

横向受荷桩的通解

General solution for laterally loaded piles

张耀年

(福建省建筑科学研究院, 福州, 350002)

中图法分类号 TU473

作者简介 张耀年, 1951年生, 1984年毕业于西南交通大学, 工学硕士, 高级工程师。1985年至今在福建省建筑科学研究院工作, 从事桩基础和深基坑开挖工程课题研究。

1 引言

地基系数法是当前分析横向受荷桩变形和内力最常用的方法之一, 我国铁路、交通、港口和建设部门都将这方法列入规范作为设计的依据。本文介绍地基系数形式为 $R(Y) = -B_0 k X(Y) Y^n$, 适用于各种边界约束条件的横向受荷桩初值方程的通解。

2 横向受荷桩的初值解

图1表示土中长度为 h 、横截面抗弯刚度为 EI 的桩, 其顶端与地面齐平, 桩顶作用有力矩 M_0 和水平力 Q_0 , 桩侧全高作用有梯形分布荷载 $q(Y)$ 。桩顶产生横向位移 X_0 和转角 φ_0 , 当深度 Y 处桩身产生侧向位移时, 该处桩侧土产生土抗力 $R(Y)$ 。各变量的正负值规定如下: 横向位移 X_0 以沿 OX 轴的正方向为正值, 转角 φ_0 以逆时针方向为正值, 力矩 M_0 以顺时针方向作用于顶面为正值, 横向力 Q_0 以 OX 轴方向为正值, 桩侧梯形分布荷载以 OX 轴方向为正值, 土抗力 $R(Y)$ 以 OX 轴的反方向为正值, 图1所示的各物理量除 φ_0 外, 其余均为正方向。

根据材料力学原理, 桩承受横向荷载的弹性曲线

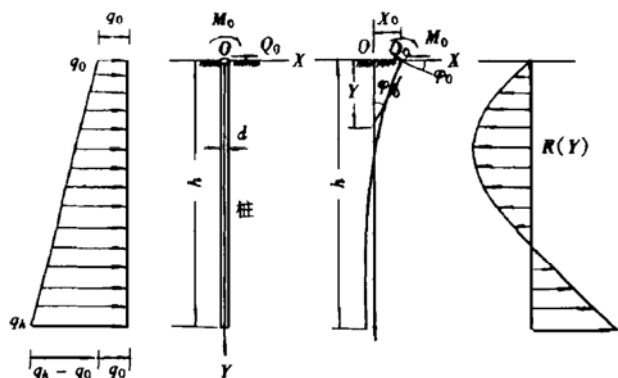


图1 横向受荷桩的计算图式

Fig. 1 Analytic model for laterally loaded pile

微分方程为

$$EI \frac{d^4 X}{dY^4} = q(Y) - R(Y) \quad (1)$$

在上式中, 梯形分布荷载可分为两部分: 均布荷载 q_0 和三角形分布荷载 n_0 。 n_0 为三角分布荷载沿深度变化的斜率, $n_0 = (q_h - q_0)/h$ 。

桩身上土的抗力函数 $R(Y)$ 常采用沿深度 Y 成幂函数并与横向位移 $X(Y)$ 成线性变化来表达, 即

$$R(Y) = -B_0 k X(Y) Y^n$$

式中 B_0 表示桩的计算宽度; k 为土的抗力系数; 负号表示桩侧土抗力的作用方向与横向位移方向相反。

当 $n=0$ 时, 土的抗力系数为常数, 根据这种土抗力假设而作出的侧向受荷桩的解就是著名的张友龄法; 当 $n=1$ 时, 土的抗力系数随深度成线性变化, 根据这种土抗力模型而作出的侧向受荷桩的解就是我国现行规范推荐采用的 m 法; 我国公路交通部门通过一些试桩的实测资料, 反算出 n 值在 $0.5 \sim 0.6$ 之间而建议采用 $n=0.5$, 并将按这种规律变化的计算方法简称为“C”法。

本文中, 侧面受荷桩变形曲线微分方程形式为

$$EI \frac{d^4 X}{dY^4} = q_0 B + n_0 B Y - B_0 k X(Y) Y^n \quad (2)$$

根据桩变形曲线的基本方程以及各物理量之间的微分关系, 横向受荷桩的位移及内力计算可采用初值解的形式来表示, 初值系指桩起始端的4个物理量, 即 $Y=0$ 时的 X_0 , φ_0 , M_0 和 Q_0 。为了便于分析研究, 先将各变量和参数进行无量纲化, 采用 $\omega_1(y)$, $\omega_2(y)$, $\omega_3(y)$ 和 $\omega_4(y)$ 分别表示无量纲化的横向位移、转角、弯矩和剪力。即

$$\begin{aligned} \omega_1(y) &= \alpha X(Y), & \omega_2(y) &= \varphi(Y) \\ \omega_3(y) &= \frac{M(Y)}{\alpha EI}, & \omega_4(y) &= \frac{Q(Y)}{\alpha^2 EI} \end{aligned}$$

式中 $y = \alpha Y$; α 为桩的横向变形系数, $\alpha = (\frac{B_0 k}{EI})^{\frac{1}{n+4}}$.

$\omega_5(0)$ 和 $\omega_6(0)$ 分别表示侧向均布荷载和三角形分布荷载斜率的无量纲值。

$$\omega_5(0) = \frac{q_0 B}{\alpha^3 EI}$$

$$\omega_6(0) = \frac{(q_h - q_0) B}{h \alpha^4 EI} = \frac{n_0 B}{h \alpha^4 EI}$$

式中 h 为桩长; B 为桩的实际宽度。

由文献[1]可知, 侧向受荷桩位移和内力的初值解可表达为

$$\omega_i(y) = \sum_{j=1}^6 \psi_{ij}(y) \omega_j(0) \quad \begin{pmatrix} i = 1 \sim 4 \\ j = 1 \sim 6 \end{pmatrix} \quad (3)$$

式中 $\omega_j(0)$ 表示桩顶面处各变量及外荷载的初值; $\psi_{ij}(y)$ 称为初值方程组的影响函数, 它可以一个总的级数形式表达如下:

$$\psi_{ij}(y) = \frac{y^{j-i}}{\Gamma(j-i+1)} + \frac{1}{\Gamma(j)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times \frac{\Gamma[k(n+4)+j]}{\Gamma[k(n+4)+j-i+1]} \times \prod_{k=1}^j \frac{\Gamma[k(n+4)+j-4]}{\Gamma[k(n+4)+j]} y^{k(n+4)+j-i}$$

$$(i=1 \sim 4, j=1 \sim 6) \quad (4)$$

式(4)中的 Γ 函数具有以下特征:

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(2)=1, \quad \Gamma(0.5)=\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1).$$

当 n 为整数时, $\Gamma(n+1)=n!$ 。

影响函数 $\psi_{ij}(y)$ 与桩端的支承条件无关, 在桩顶 (即 $y=0$ 处), 各影响函数值为

$$\text{当 } i=j \text{ 时, } \psi_{ij}(0)=1$$

$$\text{当 } i \neq j \text{ 时, } \psi_{ij}(0)=0$$

3 桩顶初值的确定

在侧向受荷桩初值方程组中, 荷载项 $\omega_5(0)$ 和 $\omega_6(0)$ 是已知条件, 位移和内力的 4 个初值中有两个可以从桩顶端的支承或受力条件直接得出, 其余两个初值则要从底端的两个边界条件求得。在工程结构中, 桩顶端常见的支承情况包括: 自由支承、铰支承、固定支承和竖向固定支承; 桩底端的支承条件可划分为: 自由支承、铰支承、固定支承、弹性自由支承和弹性铰支承。

顶端在各种支承受力情况下的已知条件为

- ①自由支承, 初值 $\omega_3(0)$ 和 $\omega_4(0)$ 为已知。
- ②铰支承, 初值 $\omega_1(0)$ 和 $\omega_3(0)$ 为已知。
- ③固定支承, 初值 $\omega_1(0)$ 和 $\omega_2(0)$ 为已知。

④竖向固定支承, 初值 $\omega_2(0)$ 和 $\omega_4(0)$ 为已知。

底端在各种支承条件下的已知条件为

①自由支承, 边值 $\omega_3(h)$ 和 $\omega_4(h)$ 为已知。

②铰支承, 边值 $\omega_1(h)$ 和 $\omega_3(h)$ 为已知。

③固定支承, 边值 $\omega_1(h)$ 和 $\omega_2(h)$ 为已知。

④弹性自由支承, 边值 $\omega_4(h)$ 为已知, $\omega_3(h)$ 和 $\omega_2(h)$ 之间存在着以下关系^[2,3]:

$$\omega_3(h) = -K_h \omega_2(h) \quad (5)$$

式中 K_h 为一无量纲的系数, $K_h = \frac{C_o I_o}{\alpha EI}$; I_o 为基底面积对其截面重心的惯性矩; C_o 为基底岩土的地基系数; 式(5)引入一个负号是因为当 $\omega_2(h)$ 为负值时, 基底产生正的力矩 $\omega_3(h)$ 。

⑤弹性铰支承, 边值 $\omega_1(h)$ 为已知, $\omega_3(h) = -K_h \omega_2(h)$ 。

假定有一顶端为自由支承和底端为弹性自由支承的桩, 在其顶端受一力矩 $\omega_3(0)$ 。对于这种支承受力条件, 顶端已知条件为: $\omega_3(0)$, $\omega_4(0)=0$, $\omega_5(0)=0$, $\omega_6(0)=0$; 底端已知条件为 $\omega_4(h)=0$, $\omega_3(h) = -K_h \omega_2(h)$, 未知初值为 $\omega_1(0)$ 和 $\omega_2(0)$ 。将这些已知条件代入初值方程式(3)中, $i=2, 3, 4$ 可得

$$\psi_{21}(h) \omega_1(0) + \psi_{22}(h) \omega_2(0) + \psi_{23}(h) \omega_3(0) = \omega_2(h) \quad (6)$$

$$\psi_{31}(h) \omega_1(0) + \psi_{32}(h) \omega_2(0) + \psi_{33}(h) \omega_3(0) = \omega_3(h) \quad (7)$$

$$\psi_{41}(h) \omega_1(0) + \psi_{42}(h) \omega_2(0) + \psi_{43}(h) \omega_3(0) = 0 \quad (8)$$

并由关系式 $\omega_3(h) = -K_h \omega_2(h)$ 可得

$$[\psi_{31}(h) + K_h \psi_{21}(h)] \omega_1(0) + [\psi_{32}(h) + K_h \psi_{22}(h)] \omega_2(0) + [\psi_{33}(h) + K_h \psi_{23}(h)] \omega_3(0) = 0 \quad (9)$$

由式(8)和式(9)可得

$$\omega_1(0) = f_{13} \omega_3(0)$$

$$\omega_2(0) = f_{23} \omega_3(0)$$

式中 f_{13} 和 f_{23} 为未知初值的无量纲系数,

$$f_{13} = \frac{[\psi_{32}(h) \psi_{43}(h) - \psi_{42}(h) \psi_{33}(h)]}{[\psi_{31}(h) \psi_{42}(h) - \psi_{41}(h) \psi_{32}(h)]} \times \frac{+ K_h [\psi_{22}(h) \psi_{43}(h) - \psi_{42}(h) \psi_{23}(h)]}{+ K_h [\psi_{21}(h) \psi_{42}(h) - \psi_{41}(h) \psi_{22}(h)]}$$

$$f_{23} = \frac{[\psi_{41}(h) \psi_{33}(h) - \psi_{31}(h) \psi_{43}(h)]}{[\psi_{31}(h) \psi_{42}(h) - \psi_{41}(h) \psi_{32}(h)]} \times \frac{+ K_h [\psi_{41}(h) \psi_{23}(h) - \psi_{21}(h) \psi_{43}(h)]}{+ K_h [\psi_{21}(h) \psi_{42}(h) - \psi_{41}(h) \psi_{22}(h)]}$$

同理,可逐一求得上述顶端和底端的各种支承受力条件下顶端未知初值的无量纲系数。各种支承受力条件下侧向受荷桩顶端未知初值计算的无量纲系数如下:

$$f_{\eta j} = \frac{[\psi_{\alpha\xi}(h)\psi_{\beta j}(h) - \psi_{\beta\xi}(h)\psi_{\alpha j}(h)]}{[\psi_{\alpha\eta}(h)\psi_{\beta\xi}(h) - \psi_{\beta\eta}(h)\psi_{\alpha\xi}(h)]} \rightarrow$$
$$\leftarrow \frac{+ K_h[\psi_{\gamma\xi}(h)\psi_{\theta j}(h) - \psi_{\theta\xi}(h)\psi_{\gamma j}(h)]}{+ K_h[\psi_{\gamma\eta}(h)\psi_{\theta\xi}(h) - \psi_{\theta\eta}(h)\psi_{\gamma\xi}(h)]}$$

$$f_{\xi j} = \frac{[\psi_{\beta\eta}(h)\psi_{\alpha j}(h) - \psi_{\alpha\eta}(h)\psi_{\beta j}(h)]}{[\psi_{\alpha\eta}(h)\psi_{\beta\xi}(h) - \psi_{\beta\eta}(h)\psi_{\alpha\xi}(h)]} \rightarrow$$
$$\leftarrow \frac{+ K_h[\psi_{\theta\eta}(h)\psi_{\gamma j}(h) - \psi_{\gamma\eta}(h)\psi_{\theta j}(h)]}{+ K_h[\psi_{\gamma\eta}(h)\psi_{\theta\xi}(h) - \psi_{\theta\eta}(h)\psi_{\gamma\xi}(h)]}$$

(10)

式中 下标 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ 与底端支承条件有关,按表(1)确定。下标 j 与荷载初值有关,当 j 分别为 3,4,5,6 时,表示桩承受顶端力矩 $\omega_3(0)$ 、顶端力 $\omega_4(0)$ 、均布荷载 $\omega_5(0)$ 或三角形分布荷载 $\omega_6(0)$ 的单独作用。下标 η 和 ξ 则表示欲求的未知初值,与顶端支承受力条件有关,如表 2 所示。

表 1 下标 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ 的规定值
Table 1 Regulation for subscripts $\alpha, \beta, \gamma, \theta$

底端支承条件	K_h	α	β	γ	θ	底端已知条件
自由支承	0	3	4			$\omega_3(h)=0, \omega_4(h)=0$
弹性自由支承	$\frac{C_o I_o}{\alpha EI}$	3	4	2	4	$\omega_4(h)=0$ $\omega_3(h)=-K_h \omega_2(h)$
铰支承	0	1	3			$\omega_1(h)=0, \omega_3(h)=0$
弹性铰支承	$\frac{C_o I_o}{\alpha EI}$	1	3	1	2	$\omega_1(h)=0$ $\omega_3(h)=-K_h \omega_2(h)$
固定支承	0	1	2			$\omega_1(h)=0, \omega_2(h)=0$

桩顶未知初值可由以下通式求出:

$$\omega_i(0) = \sum_{j=3}^6 f_{ij} \omega_j(0) \quad (i = \eta, \xi) \tag{11}$$

表 2 下标 η, ξ 的规定值

Table 2 Regulation for subscripts η and ξ			
顶端支承条件	未知初值	η	ξ
自由支承	$\omega_1(0), \omega_2(0)$	1	2
铰支承	$\omega_2(0), \omega_4(0)$	2	4
固定支承	$\omega_3(0), \omega_4(0)$	3	4
竖向固定支承	$\omega_1(0), \omega_3(0)$	1	3

4 横向受荷桩的通解及其意义

将式(11)得出未知初值的解代入式(3),即可得横向受荷桩的通解。

$$\omega_i(y) = \sum_{j=1}^6 \psi_{ij}(y) \omega_j(0) \quad (i = 1 \sim 4) \tag{12}$$

式(12)在形式上与式(3)完全相同,但却与式(3)有本质的区别,在式(12)中,6 个初值都赋于了量的定义,都是已知值,由式(12)可得出横向受荷桩任意截面的位移和内力,以及桩侧土抗力。

上述公式都很容易编写成电算程序,用计算机分析各种支承受力条件下的横向受荷桩,方法简便。特别应当指出的是,我国现行桩基规范^[4]和某些桩基的参考书,都仅列出了顶端为自由支承的横向受荷桩的计算公式和表格,但实际应用中的桩基顶端支承条件往往不能被认为是自由支承。上述的通解为分析各种支承条件下的横向受荷桩提供了便利。

参 考 文 献

1 范文田.侧向梯形荷载受力桩的通解.铁道学报,1980(4): 58~63.

2 范文田.地下墙柱静力计算.北京:人民铁道出版社,1978. 63.

3 胡人礼.桥梁桩基础分析和设计.北京:中国铁道出版社, 1987.101.

4 中华人民共和国行业标准.建筑桩基技术规范(JGJ94- 94).北京:中国建筑出版社,1995.110~127.