angle AA'C = 2\mu$, $\overline{AC} = \overline{AA'} \cdot \sin 2\mu$, 即

$$\begin{aligned} \widehat{AC} &\approx \Delta S_\alpha \cdot \sin 2\mu, \text{ 将 } \widehat{AC} = R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha \text{ 代入上式得} \\ R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha &\approx \Delta S_\alpha \cdot \sin 2\mu \end{aligned} \quad (1)$$

同理 $R_\beta \cdot \Delta\theta_\beta \approx \Delta S_\beta \cdot \sin 2\mu$
又 $2\mu = 90^\circ - \varphi$, 则 $\sin 2\mu = \sin (90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$ 代入式 (1) 得

$$\begin{aligned} R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha &\approx \Delta S_\alpha \cdot \cos \varphi \\ R_\beta \cdot \Delta\theta_\beta &\approx \Delta S_\beta \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

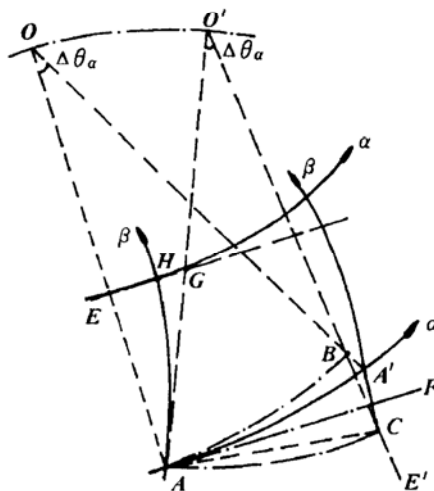


图 2 α, β 线
Fig. 2 α, β slip lines

2.1 推导方法1

对式 2), 沿 β 线求导,

$$\text{左边: } \frac{\partial (R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha)}{\partial S_\beta} = \Delta\theta_\alpha \cdot \frac{\partial R_\alpha}{\partial S_\beta} \quad (3)$$

$$\text{右边: } \frac{\partial (\Delta S_\alpha \cdot \cos \varphi)}{\partial S_\beta} = \frac{\partial (\Delta S_\alpha \cdot \sin 2\mu)}{\partial S_\beta} = \frac{\partial (\widehat{AB})}{\partial S_\beta} = \frac{(R_\alpha - \overline{AE}) \cdot \Delta\theta_\alpha - R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha}{\partial S_\beta} = \frac{-\overline{AE} \cdot \Delta\theta_\alpha}{\partial S_\beta} \quad (4)$$

图2中, 过E点作 α 线的切线交 β 线于G点, 由于 $\Delta\theta_\alpha$ ($\Delta\theta_\beta$) 很小, $\overline{AG} \approx \widehat{AH} = \Delta S_\beta$, 在直角三角形 $\triangle AEG$ 中, $\angle EAG = 90^\circ - 2\mu$, $\overline{AE} = \overline{AG} \cdot \sin 2\mu \approx \Delta S_\beta \cdot \sin 2\mu$, 代入式 4) 中,

$$\frac{-\overline{AE} \cdot \Delta\theta_\alpha}{\partial S_\beta} = \frac{-\Delta S_\beta \cdot \sin 2\mu \cdot \Delta\theta_\alpha}{\partial S_\beta} = -\sin 2\mu \cdot \Delta\theta_\alpha = -\cos \varphi \cdot \Delta\theta_\alpha$$

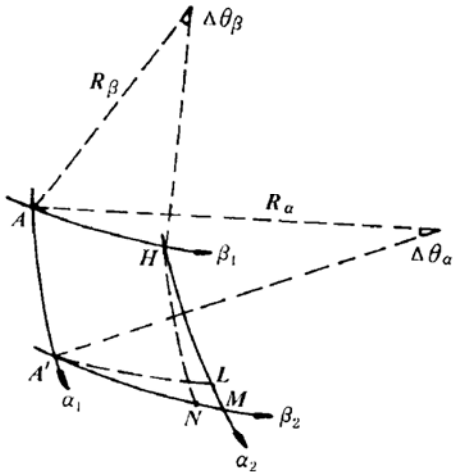
$$\text{即 } \Delta\theta_\alpha \cdot \partial R_\alpha / \partial S_\beta = -\cos \varphi \cdot \Delta\theta_\alpha$$

由 Hencky 第一定律知, 2 条 β (α) 线之间的转角不变, 故从上式中约去 $\Delta\theta_\alpha$ 得

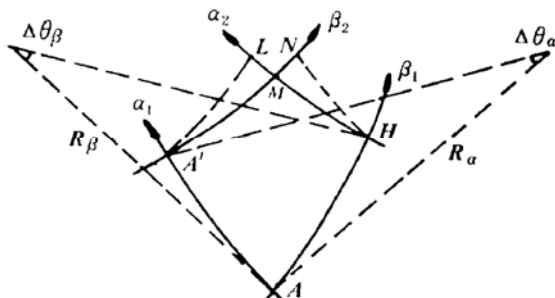
$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial S_\beta} = -\cos \varphi \quad (5)$$

同理 $\frac{\partial R_\beta}{\partial S_\alpha} = -\cos \varphi$

规定, $\theta_\alpha, \theta_\beta, S_\alpha, S_\beta$ 均以 α, β 的正向为正, 如 R_α, R_β 均沿 α, β 方向增大, dR 为正; 若 R_α, R_β 均沿 α, β 方向减小, dR 为负, 见图 3。



(a) 曲率半径增大



(b) 曲率半径减小

图3 公式推导示意图

Fig.3 Steps for derivation of formula

式 5) 可写成

$$\left. \begin{aligned} \partial R_\alpha / \partial S_\beta &= \pm \cos \varphi \\ \partial R_\beta / \partial S_\alpha &= \pm \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由于 R_α, R_β 分别沿 α 线和 β 线变化, 故也可将式 6) 写成

$$\left. \begin{aligned} dR_\alpha &= \pm dS_\beta \cdot \cos \varphi && \text{沿 } \alpha \text{ 线}) \\ dR_\beta &= \pm dS_\alpha \cdot \cos \varphi && \text{沿 } \beta \text{ 线}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2.2 推导方法2

由式 2) 知

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_\alpha &\approx (R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha) / \cos \varphi \\ \Delta S_\beta &\approx (R_\beta \cdot \Delta\theta_\beta) / \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对式 8) 沿 β 线求导,

$$\text{左边: } \partial (\Delta S_\alpha) / \partial S_\beta = (\widehat{HM} - \widehat{AA'}) / \widehat{AH} \quad (9)$$

图 3 (a) 中, 作 $\widehat{A'L} \parallel \widehat{AH}$, $\widehat{HN} \parallel \widehat{AA'}$, 则 $\angle LA'M = \Delta\theta_\alpha$, 将 $\widehat{HM} - \widehat{AA'} = \widehat{LM} = \widehat{AH} \cdot \Delta\theta_\alpha$ 代入式 9) 中,

$$\frac{\partial (\Delta S_\alpha)}{\partial S_\beta} = \frac{\widehat{HM} - \widehat{AA'}}{\widehat{AH}} = \frac{\widehat{AH} \cdot \Delta\theta_\alpha}{\widehat{AH}} = \Delta\theta_\alpha$$

$$\text{右边: } \partial \left(\frac{R_\alpha \cdot \Delta\theta_\alpha}{\cos \varphi} \right) / \partial S_\beta = \left(\frac{\Delta\theta_\alpha}{\cos \varphi} \right) \cdot \left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial S_\beta} \right)$$

$$\text{即 } \Delta\theta_\alpha = (\Delta\theta_\alpha / \cos \varphi) \cdot \partial R_\alpha / \partial S_\beta$$

由 Hencky 第一定律知, 2 条 β (α) 线之间的转角不变, 故从上式中约去 $\Delta\theta_\alpha$ 后可得

$$\frac{\partial R_\alpha}{\partial S_\beta} = \cos \varphi \quad (10)$$

同理 $\frac{\partial R_\beta}{\partial S_\alpha} = \cos \varphi$

由图 3 (a)、(b) 知, 式 10) 也可写成

$$\left. \begin{aligned} \partial R_\alpha / \partial S_\beta &= \pm \cos \varphi \\ \partial R_\beta / \partial S_\alpha &= \pm \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将上述偏微分写成全微分

$$\left. \begin{aligned} dR_\alpha &= \pm dS_\beta \cdot \cos \varphi && \text{沿 } \alpha \text{ 线}) \\ dR_\beta &= \pm dS_\alpha \cdot \cos \varphi && \text{沿 } \beta \text{ 线}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3 结 论

1) 滑移线的性质应该与材料的属性有关, 对 Tresca 材料, Hencky 第二定律是成立的; 对 Coulomb 材料, $\varphi \neq 0$, Hencky 第二定律不成立。

2) 沿 β (α) 滑移线移动, 则 α (β) 滑移线曲率半径的变化应为沿 β (α) 线滑移的距离与 $\cos \varphi$ 的乘积。当 $\varphi = 0$ 时, $\cos \varphi = 1$, 因此, Hencky 第二定律只是一个特例。

参 考 文 献

- 1 张学言编著. 岩土塑性力学. 北京: 人民交通出版社, 1993. 244 ~ 250
- 2 龚晓南编著. 土塑性力学. 杭州: 浙江大学出版社, 1996. 223 ~ 230