

# 基于微调DeepONet模型的非饱和边坡参数贝叶斯反分析

揭鸿鹄<sup>1,2</sup>, 蒋水华<sup>\*1,2</sup>, 万建宏<sup>1,2</sup>, 常志璐<sup>1,2</sup>, 黄劲松<sup>1</sup>, 周创兵<sup>1,2</sup>

(1. 南昌大学工程建设学院, 江西 南昌 330031; 2. 南昌大学流域碳中和教育部工程研究中心, 江西 南昌 330031)

**摘要:** 贝叶斯方法通过融合参数先验分布与现场时序监测数据推断边坡参数后验分布, 但需大量调用耗时的数值模型, 导致计算成本高。尽管代理模型可替代数值模型, 现有贝叶斯反分析方法仍有不足。一方面, 传统代理模型难以准确描述边坡输出响应的时空演化特征, 对于时空变化的监测数据, 需要针对不同时间点和空间点分别构建代理模型; 另一方面, 融合时序监测数据需进行多次贝叶斯反分析, 先验分布会逐渐过渡至后验分布, 出现分布偏移现象, 而基于固定先验分布构建的代理模型进行参数反分析时计算精度较差。为此, 本文提出了结合微调深度算子网络

(Deep operator network, DeepONet) 与子集模拟的贝叶斯反分析方法。首先利用DeepONet模型构建边坡输出响应的时空演化代理模型, 接着在各子集模拟层中挑选额外训练样本微调DeepONet模型, 确保后验分布推断精度。以香港某边坡为例, 验证了提出方法的有效性。结果表明: 提出方法提高了贝叶斯反分析的计算效率, 保证了参数后验估计的精度。为解决基于时序监测数据的边坡参数后验分布推断问题提供了一种有效的工具。

**关键词:** 非饱和边坡; 深度算子网络; 贝叶斯反分析; 代理模型; 子集模拟

中图分类号: TU 47 文献标识码: A

揭鸿鹄(1999-), 男, 江西抚州人, 博士研究生, 主要从事岩土工程贝叶斯反分析与代理模型方面的研究。

E-mail: honghu.jie@email.ncu.edu.cn。

## Bayesian inverse analysis of unsaturated slope parameters using fine-tuned deep operator network model

JIE Honghu<sup>1,2</sup>, JIANG Shuihua<sup>1,2</sup>, WAN Jianhong<sup>1,2</sup>, CHANG Zhilu<sup>1,2</sup>, HUANG Jinsong<sup>1</sup>, ZHOU Chuangbing<sup>1,2</sup>

(1. School of Infrastructure Engineering, Nanchang University, Nanchang 330031, China; 2. Engineering Research Center of Watershed Carbon Neutralization (Ministry of Education), Nanchang University, Nanchang 330031)

**Abstract:** The Bayesian method infers the posterior distribution of slope parameters by combining prior distribution with filed time-series monitoring data. This process requires extensive computational resources due to repeated calls to time-consuming numerical models. While surrogate models can replace numerical models to improve efficiency, current Bayesian inversion methods still exhibit limitations. On the one hand, conventional surrogate models inadequately capture the spatiotemporal evolutionary characteristics of slope responses, requiring separate model constructions for distinct temporal and spatial points. On the other hand, integrating time-series monitoring data requires multiple Bayesian updates. During this process, the prior distribution progressively transitions into the posterior distributions, leading to the distribution shift phenomenon. Employing surrogate models constructed based on fixed prior distribution results in poor computational accuracy during parameter inversion. To address these issues, this study proposes a Bayesian inversion method that combines subset simulation with a fine-tuned deep operator network (DeepONet). Specifically, the DeepONet model is employed to construct a spatiotemporal surrogate model. Subsequently, additional training samples are selected in each subset simulation layer to fine-tune the DeepONet model, ensuring the accuracy of posterior distribution inference. The proposed method is validated using a case study of a slope in Hong Kong. The results demonstrate that the proposed method enhances the computational efficiency of Bayesian inverse analysis while ensuring the accuracy of posterior parameter estimation. This provides an effective tool for addressing the problem of posterior distribution inference of slope parameters based on time-series monitoring data.

**Key words:** Unsaturated slope; Deep operator network; Bayesian inverse analysis; Surrogate model; Subset simulation

## 0 引言

降雨是诱发滑坡的主要因素之一<sup>[1]</sup>。降雨可导致边坡孔隙水压增大, 抗剪强度降低, 最终造成边坡失稳。非饱和土水力参数会显著影

基金项目: 国家自然科学基金优秀青年基金项目(52222905); 国家自然科学基金项目(52179103, 42272326, 42407241, 52408371); 江西省自然科学基金项目(20242BAB24001, 20232ACB204031)

收稿日期: 2025-01-15

\*通讯作者(E-mail: sjiangaa@ncu.edu.cn)

响降雨入渗过程中边坡孔隙水压的时空分布<sup>[2]</sup>。因此,准确估算这些参数及其演化特征是边坡稳定性分析的关键。传统方法先在边坡场地钻孔取样,再进行室内测试获取水力参数,成本高、耗时长,并且难以反映水力参数固有的空间变异性<sup>[3]</sup>。相比之下,基于降雨作用下孔压水头、变形等监测数据的贝叶斯反分析<sup>[4]</sup>,为推断非饱和边坡空间变异水力参数提供了一条有效途径。

贝叶斯方法可以融合参数先验信息与现场孔压水头、变形等时序监测数据推断边坡参数后验分布,但需大量调用耗时的数值模型,导致计算成本高。为此,许多学者提出采用代理模型(如多项式混沌展开<sup>[5]</sup>、高斯过程回归<sup>[6]</sup>、机器学习<sup>[7]</sup>)替代复杂数值模型。代理模型通过少量数值仿真数据建立边坡输入参数与输出响应的非线性映射关系,训练完成后可快速预测边坡输出响应,显著提升贝叶斯反分析效率。

近年来,一些学者在利用孔压水头、体积含水量等监测数据通过贝叶斯反分析推求饱和渗透系数方面开展了有益的研究工作<sup>[7-8]</sup>。然而,目前所采用的代理模型在构建时面临高维挑战。饱和渗透系数的空间变异性导致模型输入维度高(通常需离散为数十至数百个随机变量);孔压水头等输出响应的时空演化特征导致模型输出维度高。输入与输出之间存在的复杂高维映射,使得常规代理模型难以有效拟合。另外,融合时序监测数据需要进行多次贝叶斯分析,先验分布会逐渐过渡至后验分布,出现分布偏移现象<sup>[9]</sup>。传统方法始终使用基于参数先验分布构建的代理模型进行参数反分析,使得代理模型训练域和预测域不匹配,计算精度较差。

针对传统代理模型在贝叶斯反分析中面临的时空建模与分布偏移问题,本文提出了结合微调深度算子网络(Deep operator network, DeepONet)<sup>[9-10]</sup>与子集模拟<sup>[11]</sup>的贝叶斯反分析方法。基于Lu等<sup>[10]</sup>提出的DeepONet模型,建立了高维输入参数与时空输出响应之间的高效映射,突破了传统代理模型需离散时空坐标分别建模的局限性,实现了全时空域边坡响应的快速预测。同时,针对贝叶斯反分析过程中分布偏移导致代理模型精度下降问题,通过使用中间子集样本微调DeepONet模型,有效维持DeepONet模型在后验分布预测的稳定性,进而确保后验分布推断精度。最后,以香港某边坡为例,验证该方法的有效性。

## 1 非饱和边坡参数贝叶斯反分析方法

### 1.1 非饱和边坡降雨入渗偏微分方程

降雨诱发的滑坡通常发生在边坡浅表区域,故可采用无限长边坡模型描述边坡水文力学行为<sup>[2]</sup>,并通过Richards方程模拟非饱和边坡降雨入渗过程,控制方程如下<sup>[12]</sup>:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K \left( \frac{\partial h}{\partial z} + \cos \beta \right) \right] \quad (1)$$

式中:  $\theta$  为体积含水量;  $t$  为时间;  $z$  为空间坐标;  $K$  为渗透系数;  $h$  为孔压水头;  $\beta$  为坡角。体积含水量  $\theta(h)$  和渗透系数  $K(h)$  通常是  $h$  的非线性函数,一般用土水特征曲线(SWCC)和渗透系数函数(HCF)来描述,本文选取常用的van Genuchten-Mualem模型<sup>[13-14]</sup>,其计算表达式分别如下:

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha h)^{n_1}]^{n_2}}, & h < 0 \\ \theta_r, & h \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$K(h) = K_s S_e^{1/2} \left[ 1 - \left( 1 - S_e^{1/n_2} \right)^{n_2} \right]^2 \quad (3)$$

式中:  $\theta_s$  和  $\theta_r$  分别为饱和与残余体积含水量;  $\alpha$ 、 $n_1$  和  $n_2$  均为SWCC曲线经验拟合参数,其中  $n_2 = 1 - 1/n_1$ ;  $K_s$  为饱和渗透系数;  $S_e$  为有效饱和度,表达式如下:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (4)$$

饱和渗透系数  $K_s$  的空间变异性对降雨入渗边坡的路径和速度具有重要影响<sup>[2]</sup>。为表征  $K_s$  的空间变异性,本文采用基于乔列斯基分解的中点法<sup>[15]</sup>生成沿竖直方向的一维随机场。

### 1.2 深度算子网络(DeepONet)代理模型

深度算子网络的目标是学习由Richards偏微分方程定义的解算子  $G: K_s(z) \mapsto h(z, t)$ ,该解算子将输入函数映射到输出函数。

本文将输入函数空间记作  $X$ ,每个输入函数  $\mathbf{x} \in X$  是定义在空间域  $D \subset \mathbf{R}^d$  上的  $K_s$  随机场的一次实现。输入函数  $\mathbf{x}$  将定义域  $D$  中每个空间坐标点  $z$  映射到实数值  $\mathbf{x}(z) \in \mathbf{R}$ :

$$\mathbf{x}: D \rightarrow \mathbf{R}, z \mapsto \mathbf{x}(z) \quad (5)$$

将输入函数空间记作  $H$ ,输出函数  $\mathbf{h} \in H$  是定义在时空域  $D' \subset \mathbf{R}^{d'}$  上的孔压水头时空分布。输出函数  $\mathbf{h}$  将时空坐标点  $\xi = (z, t)$  映射到实值  $\mathbf{h}(\xi) \in \mathbf{R}$ :

$$\mathbf{h}: D' \rightarrow \mathbf{R}, \xi \mapsto \mathbf{h}(\xi) \quad (6)$$

算子  $G$  将输入函数空间  $\mathbf{X}$  中的函数  $\mathbf{x}$  映射到输出函数空间  $\mathbf{H}$  中的函数  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h} = G(\mathbf{x})$ :

$$G: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{h} \quad (7)$$

Lu 等<sup>[10]</sup>提出的 DeepONet 模型通过分支 (branch) - 主干 (trunk) 双网络架构学习非线性算子  $G$ , 如图 1 所示。Branch 网络输入层为  $K_s$  随机场实现, 具体表示为在离散点  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$  上的输入函数值  $[\mathbf{x}(z_1), \mathbf{x}(z_2), \dots, \mathbf{x}(z_m)]^T$ ,  $m$  为输入函数的离散点个数 (即随机场网格数目), 输出层为  $[B_1, B_2, \dots, B_s]^T$ 。 $s$  为输出层神经元数目。Trunk 网络输入层为输出函数时空坐标点  $\xi = (z, t)$ , 本文仅考虑某一固定空间点,  $\xi = (z, t)$  退化为时间坐标点  $t$ , 输出层为  $[T_1, T_2, \dots, T_s]^T$ 。DeepONet 模型输出为 branch 网络和 trunk 网络输出的点积与偏置项  $B_0$  之和, 表达式如下:

$$\hat{G}_\Theta(\mathbf{x})(t) = \sum_{l=1}^s B_l [\mathbf{x}(z_1), \mathbf{x}(z_2), \dots, \mathbf{x}(z_m)]^T T_l(t) + B_0 \quad (8)$$

式中:  $\Theta = \{\Theta_B, \Theta_T, B_0\}$  是 DeepONet 模型的可学习参数集。其中,  $\Theta_B$  和  $\Theta_T$  分别是 branch 网络和 trunk 网络的参数 (包括权重  $W$  和偏置  $b$ )。在本文中, branch 和 trunk 网络均采用全连接神经网络 (Fully connected neural network, FCNN)。DeepONet 模型具有架构灵活性, 在输入函数维度较高时, branch 网络也可采用卷积神经网络 (Convolutional neural network, CNN) 来有效提取高维输入特征。

为构建 DeepONet 模型数据集, 需要在给定  $K_s$  随机场实现  $\mathbf{x}(z)$  下, 通过数值软件求解式 (1) 方程得到孔压水头时序数据  $h(t)$ 。随后将随机场离散值  $[\mathbf{x}(z_1), \mathbf{x}(z_2), \dots, \mathbf{x}(z_m)]^T$ 、时间坐标点  $t$  及对应孔压水头  $h(t)$  组合为三元数据集  $[\mathbf{x}(z), t, h(t)]$ 。DeepONet 模型的输入为随机场离散值以及时间坐标点集合, 输出为对应的孔压水头值。对于  $N$  个随机场样本, 每个样本会在  $P$  个离散时刻  $\{t_1, t_2, \dots, t_P\}$  上进行评估。因此, DeepONet 模型数据集  $[\mathbf{x}(z), t, h(t)]$  的维度分别为  $(N \times P, m)$ 、 $(N \times P, 1)$  和  $(N \times P, 1)$ 。训练过程中, 采用均方误差 (Mean squared error, MSE) 作为损失函数来量化 DeepONet 模型预测值与 Richards 方程数值解之间的差距<sup>[10]</sup>:

$$\mathbf{L}(\Theta) = \frac{1}{NP} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^P \left| \hat{G}_\Theta(\mathbf{x}_k)(t_j) - h_k(t_j) \right|^2 \quad (9)$$

网络最优参数  $\Theta^*$  通过反向传播算法在训练数据集上迭代优化获得。

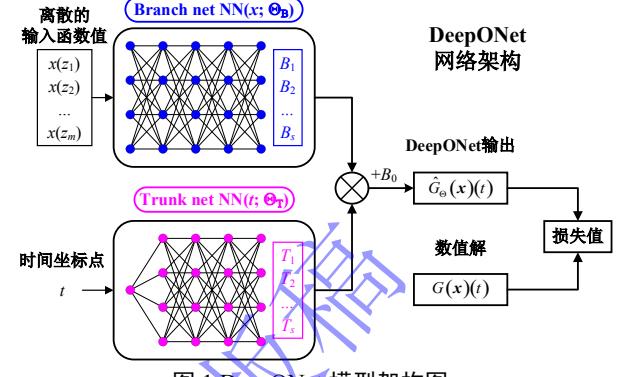


图 1 DeepONet 模型架构图

Fig.1 Architecture of the DeepONet model

### 1.3 基于微调DeepONet模型的贝叶斯反分析

边坡工程现场通常会安装孔压计等监测设备, 从中可以获得某一位置处孔压水头时序监测值  $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_P)$ ,  $P$  为监测时刻总数。贝叶斯方法可以结合现场孔压水头监测数据推断饱和渗透系数后验分布, 具体计算过程如下<sup>[16]</sup>:

$$f_X''(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) = c_E^{-1} L(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) f_X'(\mathbf{x}) \quad (10)$$

式中:  $f_X'(\mathbf{x})$  和  $f_X''(\mathbf{x}|\mathbf{Y})$  分别是参数  $\mathbf{X}$  的先验和后验概率密度函数;  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ ,  $m$  为随机变量数目 (也即随机场网格数目);  $\mathbf{x}$  为土体参数  $\mathbf{X}$  (饱和渗透系数  $K_s$ ) 的实现值;  $c_E$  为模型证据, 是对假定模型可能性的一种度量, 其值越大表示该模型发生的可能性越高;  $L(\mathbf{x}|\mathbf{Y})$  为似然函数, 表示当参数  $\mathbf{X}$  取某一特定实现值时, 某一现场信息事件发生的概率。 $f_X'(\mathbf{x})$  通常可以根据大量统计数据来确定, 构建合适的似然函数是融合大量监测数据进行贝叶斯反分析的关键<sup>[4]</sup>。求解式 (1) 方程可得到不同  $K_s$  随机场实现下孔压水头模拟值  $\mathbf{h} = [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_P(\mathbf{x})]$ , 监测数据可表示成如下形式:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{h} + \boldsymbol{\varepsilon} = G(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

式中:  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_P)$  表示孔压计的测量误差。通常假定该误差在统计上相互独立, 服从均值为  $\mu_\varepsilon$ 、标准差为  $\sigma_\varepsilon$  的正态分布<sup>[17]</sup>。因此, 基于孔压水头监测数据的似然函数可构建如下:

$$L(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) = \omega \prod_{j=1}^P \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{y_j - h_j(\mathbf{x}) - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 \right] \quad (12)$$

式中:  $\omega$  为比例常数,  $\omega = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-P/2}$ 。

为保证计算的数值稳定性, 通常将似然函数作如下对数化处理:

$$\ln L(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) = \ln(\omega) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left( \frac{y_j - h_j(\mathbf{x}) - \mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \right)^2 \quad (13)$$

求解式 (10) 便可得到土体参数后验概率密度函数。本文基于 Straub 和 Papaioannou<sup>[11]</sup>提出的方法, 通过构建等效的失效区域  $\Omega$ , 将参数  $\mathbf{X}$  后验概率分布推断及其统计特征的估计转换为对以式 (14) 为失效区域的结构可靠度问题求解:

$$\Omega = \{U - cL(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) \leq 0\} \quad (14)$$

式中:  $U$  表示服从区间  $[0, 1]$  的均匀分布;  $c$  为似然函数乘子, 对任意参数  $\mathbf{X}$ , 均需满足  $cL(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) \leq 1$ 。

接着, 采用子集模拟来求解该结构可靠度问题, 其中失效区域  $\Omega$  对应的驱动变量  $g$  为

$$g(\mathbf{x}, U) = U - cL(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) \quad (15)$$

为提高计算效率, 在失效区域保持不变的情况下, 将式 (15) 转换为如下自然对数形式<sup>[16]</sup>:

$$\Omega = \{g(\mathbf{x}, U) = \ln(U) - \ln(c) - \ln L(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) \leq 0\} \quad (16)$$

这样, 可将  $P(g < 0)$  表达为一系列中间事件条件概率的乘积:

$$P(\Omega) = P(g < 0) = \prod_{i=1}^q P(\Omega_i | \Omega_{i-1}) \quad (17)$$

式中:  $\Omega_i$  为中间事件, 定义为  $\Omega_i = \{g < b_i\}$ , 将  $N_l$  个驱动变量  $g$  按升序排列, 取第  $p_0 N_l$  个  $g$  值为第  $i$  层子集模拟的阈值  $b_i$ ,  $p_0$  和  $N_l$  分别为条件概率和每层子集模拟样本数目;  $q$  为达到失效区域  $\Omega$  所需的子集模拟层数;  $P(\Omega_i | \Omega_{i-1})$  为在  $\Omega_{i-1}$  发生条件下  $\Omega_i$  发生的概率。在给定事件  $\Omega_0$  下, 通过蒙特卡洛模拟获取初始样本, 将子集模拟每一层似然函数最大值的倒数  $1/\max[L(\mathbf{x}|\mathbf{Y})]$  赋给  $c_i$ , 确定似然函数乘子  $c_1, c_2, \dots, c_q$ , 并对这些条件样本进行统计分析, 确定失效事件  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_q$  和相应的阈值  $b_1, b_2, \dots, b_q$ , 使得  $P(\Omega_i | \Omega_{i-1})$  等于设定的条件概率  $p_0$ , 并满足

$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots \supset \Omega_{q-1} \supset \Omega_q$  以及  $b_1 > b_2 > \dots > b_{q-1} > 0 \geq b_q$ 。在中间失效事件  $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, q-1$  下, 基于来自  $\Omega_{i-1}$  的  $N_s = p_0 N_l$  组种子样本使用自适应条件抽样的 MCMC 算法<sup>[18]</sup> 来获取  $(1 - p_0)N_l$  组条件样本。随着子集模拟层数的增加, 一旦第  $q$  层子集模拟的阈值  $b_q \leq 0$ , 即

$g \leq 0$ , 便可终止计算。将第  $q$  层中  $N_F$  组失效样本视为种子样本, 并扩充到  $N_p$  组后验样本。

在计算式 (13) 似然函数过程中, 需要大量调用数值模型求解 Richards 方程, 得到不同参数随机场实现  $K_s(z)$  下孔压水头时序模拟值  $\mathbf{h}$ 。为获取  $N_p$  组后验样本, 共需使用数值模型求解  $N_{\text{sim}}$  次 Richards 方程:

$$N_{\text{sim}} = \frac{N_l}{\text{MCS所需样本数}} + \frac{(q-1)(1-p_0)N_l}{q-1 \text{ 层 MCMC 本数}} + \frac{(N_l - N_p)}{\text{失效样本扩充样本数}} \quad (18)$$

$N_{\text{sim}}$  次数值模型求解计算成本高。为提高计算效率, 可采用第 1.2 节所述的 DeepONet 模型替代数值模型进行正向求解:

$$\mathbf{h} = G(\mathbf{x}) \approx \hat{G}_\Theta(\mathbf{x}) = \text{DeepONet}(\mathbf{x}) \quad (19)$$

在贝叶斯反分析时, 参数先验分布会逐渐转化为后验分布, 出现分布偏移现象。本文将基于参数先验分布训练的 DeepONet 模型称为预训练 DeepONet 模型。其在先验分布 (训练域) 上预测精度良好, 但在后验分布 (预测域) 偏离先验分布时会因缺乏外推能力出现预测偏差, 影响反分析精度。Zhu 等<sup>[9]</sup>提出通过新增预测域样本或物理约束微调 DeepONet 模型以缓解预测偏差问题, 但其仅针对正向预测问题。本文将微调方法与基于子集模拟的贝叶斯方法结合, 从每个子集模拟层中抽取新的训练数据对预训练 DeepONet 模型的可学习参数 ( $\Theta = \{\Theta_B, \Theta_T, B_0\}$ ) 进行二次优化, 使其逐步适应后验空间的动态变化。具体做法如下:

- (1) 基于参数先验分布构建一个预训练的 DeepONet 模型  $\hat{G}_\Theta$ ;
- (2) 将预训练 DeepONet 模型与基于子集模拟的贝叶斯方法结合。在每个子集模拟层  $N_l$  组样本中选取  $N_s = p_0 \times N_l$  组样本作为种子样本;
- (3) 使用 MATLAB 的 `randperm` 函数生成  $N_a$  个随机索引, 按照随机索引从  $N_s$  组种子样本中随机选择  $N_a$  组样本并使用数值模型求解生成训练样本。在每一层子集模拟抽样中, 允许从中间失效域随机抽取的训练样本中出现重复样本。需要指出的是, 高频重复样本分布均匀性可以保证本文方法所抽取的训练样本重复率不会很高;
- (4) 采用新的训练样本微调预训练的 DeepONet 模型得到微调后的 FT\_DeepONet 模型, 进而利用新构建的 FT\_DeepONet 模型预测当前子集模拟中  $(1 - p_0)N_l$  组孔压水头值。重复这个步骤, 直至达到失效区域。

需要指出的是,每层子集模拟训练样本均在预训练模型  $\hat{G}_0$  上进行微调,进而得到各子集模拟层上的微调 DeepONet 模型  $\hat{G}_{\Theta_1}, \hat{G}_{\Theta_2}, \dots, \hat{G}_{\Theta_q}$ 。利用不同子集模拟层中的数据来微调预训练 DeepONet 模型  $\hat{G}_0$  使得以下损失值最小:

$$L(\Theta_i) = \frac{1}{NP} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^P \left| \hat{G}_{\Theta_i}(x_k^i)(t_j) - h_k^i(t_j) \right|^2 \quad (20)$$

据此,可提升 DeepONet 模型在后验分布的预测性能,保证参数后验分布推断精度。图 2 给出了基于微调 DeepONet 模型的贝叶斯反分析算法。

1. 确定参数先验信息(均值、标准差、相关距离等),基于参数先验信息预训练 DeepONet 模型;收集孔压水头时序监测数据以及测量误差概率统计特征
2. 确定每层子集模拟样本数目  $N_l$  和后验样本数目  $N_p$ ,中间子集模拟的条件概率  $p_0$ ,输入参数维度  $m$
3. 在第 0 层基于蒙特卡洛模拟产生  $N_l$  组维度为  $m+1$  的独立标准正态随机样本,其中前  $m$  维分量通过中点法转化为  $N_l$  组  $K_s$  随机场实现  $[x_1, x_2, \dots, x_{N_l}]^T$ ,最后 1 维作为辅助变量  $U_1, U_2, \dots, U_{N_l}$ 。接着采用预训练 DeepONet 模型计算  $N_l$  组孔压水头模拟值  $[h_1, h_2, \dots, h_{N_l}]^T$ ,计算相应的对数似然函数  $\ln L(x|Y)$  和驱动变量  $g(x, U)$ ,定义  $i=1$
4. 将  $N_l$  个  $g(x, U)$  值按照升序排列,将第  $p_0 N_l$  个  $g(x, U)$  值取作阈值  $b_i$ ,定义第  $i$  个中间失效区域  $\Omega_i = \{g < b_i\}$
5. 将落在  $\Omega_i$  的  $N_s = p_0 N_l$  组样本作为种子样本,从种子样本中随机选取  $N_a = \eta N_s$  组训练样本  $x_{FT} = \{x_k^i\}_{k=1}^{N_a}$ ,代入数值模型求解得到新的孔压水头  $h_{FT} = \{h_k^i\}_{k=1}^{N_a}$ 。使用数据集  $(x_k^i, t_j, h_k^i)_{j=1, \dots, P}$  微调预训练 DeepONet 模型使得式(20)损失值最小,将微调后 DeepONet 模型称为 FT\_DeepONet\_i 模型
6. 利用自适应条件抽样的 MCMC 算法获取剩余  $(1-p_0)N_l$  组条件样本,采用 FT\_DeepONet\_i 模型计算  $(1-p_0)N_l$  组孔压水头值,计算对应的对数似然函数  $\ln L(x|Y)$  和驱动变量  $g(x, U)$ , $i = i+1$
7. 重复步骤 4~6,当阈值  $b_i \leq 0$  跳出循环,终止计算。确定最终失效区域  $\Omega_q$ ,统计  $g(x, U) \leq 0$  的  $N_F$  组样本作为种子样本,同样从种子样本中随机选择  $N_a = \eta N_s$  组训练样本  $x_{FT} = \{x_k^q\}_{k=1}^{N_a}$ ,代入数值模型求解得到新的孔压水头  $\{h_k^q\}_{k=1}^{N_l}$ ,将  $(x_k^q, t_j, h_k^q)_{j=1, \dots, P}$  作为数据集微调预训练 DeepONet 模型并使得式(20)

损失值最小,将微调后 DeepONet 模型称为 FT\_DeepONet\_q 模型,利用自适应条件抽样的 MCMC 算法中获取剩余  $(N_p - N_F)$  组后验样本,利用 FT\_DeepONet\_q 模型计算  $(N_p - N_F)$  组孔压水头模拟值,进而采用常规数理统计方法推断参数后验分布

图 2 基于微调 DeepONet 模型的贝叶斯反分析算法  
Fig.2 Bayesian inverse analysis algorithm based on the fine-tuned DeepONet model

## 2 案例分析

下面以香港某工程实际边坡为例验证本文提出方法的有效性。自 1999 年起,香港岩土工程办公室(Geotechnical Engineering Office, GEO)开始监测位于香港东涌大屿山的一段区域。GEO 在该区域内布置了雨量计、孔压计等监测设备,收集了孔压水头和降雨等时序监测数据。本文使用的孔压计 SP3 安装在埋深 2 m、坡度为 40° 的斜坡中。详细资料可从 Evans 和 Lam 的报告<sup>[19]</sup>中获取。

采用 HYDRUS-1D 软件<sup>[20]</sup>模拟降雨作用下边坡孔压水头时空分布。边坡几何模型和有限元网格如图 3 所示,坡度  $\beta = 40^\circ$ ,坡高  $H = 5$  m,共划分了 200 个有限元网格,网格厚度  $a = 0.025$  m。上边界条件为降雨边界,下边界设置为定水头边界,地下水位为 2.7 m。因此,边坡底部的孔压水头恒定为  $2.3 \text{ m} \times \cos 40^\circ = 1.762$  m。

该监测区域土壤为粘壤土和粉质粘壤土<sup>[19]</sup>。根据非饱和土水力参数统计资料<sup>[21]</sup>,壤土  $K_s$  均值取 0.0104 m/h,标准差取 0.0182 m/h。本文将上述统计参数作为  $K_s$  的先验信息,将其建模为一维对数正态随机场。随机场网格尺寸与有限元网格尺寸保持一致,通过高斯型自相关函数描述其空间自相关性,相关距离取 4 m。饱和与残余含水率分别取 0.435 和 0.078,SWCC 拟合曲线参数  $\alpha$ 、 $n_1$  和  $n_2$  分别取 0.423 m、1.564 和 0.361<sup>[22]</sup>。

图 4 给出了孔压计 SP3 及雨量计 R1 记录的 2001 年 6 月 8 日~6 月 15 日共 192 h 的孔压水头及降雨监测数据,数据记录间隔 1 h。基于 192 h 孔压水头监测数据构建似然函数。本文取式(13)中测量误差服从均值  $\mu_\varepsilon = 0$ ,标准差  $\sigma_\varepsilon = 0.05$  的正态分布<sup>[4]</sup>。将基于数值模型的贝叶斯反分析结果作为参考基准,验证基于微调 DeepONet 模型贝叶斯反分析方法的有效性。为兼顾计算精度和效率,贝叶斯反分析每层子集模拟

样本数取  $N_l = 10000$ , 后验样本数目取  $N_p = 10000$ , 条件概率取  $p_0 = 0.1$ 。

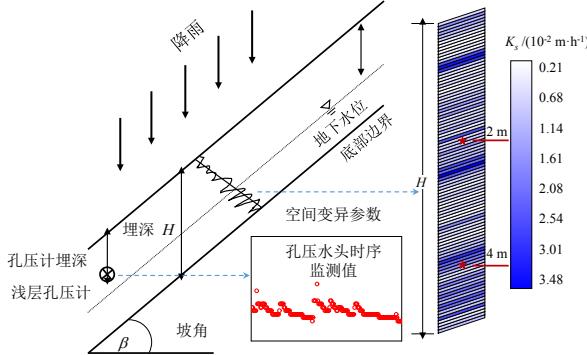


图3 无限长边坡模型图

Fig.3 An infinite slope model

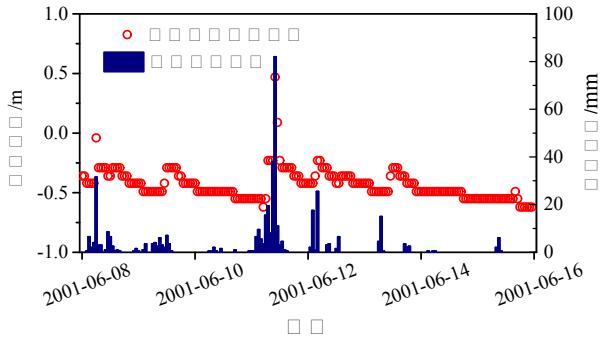


图4 孔压水头及降雨时序监测数据

Fig.4 Time-series monitoring data of pressure head and rainfall

## 2.1 预训练DeepONet代理模型构建

为融合监测数据进行参数贝叶斯反分析, 首先需预测不同随机场实现  $K_s(z)$  下埋深 2 m 处孔压水头时序值  $h(z=2m,t)$ 。两者之间的映射关系可表示为:  $\hat{G}: K_s(z) \rightarrow h(z=2m,t)$ 。基于参数先验信息生成  $N = 2000$  组  $K_s$  随机场实现值, 并使用数值模型求解得到埋深 2 m 处 192 h 孔压水头时序值。进而根据第 1.2 节方法构建数据集预训练 DeepONet 模型。

在预训练 DeepONet 模型中, branch 网络输入为随机场的典型实现  $[K_s(z_1), K_s(z_2), \dots, K_s(z_m)]$ , 维度  $m = 201$ 。Trunk 网络输入为时刻  $t$ , 其中  $t = 1, 2, \dots, 192$ , 维度  $P = 192$ , 与监测时刻总数保持一致。Branch 和 trunk 网络均由 6 层全连接隐藏层构成, 每层包含 100 个神经元。在模型训练过程中, 采用 Adam 优化器 (初始学习率  $5 \times 10^{-4}$ ) 更新网络参数  $\Theta = \{\Theta_B, \Theta_T, B_0\}$ , 采用逆时间衰减策略 (衰减率为  $1 \times 10^{-4}$ ) 动态调整学习率。总训练迭代次数取  $N_{\text{epoch}} = 10^5$ , 批次大小取  $N_B = 128$ , 训练集与测试集的比例取 8:2。所有隐藏层

使用 ReLU 激活函数, 通过 Xavier 方法进行网络参数随机初始化。上述超参数取值均参考 DeepONet 相关研究<sup>[23-24]</sup>确定。所有计算均在带有 NVIDIA GeForce RTX 4060 Ti 显卡的 Intel-i5 台式电脑上进行。图 5 给出了模型训练集和测试集损失函数值随迭代次数变化的曲线, 整个训练过程中, 训练集和测试集误差逐步下降并趋于稳定, 且两者基本保持一致。训练集和测试集的最低损失值分别为  $2.1 \times 10^{-4}$  和  $5.8 \times 10^{-4}$ 。预训练 DeepONet 模型共耗时 331 s。

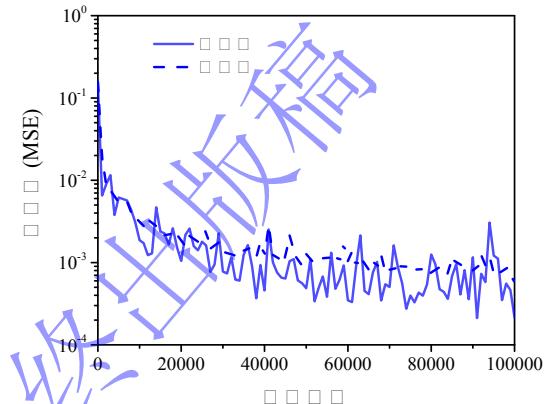
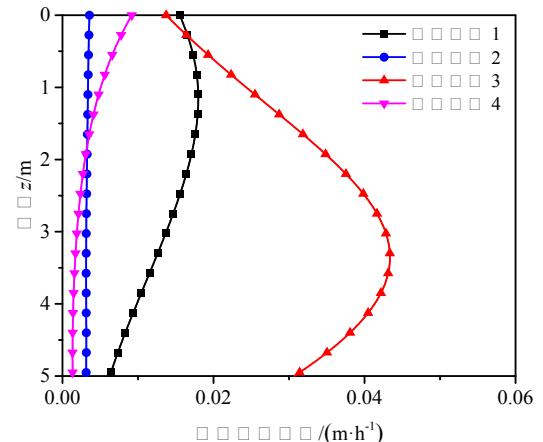


图5 模型训练集和测试集损失值随迭代次数的变化曲线

Fig.5 Variation of loss values of model training and test set with the number of epochs

图 6 (a) 给出了从 400 组测试集中选取的 4 次  $K_s$  随机场典型实现。图 6 (b) 对比了预训练 DeepONet 模型预测的 192 h 孔压水头值与数值模型计算的参考值, 通过均方根误差 (RMSE) 和决定系数 ( $R^2$ ) 量化代理模型的预测精度。

DeepONet 模型的预测结果与数值模型参考值十分吻合, 表明训练好的 DeepONet 模型能够准确预测未知随机场实现下边坡孔压水头时序演化过程。值得指出的是, 本文仅需构建一个 DeepONet 模型便可预测所有时刻孔压水头值, 无需针对不同时刻构建多个代理模型。



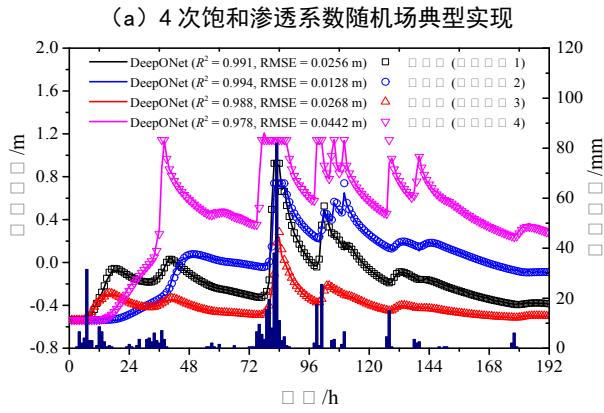


图 6 4 次随机场典型实现下预训练 DeepONet 模型与数值模型预测结果的比较

Fig.6 Comparison of the predicted pressure head values using the pre-trained DeepONet model and numerical model under four typical realizations of random field

图 7 展示了预训练 DeepONet 模型在 400 组测试集上的预测性能评价结果。图中统计了 192 个时刻的  $R^2$  和 RMSE 分布。其中，184 个时刻的  $R^2$  均大于 0.95；在所有时刻上，RMSE 均小于 0.1。这 400 组测试样本与模型训练所用的 1600 组样本均基于参数先验信息生成，表明预训练 DeepONet 模型具有较高的内插精度。对于 400 组测试样本，预训练 DeepONet 模型的预测时间仅需 0.11 s，预测效率高。

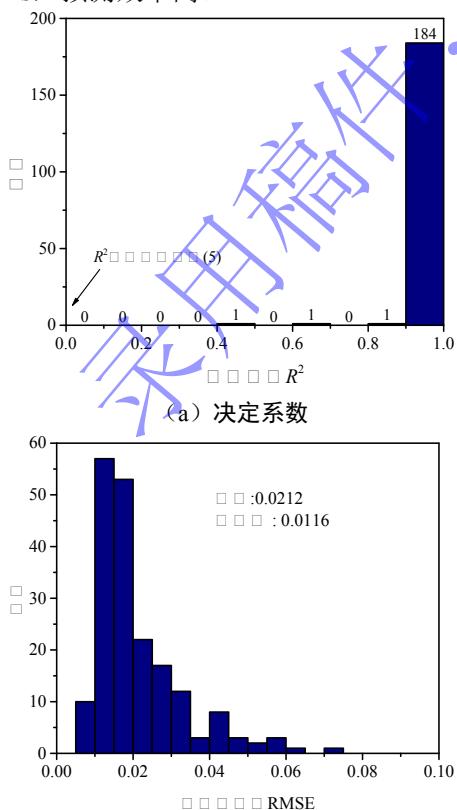


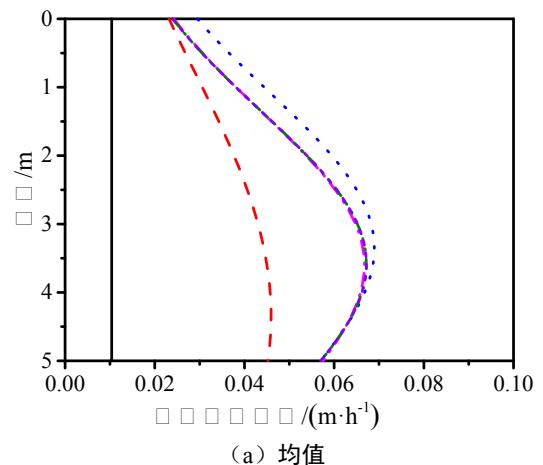
图 7 192 个时刻  $R^2$  和 RMSE 的直方统计图

Fig.7 Histogram of  $R^2$  and RMSE values over 192 time steps

## 2.2 微调DeepONet代理模型构建

图 8 展示了基于预训练 DeepONet 模型贝叶斯反分析中各子集模拟层样本的统计特征（均值、标准差）。对比分析发现，后验样本（第 5 层子集模拟）的统计特征较先验样本（第 0 层子集模拟）发生了显著变化。随着贝叶斯反分析过程中样本分布向高似然区域偏移，DeepONet 模型的预测任务从先验空间的内插转为后验空间的外推。图 9 进一步对比了预训练 DeepONet 模型与数值模型基于各子集模拟层 200 组种子样本预测的第 83 h 孔压水头值与数值模拟参考值。由图 9 可知， $R^2$  从先验空间第 0 层的 0.995 持续下降至后验空间第 5 层的 0.520。表明基于初始先验信息的预训练 DeepONet 模型性能随子集模拟层数的增加会逐渐退化，该预训练模型如直接用于后验空间预测时将会产生较大的外推偏差。

为此，在每层子集模拟种子样本中随机选取  $\eta N_s = 200$  ( $\eta = 0.2$ ) 组作为训练样本，通过数值模型计算其对应的 192 h 孔压水头时序值。按第 1.2 节方法构建微调数据集，对预训练 DeepONet 模型进行微调，微调过程中保持 DeepONet 网络结构不变，学习率取 0.0001，迭代次数取 10000。



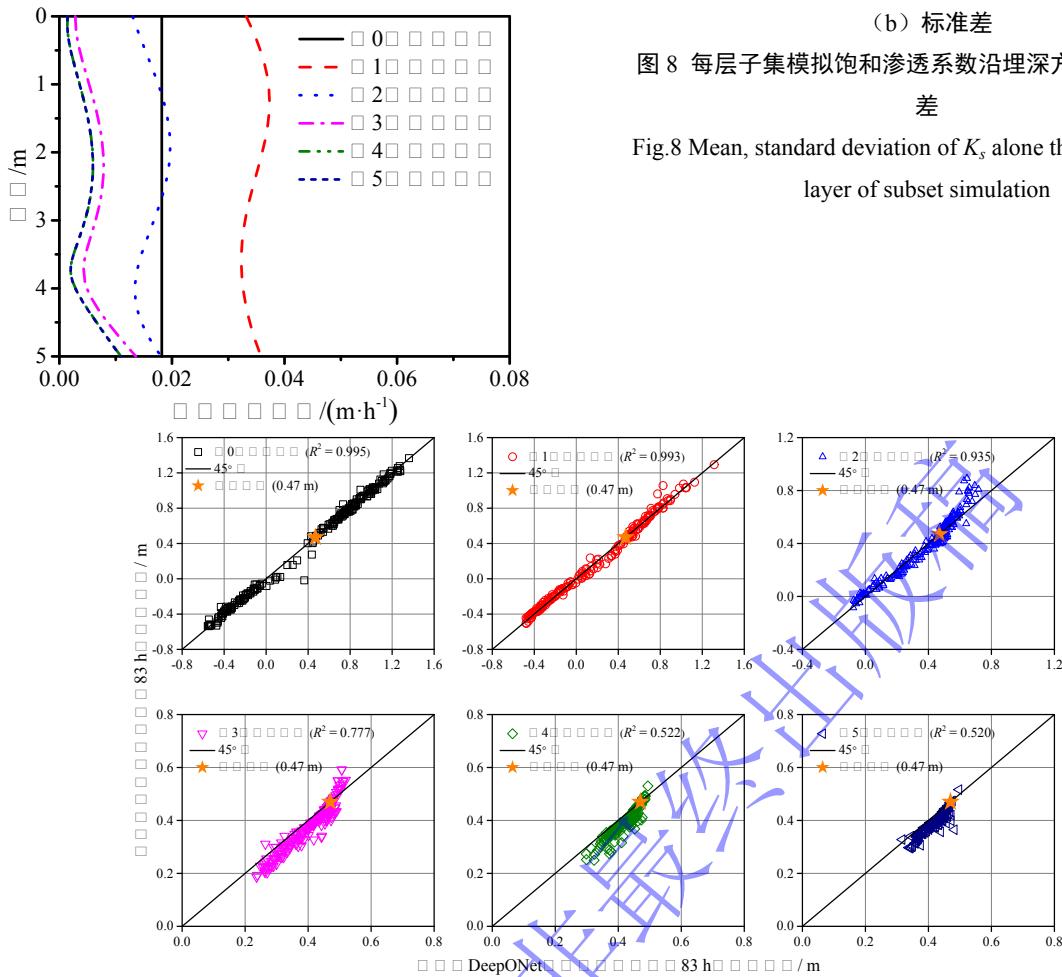


图 9 第 83 h 不同层子集模拟预训练 DeepONet 模型预测的孔压水头值与数值解的比较

Fig.9 Comparison of the predicted pressure head values at the 83rd hour obtained by the pre-trained DeepONet model for different subset simulation layers with numerical solutions

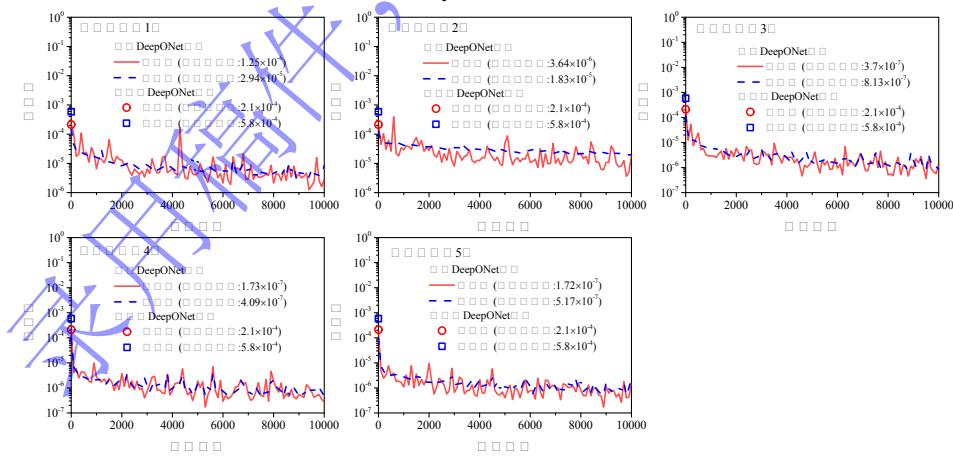


图 10 不同层子集模拟微调 DeepONet 模型的损失值随迭代次数的变化曲线图

Fig.10 Variation of loss values of the fine-tuned DeepONet model for different subset simulation layers with the number of epochs

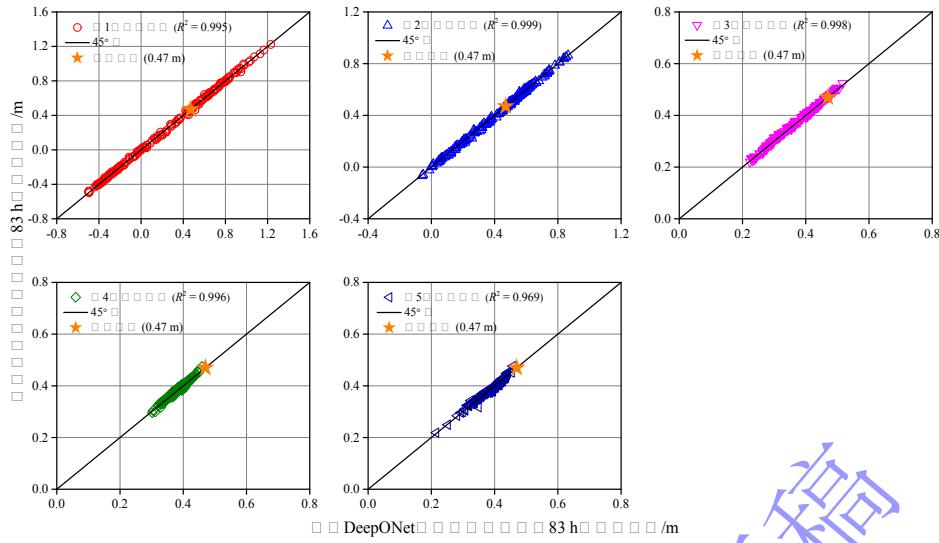


图 11 第 83 h 不同层子集模拟微调 DeepONet 模型预测的孔压水头值与数值解的比较

Fig.11 Comparison of the predicted pressure head values at the 83rd hour obtained by the fine-tuned DeepONet model for different subset simulation layers with numerical solutions

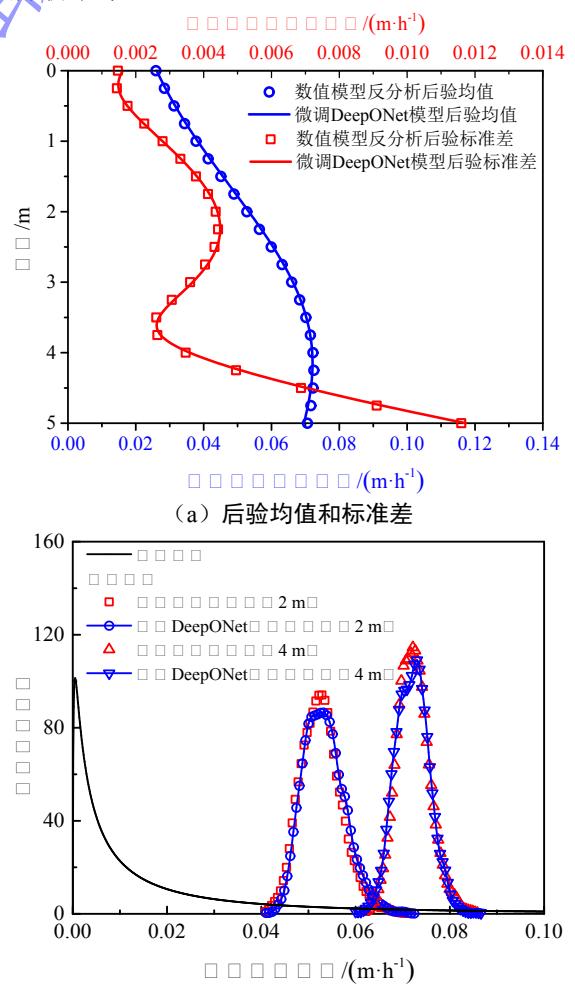
图 10 显示了各子集模拟层微调 DeepONet 模型的损失函数收敛曲线。由于微调以预训练模型为初始条件, 图 10 中预训练模型的最小训练损失 (红色圆形) 和测试损失 (蓝色方形) 均出现在迭代次数为 0 处。此外需要说明的是, 微调 DeepONet 模型的性能提升主要源于后验样本的分布适应性, 而非单纯样本数量增加。随着各层新样本的加入, 损失函数值从预训练阶段的  $10^{-4}$  量级降至  $10^{-5} \sim 10^{-7}$  量级, 表明微调过程有效提升了模型对新样本分布的适应性, 使其预测结果更逼近真实值, 从而增强后续子集模拟的预测精度与外推鲁棒性。

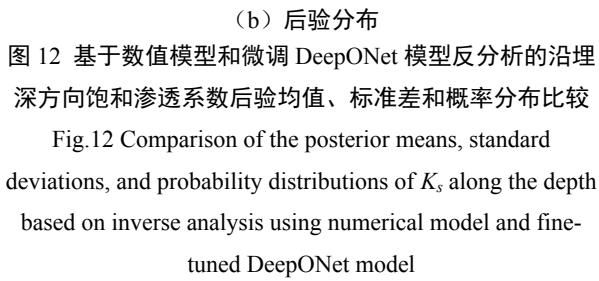
图 11 进一步对比了微调 DeepONet 模型与数值模型基于各子集模拟层 200 组种子样本预测的第 83 h 孔压水头值与数值模拟参考值。结果显示, 第 1 至 5 层子集模拟的  $R^2$  均大于 0.95, 微调 DeepONet 模型在各个子集模拟层的预测值与数值模型参考值高度一致。

### 2.3 基于微调 DeepONet 模型的贝叶斯反分析结果

图 12 (a) 比较了基于数值模型和微调 DeepONet 模型贝叶斯反分析得到的  $K_s$  沿埋深方向的后验均值和标准差。结果显示, 两者得到的后验均值和标准差基本吻合。图 12 (b) 进一步比较了埋深 2 m 和 4 m 处使用数值模型和微调 DeepONet 模型贝叶斯反分析得到的  $K_s$  后验概率密度函数, 两种方法结果非常接近。这表明使用微调 DeepONet 模型替代数值模型进行参数贝叶斯反分析的结果精度较高。需要指出的是, 数值模型反分析总耗时为 18,158 s, 而微调 DeepONet

模型的核心反分析过程仅耗时 49 s。即使计入模型构建耗时 (样本获取的耗时 1,004 s 与模型训练的耗时 496 s), 提出方法的总耗时 (1,549 s) 仍明显低于数值方法耗时。表明本文方法采用微调 DeepONet 模型显著提升了非饱和边坡参数贝叶斯反分析效率。





### 3 结论

为利用现场时序监测数据推求非饱和边坡参数后验分布, 本文提出了基于微调 DeepONet 模型的贝叶斯反分析方法, 并通过香港某边坡案例验证了提出方法的有效性。主要结论如下:

(1) DeepONet 模型能够在统一框架下快速预测所有时间步上的边坡孔压水头, 避免为每个时间步单独构建代理模型, 可有效替代数值模型进行参数贝叶斯反分析, 提高反分析效率。

(2) 基于参数先验信息构建的预训练 DeepONet 模型在预测后验分布时会发生性能退化, 从而影响贝叶斯反分析精度。相比之下, 本文提出的微调 DeepONet 模型对参数先验和后验分布均能保持良好预测性能, 因此可获得精度更高的贝叶斯反分析结果。

(3) 本文额外使用了各子集模拟层样本对预训练 DeepONet 模型进行微调, 较微调前模型计算成本有所增加。为进一步提升贝叶斯反分析效率, 未来可发展更高效的 DeepONet 模型微调方法。

### 参考文献:

- [1] FROUDE M J, PETLEY D N. Global fatal landslide occurrence from 2004 to 2016[J]. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2018, **18**(8): 2161-2181.
- [2] SANTOSO A M, PHOON K K, QUEK S T. Effects of soil spatial variability on rainfall-induced landslides[J]. *Computers & Structures*, 2011, **89**(11): 893-900.
- [3] FREDLUND D G, FREDLUND M D. Application of 'estimation procedures' in unsaturated soil mechanics[J]. *Geosciences*, 2020, **10**(9): 364.
- [4] YANG H Q, ZHANG L. Bayesian back analysis of unsaturated hydraulic parameters for rainfall-induced slope failure: A review[J]. *Earth-Science Reviews*, 2024, **251**: 104714.
- [5] 吴芳, 张璐璐, 郑文棠, 等. 基于随机多项式展开的流固耦合非饱和土坡概率反分析[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(12): 2215-2222. (WU Fang, ZHANG Lu-lu, ZHENG Wen-tang, et al. Probabilistic back analysis method for unsaturated soil slopes with fluid-solid coupling process based on polynomial chaos expansion [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, **40**(12): 2215-2222. (in Chinese))
- [6] 刘亚栋, 刘贤, 黎学优, 等. 基于强度折减采样与高斯过程回归的空间变异土坡自适应可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2024, **46**(5): 978-987. (LIU Ya-dong, LIU Xian, LI Xue-you, et al. Adaptive reliability analysis of spatially variable soil slopes using strength reduction sampling and Gaussian process regression [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2024, **46**(5): 978-987. (in Chinese))
- [7] YU H, WANG X, REN B, et al. An efficient Bayesian inversion method for seepage parameters using a data-driven error model and an ensemble of surrogates considering the interactions between prediction performance indicators[J]. *Journal of Hydrology*, 2022, **604**: 127235.
- [8] 满俊, 张江江, 郑强, 等. 基于数据同化的土壤水力参数反演方法: 研究进展与展望[J]. 土壤学报, 2023, **60**(6): 1543-1554. (MAN Jun, ZHANG Jiang-jiang, ZHENG Qiang, et al. Data assimilation for soil hydraulic parameter estimation: progress and perspectives[J]. *Acta Pedologica Sinica*, 2023, **60**(6): 1543-1554. (in Chinese))
- [9] ZHU M, ZHANG H, JIAO A, et al. Reliable extrapolation of deep neural operators informed by physics or sparse observations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, **412**: 116064.
- [10] LU L, JIN P, PANG G, et al. Learning nonlinear operators via DeepONet based on the universal approximation theorem of operators[J]. *Nature machine intelligence*, 2021, **3**(3): 218-229.
- [11] STRAUB D, PAPAIOANNOU I. Bayesian updating with structural reliability methods[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2015, **141**(3): 04014134.
- [12] RICHARDS L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. *Physics*, 1931, **1**(5): 318-333.
- [13] VAN GENUCHTEN M Th. A close-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, **44**(5): 892-898.
- [14] MUALEM Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. *Water Resources Research*, 1976, **12**(3): 513-522.
- [15] 蒋水华, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑自相关函数影响的边坡可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(3): 508-518. (JIANG Shui-hua, LI Dian-qing, Zhou Chuang-bing, et al. Slope reliability analysis considering effect of autocorrelation functions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(3): 508-518. (in Chinese))
- [16] BETZ W, PAPAIOANNOU I, BECK J L, et al. Bayesian inference with subset simulation: Strategies and improvements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **331**: 72-93.

- [17] 左自波, 张璐璐, 程演, 等. 基于 MCMC 法的非饱和土渗流参数随机反分析[J]. 岩土力学, 2013, 34(8): 2393-2400. (ZUO Zi-bo ZHANG Lu-lu, CHEN Yan, et al. Probabilistic back analysis of unsaturated soil seepage parameters based on Markov chain Monte Carlo method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(8): 2393-2400. (in Chinese)).
- [18] PAPAIOANNOU I, BETZ W, ZWIRGLMAIER K, et al. MCMC algorithms for subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2015, 41: 89-103.
- [19] EVANS N C, LAM J S. Tung Chung east natural terrain study area ground movement and groundwater monitoring equipment and preliminary results[M]. Geotechnical Engineering Office, Civil Engineering Department, 2003.
- [20] ŠIMŮNEK J, BRUNETTI G, JACQUES D, et al. Developments and applications of the HYDRUS computer software packages since 2016[J]. Vadose Zone Journal, 2024: e20310.
- [21] CARSEL R F, PARRISH R S. Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics[J]. Water Resources Research, 1988, 24(5): 755-769.
- [22] LIU X, WANG Y. Bayesian selection of slope hydraulic model and identification of model parameters using monitoring data and subset simulation[J]. Computers and Geotechnics, 2021, 139: 104428.
- [23] LU L, MENG X, CAI S, et al. A comprehensive and fair comparison of two neural operators (with practical extensions) based on FAIR data[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 393: 114778.
- [24] LAN P, HUANG J, SU J, et al. A rapid unsaturated infiltration prediction method for slope stability analysis considering uncertainties: Deep operator networks[J]. Engineering Geology, 2025, 347: 107886.