

# 不同固结路径下钙质砂临界状态演化与本构模拟

王恒<sup>1, 2, 3</sup>, 林彬<sup>1, 3</sup>, 王刚<sup>1, 3</sup>, 陈军浩<sup>1, 3</sup>

(1. 福建理工大学地下工程福建省高校重点实验室, 福建 福州 350118; 2. 中建海峡建设发展有限公司, 福建 福州 350015;  
3. 福建理工大学土木工程学院, 福建 福州 350118)

**摘要:** 钙质砂是我国南海岛礁建设的主要地基材料, 建筑施工中地基将受到不同固结路径的荷载作用, 研究不同固结路径对钙质砂临界状态演化的影响是建立钙质砂本构模型的迫切需求。本研究通过开展4种相对密实度和4种固结路径下的三轴固结排水剪切试验, 探究钙质砂颗粒破碎与临界状态内在联系随固结路径的演化规律。研究表明: 随着有效主应力比由1.00减小至0.45, 钙质砂剪切后的颗粒相对破碎率降低, 对应的临界孔隙比增加, 临界状态线斜率降低, 即临界状态线呈现逆时针旋转趋势。同时, 建立了不同固结路径下有效主应力比-相对破碎率-临界孔隙比的定量关系式, 计算得到临界孔隙比预测值约为实测值的0.8-1.2倍。将其引入砂土状态相关剪胀方程, 提出考虑固结路径影响的钙质砂状态相关的本构模型。该模型能够准确描述钙质砂在不同固结应力路径、不同密实度和不同应力水平下的剪切变形特性。不同固结路径和固结压力引起的颗粒破碎程度差异, 是导致剪切后钙质砂临界状态线发生旋转的主要原因。

**关键词:** 钙质砂; 应力路径; 临界状态; 颗粒破碎; 本构模拟

中图分类号: TU411

文献标识码: A

文章编号:

作者简介: 王恒(1989—), 男, 博士, 副教授, 主要从事软土地基处理, 数值模拟等方面的研究。E-mail: whdndx@fjut.edu.cn。

## Study on the evolution of critical state and **constitutive modeling** for calcareous sand under anisotropic consolidation paths

WANG Heng<sup>1, 2, 3</sup>, LIN Bin<sup>1, 3</sup>, WANG Gang<sup>1, 3</sup>, CHEN Jun-hao<sup>1, 3</sup>

(1. Key Laboratory of Underground Engineering, Fujian Province University, Fujian University of Technology, Fuzhou, Fujian 350118, China; 2. CSCEC Strait Construction and Development Co., Ltd., Fuzhou, Fujian 350015, China; 3. School of Civil Engineering, Fujian University of Technology, Fuzhou, Fujian 350118, China)

**Abstract:** Calcareous sand is the primary foundation material used for reef construction in the South China Sea, where it is subjected to construction loads along various consolidation stress paths. Understanding the critical state evolution of calcareous sand under various consolidation paths is essential for developing an accurate constitutive model. By conducting triaxial consolidation drained shear tests with four relative densities and four consolidation paths, the intrinsic relationship between particle breakage and the evolution of critical state line under varying consolidation stress paths is investigated. The results indicate that, as the effective principal stress ratio decreases from 1.00 to 0.45, the relative particle breakage rate of calcareous sand decreases, the corresponding critical state void ratio increases, and the slope of the critical state line decreases, indicating a counterclockwise rotation trend. Meanwhile, a quantitative relationship between the effective principal stress ratio, relative breakage rate, and critical state void ratio under different consolidation paths was established. The predicted values of the critical state void ratio were approximately 0.8 to 1.2 times the measured values. This relationship was incorporated into the state-dependent dilatancy equation for sandy soils, enabling the development of a state-dependent constitutive model for calcareous sand that accounts for the influence of consolidation paths. The proposed model accurately describes the shear characteristics of calcareous sand under varying consolidation paths, densities, and stress levels. Differences in particle breakage caused by varying consolidation paths and consolidation pressures are the primary reason for the rotation of the critical state line in calcareous sand after shearing.

**Key words:** calcareous sand; stress path; critical state; particle breakage; **constitutive modeling**

基金项目: 国家自然科学基金项目(No. 41672278);

福建省自然科学基金(No. 2022J01925, No. 2022J05186)

收稿日期:

\*通讯作者(E-mail: chjhtougao@163.com)

## 0 引言

在建设海洋强国的国家战略指引下, 钙质砂成为我国南海岛礁建设的主要吹填地基材料, 具有孔隙率高和容易破碎的特性<sup>[1-2]</sup>。不同建筑荷载作用下的钙质砂地基的承载力是工程设计中最为关注的问题, 钙质砂地基的承载力与临界状态直接相关<sup>[3]</sup>, 展开不同固结路径下钙质砂临界状态演化研究, 是岛礁基础设施建设的迫切需求。

临界状态定义为土体在剪应变 ( $\varepsilon_q$ ) 持续增加过程中, 达到恒定平均有效应力 ( $p'$ )、恒定剪应力 ( $q$ ) 和恒定体积应变 ( $\varepsilon_v$ ) 的状态<sup>[4]</sup>, 即  $\partial p''/\partial \varepsilon_q = \partial q/\partial \varepsilon_q = \partial \varepsilon_v/\partial \varepsilon_q = 0$ 。在常规应力水平工况下, Been 等<sup>[5]</sup>指出石英砂的临界状态与应力路径和初始密实度无关; Li 等<sup>[6]</sup>认为石英砂的临界状态线 (Critical State Line, CL) 在  $p'-q$  平面上为过原点的直线, 在  $e-(p''/P_a)^{\xi}$  平面上呈线性变化; Cai 等<sup>[7]</sup>认为石英砂的临界状态与排水条件无关; 张敏等<sup>[8]</sup>研究表明单一应力路径对密砂临界状态线的线性特性没有影响。但是, 在较大外荷载作用下石英砂将产生颗粒破碎<sup>[9]</sup>, 导致石英砂临界状态线在压缩平面中向下移动<sup>[10]</sup>。与形状相对规则、颗粒坚硬的陆源石英砂相比, 外荷载下钙质砂颗粒破碎率 ( $B_p$ ) 往往达到 18%<sup>[11]</sup>, 远大于石英砂颗粒破碎程度。将基于石英砂临界状态研究成果提出的强度参数取值方法应用于钙质砂地基时, 将高估钙质砂地基承载力。

针对钙质砂颗粒破碎与临界状态变化的内在联系, 已有研究表明钙质砂临界状态线位置将随着颗粒破碎发生下移<sup>[12]</sup>, 不同级配时钙质砂临界状态线为相互平行直线<sup>[13]</sup>。临界状态应力比 ( $M_c$ ) 与剪切过程中的排水条件直接相关<sup>[14]</sup>, 随着初始密实度增加而增加<sup>[15]</sup>。同时, 研究者也建立了与相对颗粒破碎率<sup>[16]</sup>或破碎应力<sup>[17]</sup>相关的临界状态线数学模型。但是, 上述研究成果是基于一维固结试验或者三轴等向固结试验工况, 忽略了固结路径的影响。钙质砂临界状态线变化依赖于具体试验的应力状态和应力路径<sup>[18]</sup>, Peng 等<sup>[19]</sup>探讨了等轴向应力、等围压、等平均主应力应力路径下的临界状态线变化规律; He 等<sup>[20]</sup>对比了不同应力路径工况下临界状态线差异。实际施工过程中, 地基土的应力路径往往表现为等固结应力比变化<sup>[21]</sup>, 即  $K < 1.00$ 。研究等固结应力比工况下颗粒破碎与临界状态演化规律, 可为钙质砂地基承载力计算提供重要的试验依据。

本研究拟开展不同固结路径下钙质砂的三轴排水剪切试验, 探究不同固结路径下钙质砂的颗粒破碎特征与临界状态演化内在联系, 提出考虑固结路径影

响的临界状态线数学表达式和本构模型, 通过与实测数据进行的对比, 验证其有效性。

## 1 钙质砂材料与试验方法

### 1.1 钙质砂样

试样取自南海某岛礁, 为未胶结散粒。颗粒曲线光滑, 颗粒粒径分布连续, 颗粒粒径均小于 2mm (图 1)。根据我国《土工试验规程》(SL237-1999) 标准, 表 1 显示, 不均匀系数为 3.346, 曲率系数为 1.131, 试样级配不良。试验中颗粒大于 0.25mm 的颗粒质量约为总质量的 90%, 为珊瑚中砂。

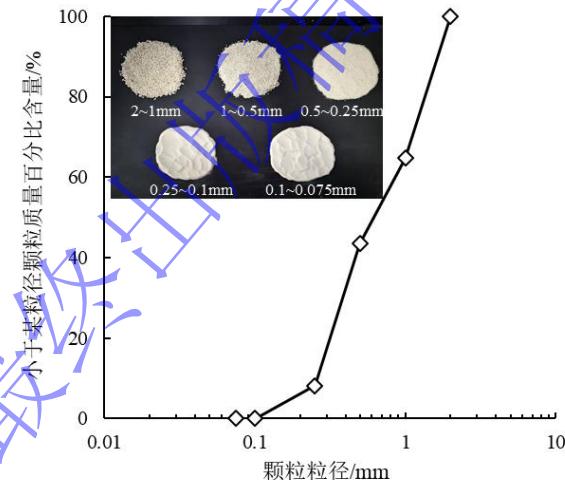


图 1 钙质砂的粒径分布曲线

Fig. 1 Particle size distribution curves of calcareous sand

表 1 钙质砂样基本物理参数

Table 1 Fundamental physical parameters of calcareous sand specimens

最小干密度 $\rho_{min}$ $/(g \cdot cm^{-3})$	最大干密度 $\rho_{max}$ $/(g \cdot cm^{-3})$	土体相 对密度 $G_s$	有效粒 径 $d_{10}$ $/ mm$	中值粒 径 $d_{30}$ $/ mm$	限制粒 径 $d_{60}$ $/ mm$	不均匀 系数 $C_u$	曲率 系数 $C_c$
1.16	1.47	2.77	0.601	0.722	0.789	1.313	1.099

### 1.2 试验方案

研究采用岩土实验室的 GDS 三轴应力路径加载系统, 轴向位移最大量程为 25mm, 轴向荷载最大量程为 8kN, 围压和反压控制系统最大量程为 3MPa。设定等向固结工况 ( $K=1.00$ ) 作为对比基准工况, 鉴于轴向荷载传感器保护量程的限制, 经过试算选取  $K=0.45$  作为试验的下限值, 另外选定  $K=0.60$  和  $0.70$  作为试验工况<sup>[21]</sup>, 如图 2 所示。表 2 为详细的试验方案, 包括 4 个相对密实度 30%、50%、70% 和 90%, 以及 5 个平均有效应力 100、200、400、800 和 1000kPa, 包含两个对照组, 共计进行了 160 组试验。其中,  $\sigma_1'$  和  $\sigma_3'$  分别为有效竖向压力和有效围压, 有效主应力比为  $K=\sigma_3'/\sigma_1'$ , 固结应力比为  $\eta=q/p'$ , 平均有效应力为  $p'=(\sigma_1'+2\sigma_3')/3$ , 偏应力为  $q=\sigma_1'-\sigma_3'$ 。在相同平均有效

应力工况下, 根据  $K$  值变化, 设定不同  $\sigma_1'$  和  $\sigma_3'$ 。

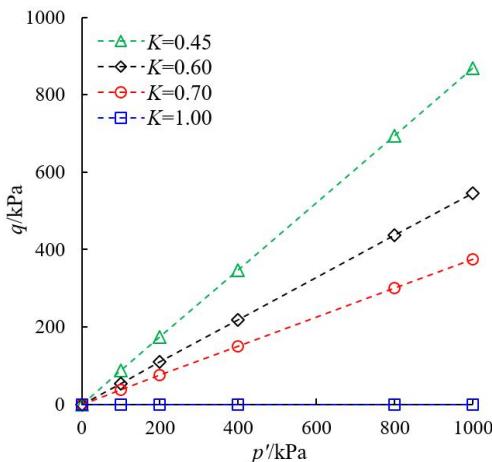


图 2  $p'$ - $q$  平面内的应力路径

Fig. 2 Stress paths in  $p'$ - $q$  plane

### 1.3 试验方法

试验分为筛分、制样、试验和颗粒破碎测定 4 个步骤。

(1) 筛分: 为保证每次试样与初始级配一致。通过振筛机处理原始砂样, 筛出不同粒径的砂粒<sup>[16]</sup>。再根据图 1 的颗粒级配曲线制样。

(2) 制样: 分四次将砂粒填入橡胶模。当样品的相对密度较小 ( $D_r=30\%$ ) 时, 轻击对开膜侧壁即可达到试样要求高度。当样品的相对密实度较大时 (例如  $D_r=90\%$ ), 需要辅以压样器静压, 并振动锤击对开模侧壁制样, 试样的直径和高度分别为 39.1mm×80mm。随后采用通入  $\text{CO}_2$  和水头饱和处理试样, 最后采用反压饱和方法, 要求  $B$  值达到 0.96 以上。为考虑制样阶段颗粒破碎的影响, 采用 5 组平行样标定制样过程中的最大相对破碎率。

(3) 试验: 当孔隙水压力消散为 0kPa, 体变达到稳定时视为固结过程结束。随后, 进行排水剪切试验, 剪切速率设定为 0.08mm/min<sup>[22]</sup>。为确保达到临界状态, 当轴向应变达 30% 时停止试验。

(4) 颗粒破碎测定: 每组剪切试验结束后, 烘干试样并使用筛分法测定颗粒粒径变化。

## 2 颗粒破碎与临界孔隙比

图 3 为典型  $D_r=30\%$  和  $p'=800\text{kPa}$  工况下的钙质砂样固结完成后和剪切完成后的颗粒级配曲线。图 3(a) 显示固结完成后  $K$  值越小的颗粒级配曲线越偏离原始颗粒级配曲线。此外, 从图 3(b) 可以看出, 剪切完成后  $K$  值越小的颗粒级配曲线越靠近原始颗粒级配曲线。例如, 在  $D_r=30\%$  和  $p'=800\text{kPa}$  的工况下, 当  $K$  从 0.45 增加至 1.00 时, 小于 0.5mm 粒径颗粒所占质

量百分比增加约 3%, 同样地, 对于小于 1.0mm 粒径的颗粒, 其所占质量百分比相应提高约 5%。

表 2 不同固结路径试验方案

Table 2 Different consolidation path test program

$D_r/\%$	$K$	$\eta$	固结压力终止值/kPa			
			$p'$	$q$	$\sigma_3'$	$\sigma_1'$
30%	1.00	0	100	0	100	100
			200	0	200	200
			400	0	400	400
			800	0	800	800
50%	0.70	0.38	1000	0	1000	1000
			100	38	88	125
			200	75	175	250
			400	150	350	500
70%	0.70	0.38	800	300	700	1000
			1000	375	875	1250
			100	55	82	136
			200	109	164	273
90%	0.60	0.55	400	218	327	545
			800	436	655	1091
			1000	545	818	1364
			100	87	71	158
30%	0.45	0.87	200	174	142	316
			400	347	284	632
			800	695	568	1263
			1000	868	711	1579

为探究不同固结路径下钙质砂颗粒破碎对临界状态的影响, 选取临界孔隙比 ( $e_c$ ) 为分析指标。同时, 引入 Hardin<sup>[23]</sup>提出的相对破碎率  $B_r=B/B_p$  概念, 其中  $B_r$  为试验前后整体破碎势,  $B_p$  为初始破碎势。将不同试验阶段相对破碎率与平均有效应力变化的关系曲线绘制于图 4。固结阶段和剪切完成后的  $B_r$  均由平行独立试验确定, 将剪切完成后的  $B_r$  减去固结阶段的  $B_r$  得到剪切阶段的  $B_r$ 。需要指出的是, 制样阶段  $D_r=30\%, 50\%, 70\%$  和  $90\%$  试样对应的最大  $B_r$  分别为 0, 0.086%, 0.155% 和 0.183%, 后续阶段的相对破碎率均扣除了制样阶段的相对破碎率。

固结阶段偏应力的存在导致颗粒破碎程度越高,  $K$  值越小的  $B_r-p'$  关系曲线位于  $K$  值越大的  $B_r-p'$  关系曲线上方。固结后  $K$  值越小试样颗粒破碎程度高, 小颗粒填充到孔隙中, 增大了颗粒间接触面积, 导致剪切过程中颗粒的平均接触应力反而降低, 剪切完成后的颗粒破碎程度也随之下降, 即剪切完成后  $K$  值越小的  $B_r-p'$  关系曲线反而位于  $K$  值越大的  $B_r-p'$  关系曲线下方。

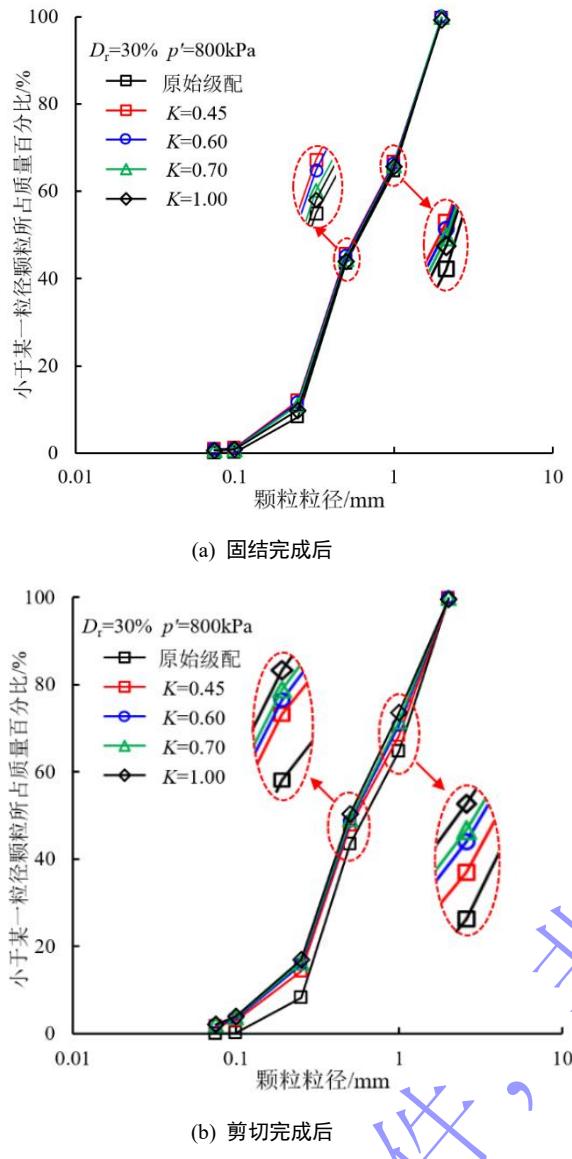


图3 典型钙质砂颗粒级配曲线

Fig. 3 Typical gradation curves of calcareous sand

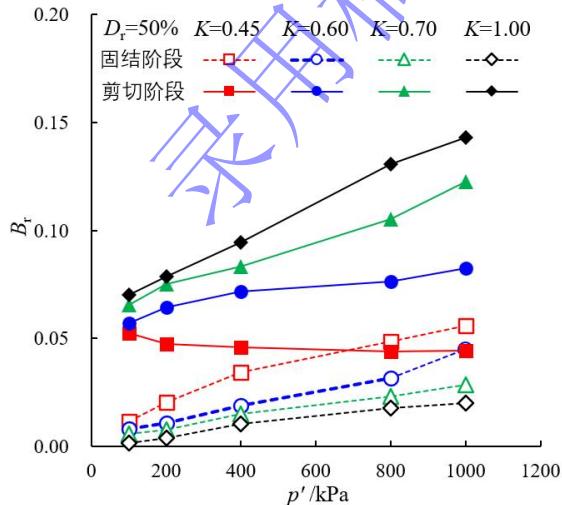


图4 固结和剪切阶段的颗粒破碎率与平均有效应力关系曲线

Fig. 4 Relationship between relative breakage potential and mean effective stress under consolidation stage and shearing stage

图5展示了相对密实度为50%工况下剪切完成后的相对破碎率与平均有效应力变化关系曲线。图中显示在 $p'=100\text{ kPa}$ 时,不同 $K$ 值的相对破碎率介于0.064至0.074之间。但是,当 $p'=1000\text{ kPa}$ 时,  $K=1.00$ 对应的相对破碎率为0.163,远大于 $K=0.45$ 对应的相对破碎率0.109,即剪切完成后 $K$ 值越大的土样对应的 $B_r$ 越大。

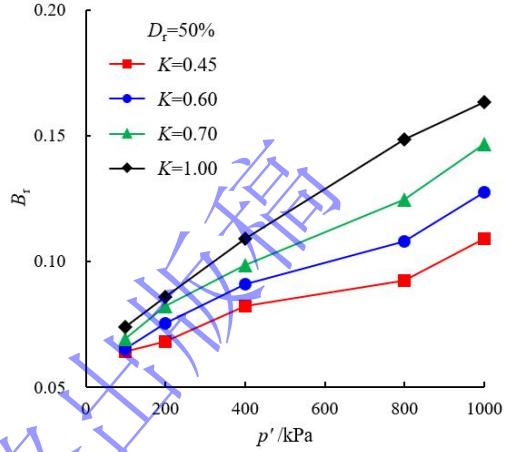


图5 剪切完成后颗粒破碎率与平均有效应力关系曲线

Fig. 5 Relationship between relative breakage potential and mean effective stress after shearing stage

图6为临界孔隙比随相对破碎率的变化关系曲线,随着 $B_r$ 增大,  $e_c$ 呈非线性减小趋势。在 $D_r=70\%$ 的工况下,随着 $K$ 值从1.00减少至0.45,  $p'=100\text{ kPa}$ 对应 $e_c$ 增加0.005,  $p'=1000\text{ kPa}$ 对应 $e_c$ 增加0.078,  $D_r=90\%$ 的试验结果与 $D_r=70\%$ 的工况类似。在相同平均有效应力工况下,  $e_c$ 随着 $K$ 值的减小而增大;随着平均有效应力的增大,  $K$ 值对 $e_c$ 的影响变得更加显著。在相同密实度和平均有效应力工况下,不同固结路径将导致剪切完成后的颗粒破碎差异,最终影响临界孔隙比的变化。因此,为后续建立考虑固结应力路径影响的钙质砂临界状态线和本构模型,需要提出以 $K$ 作为计算参数的钙质砂颗粒破碎数学表达式。

本研究在蔡正银等<sup>[16]</sup>提出的颗粒破碎数学表达式的基础上,将 $K$ 作为计算参数,提出采用公式(1)计算不同固结应力路径下钙质砂相对破碎率。其中,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 和 $\delta$ 为材料参数,与钙质砂的颗粒级配和颗粒形状等直接相关。收集已有文献剪切完成后钙质砂颗粒破碎数据,结合本文试验数据,共11种钙质砂,209组试样,采用公式(1)并结合最小二乘法进行数据拟合,将得到的材料参数列于表3。拟合结果显示材料参数 $\alpha$ 取值介于0.065至0.317,  $\beta$ 取值介于0.042至0.210,  $\gamma$ 取值介于0.011至0.035之间,  $\delta$ 取值介于-0.001至-0.013之间。

$$B_r = \alpha - \beta e_0 + (\gamma K + \delta)(p' / P_a) \quad (1)$$

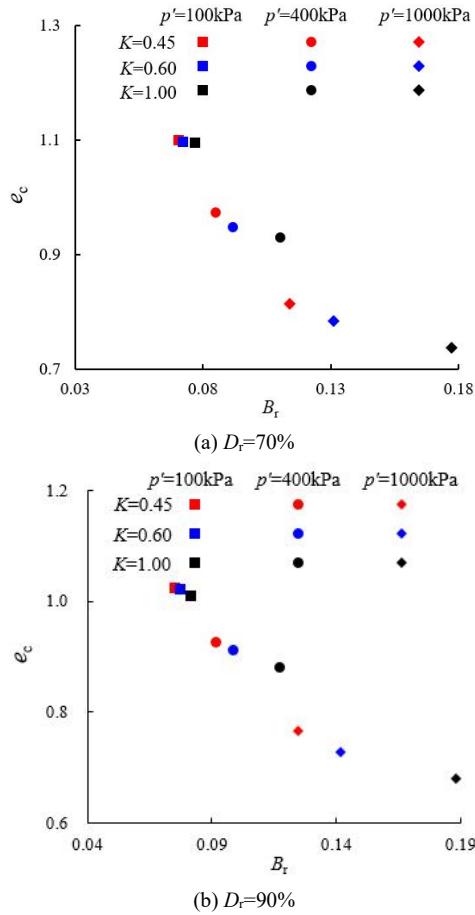


图 6 临界孔隙比与颗粒相对破碎率的关系

Fig. 6 Relationship between critical void ratio and relative breakage potential

图 7 所示为通过公式 (1) 得到相对破碎率计算值 ( $B_{r\text{-计算}}$ ) 与相对破碎率实测值 ( $B_{r\text{-实测}}$ ) 的对比结果。从图中可以看出,  $B_{r\text{-计算}}$  与  $B_{r\text{-实测}}$  的比值介于 0.85 至 1.15

之间, 计算精度较高, 公式 (1) 能够用于定量计算不同固结应力路径下剪切后的钙质砂相对破碎率。

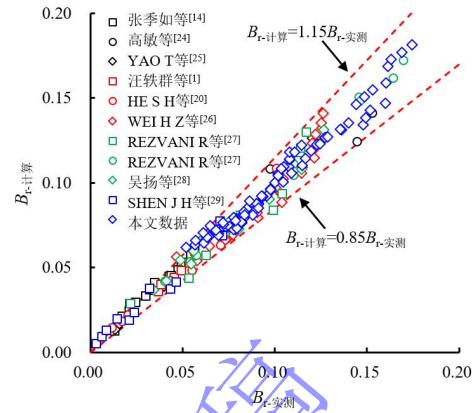


图 7 相对破碎率计算值与实测值对比

Fig. 7 Comparison of relative breakage potential between calculated results and measured data

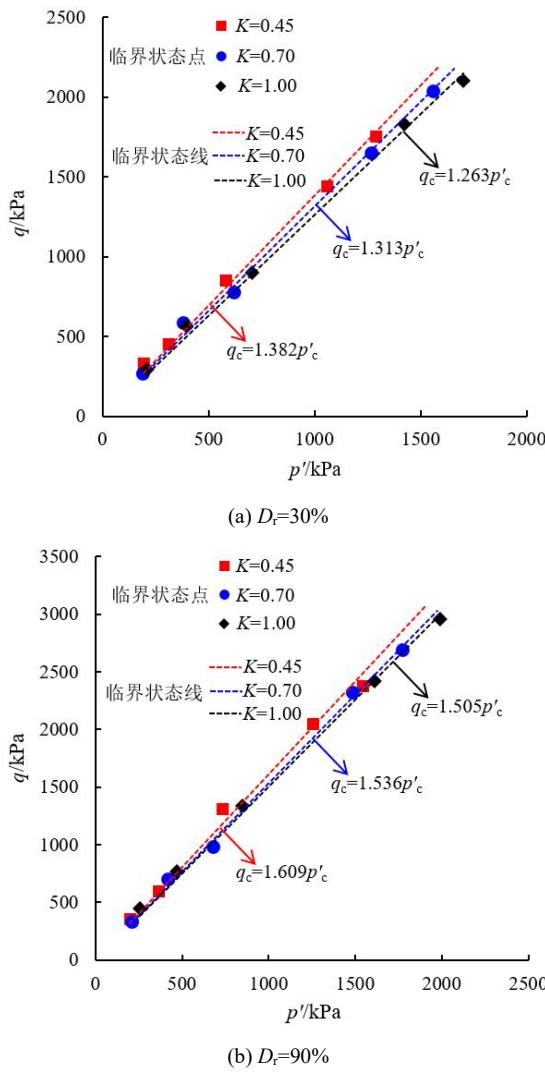
### 3 不同固结应力路径下的临界状态线

图 8 为  $q-p'$  平面上不同固结应力路径和密实度下钙质砂的典型临界状态线, CL 的斜率为临界状态应力比 ( $M_c = q/p'_c$ )。从图可以看出, 对于  $D_r=30\%$  的工况, 当  $K$  值由 0.45 增加至 1.00 时,  $M_c$  从 1.382 减小至 1.263。对于  $D_r=90\%$  的工况, 当  $K=0.45$ 、0.70 和 1.00 时, 对应的  $M_c$  分别为 1.609、1.536 和 1.505, 即随着  $K$  值增加,  $M_c$  呈减小趋势, 固结应力路径变化对  $q-p'$  平面上 CL 的斜率产生了显著的影响。同时, 当  $K=0.45$  时,  $D_r$  为 30% 和 90% 时  $M_c$  分别为 1.382 和 1.609,  $M_c$  随着相对密实度的增大而增大, 这与已有的试验结果一致<sup>[15]</sup>。

表 3 钙质砂基本物理性质及材料参数

Table 3 Fundamental physical properties of calcareous sand specimens and material parameters

土样名称	初始孔隙比 $e_0$	固结路径 $K$	相对破碎率 $B_r$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	试验组数	数据来源
南海钙质砂	0.93~1.24	0.45~1.00	0.052~0.175	0.109	0.042	0.012	-0.001	80	本文
南海钙质砂	0.87~0.98	1.00	0.015~0.064	0.078	0.075	0.013	-0.005	18	张季如等 <sup>[14]</sup>
南海钙质砂	1.00	0.50~1.00	0.047~0.270	0.229	0.156	0.035	-0.001	9	高敏等 <sup>[24]</sup>
南海珊瑚砂	1.21	1.00	0.014~0.244	0.212	0.168	0.024	-0.009	7	YAO T 等 <sup>[25]</sup>
南海钙质砂	1.22	1.00	0.039~0.054	0.222	0.161	0.016	-0.012	5	汪铁群等 <sup>[1]</sup>
南海珊瑚砂	0.91~0.98	0.22~1.00	0.010~0.101	0.215	0.210	0.011	-0.001	9	HE S H 等 <sup>[20]</sup>
南海珊瑚砂	0.67~1.07	1.00	0.061~0.139	0.099	0.054	0.013	-0.006	30	WEI H Z 等 <sup>[26]</sup>
Hormuz 岛 钙质砂	0.67~0.86	1.00	0.010~0.120	0.078	0.086	0.027	-0.008	12	REZVANI R 等 <sup>[27]</sup>
Bushir 港钙 质砂	0.75~0.95	1.00	0.022~0.170	0.122	0.117	0.030	-0.007	12	
南海珊瑚砂	0.99~1.29	1.00	0.030~0.150	0.183	0.117	0.017	-0.011	15	吴扬等 <sup>[28]</sup>
南海钙质砂	0.83~0.95	1.00	0.012~0.054	0.065	0.073	0.031	-0.013	12	SHEN J H 等 <sup>[29]</sup>

图 8 钙质砂在  $q-p'$  平面上的临界状态线Fig. 8 Critical state lines of calcareous sand in  $q-p'$  planes

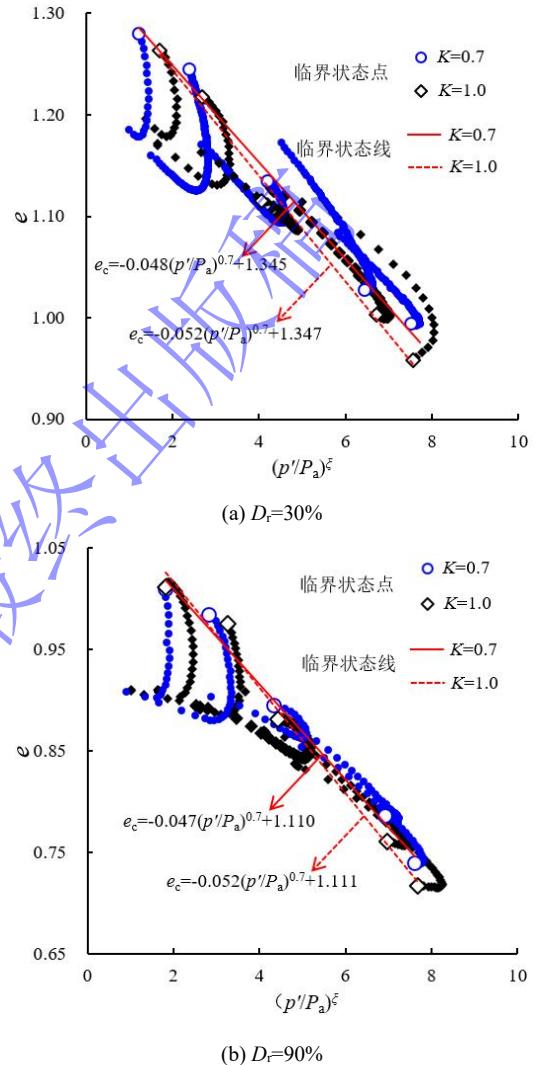
Li 等<sup>[6]</sup>研究发现,对于常规石英砂,其临界状态线在  $e-\lg p'$  平面上不是直线,但在  $e-(p'/P_a)^\xi$  平面上可用一条直线近似表示,其表达式:

$$e_c = e_r - \lambda_c (p'/P_a)^\xi \quad (2)$$

其中,  $\xi$  为材料参数,对于砂土来说,  $\xi$  取值为 0.6-0.8<sup>[6]</sup>,本文中  $\xi$  取为 0.7;  $P_a$  为大气压强;  $\lambda_c$  代表了在  $e-(p'/P_a)^\xi$  平面上临界状态线的斜率;  $e_r$  为在  $e-(p'/P_a)^\xi$  平面上,  $p'=0$  所对应的临界孔隙比,即临界状态线在  $e-(p'/P_a)^\xi$  平面上的截距。

图 9 为不同固结应力路径下钙质砂样在  $e-p'/P_a$  平面上的临界状态线,图中显示在低应力水平时,有效应力路径初始呈现下降趋势,随后转向上升,达到更大孔隙比,并最终趋于临界状态。需要指出的是,对于  $D_r=30\%$  的工况,当  $K$  值由 0.70 增加至 1.00 时,临界状态线的截距变化并不显著,但临界状态线的斜率从 0.048 增加至 0.052。这表明在较低应力水平工况下,

$K=0.70$  与  $K=1.00$  的临界状态线几乎重合。但是,随着平均有效应力增加至 1000 kPa,相较  $K=1.00$  的临界状态线,  $K=0.70$  的临界状态线呈现了更大幅度的逆时针旋转趋势。 $D_r=90\%$  工况试验得到的规律与  $D_r=30\%$  的工况一致,较高应力水平工况下临界孔隙比的差异是引起临界状态线发生移动和旋转的主要原因<sup>[12]</sup>。

图 9 钙质砂在  $e-(p'/P_a)^\xi$  平面上的临界状态线Fig. 9 Critical state lines of calcareous sand in  $e-(p'/P_a)^\xi$  planes

结合图 6 和图 9 可知,不同固结路径导致颗粒破碎差异是影响钙质砂临界状态线演化的控制因素,工程中开展不同固结路径三轴排水剪切试验非常繁琐和耗时,构建能考虑固结应力路径影响的临界状态线数学表达式和本构模型是实际工程的迫切需求。

## 4 与固结应力路径相关的临界状态线与本构模拟

### 4.1 临界状态线数学表达式

图 10 为不同相对密实度下的在  $e-(p'/P_a)^\xi$  平面上的临界状态线,  $D_r$  较低的钙质砂样临界状态线位于  $D_r$

较高的钙质砂样临界状态线上方。在不同的密实度下, 随着有效主应力比从 1.00 降至 0.45 时, 临界状态线的斜率相应地从 0.052 减少至 0.044。

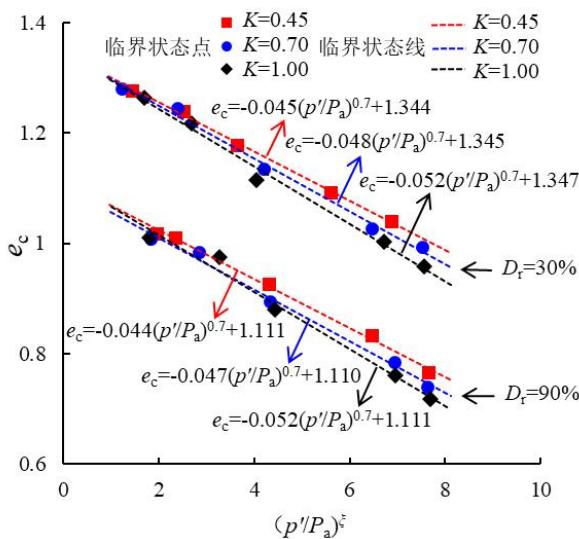


图 10 不同相对密实度下钙质砂在  $e-(p'/P_a)^\xi$  平面上的临界状态线

Fig. 10 Critical state line of calcareous sand in the  $e-p'/P_a$  plane under different relative densities

为构建不同固结应力路径下的临界状态线数学表达式, 引入蔡正银等<sup>[16]</sup>提出的能够考虑颗粒破碎程度的临界状态线表达式:

$$e_c = a - bB_r - \lambda_c (p'/P_a)^\xi \quad (3)$$

其中,  $a$  和  $b$  为材料参数, 对比实测数据, 通过最小二乘法进行数据拟合确定, 本研究中分别取为 1.243 和 0.129。需要指出的是, 该公式是基于等向固结工况 ( $K=1.00$ ) 建立, 没有考虑固结应力路径影响。从图 5 和图 9 中可以发现,  $K$  的变化会影响剪切后颗粒相对破碎率  $B_r$ ,  $\lambda_c$  又与  $K$  高度相关。因此, 经大量

试算, 提出可采用公式 (4) 计算  $\lambda_c$ :

$$\lambda_c = cB_r + d \quad (4)$$

将公式 (4) 代入公式 (3), 得到与相对破碎率  $B_r$  相关的临界孔隙比数学表达式:

$$e_c = a - bB_r - (cB_r + d)(p'/P_a)^\xi \quad (5)$$

其中,  $c$ ,  $d$  为材料参数, 分别取为 0.07 和 0.043。在确定参数  $K$ 、 $e_0$  和  $p'$  后, 即可快速估算  $e_c$ 。为验证上述方法的有效性, 本研究收集了已有文献的大量试验数据, 钙质砂基本物理性质如表 4 所示。图 11 显示, 对于表 4 的所有钙质砂样, 公式 (5) 的临界孔隙比计算值为临界孔隙比实测值的 0.8 至 1.2 倍, 计算精度满足工程需求。

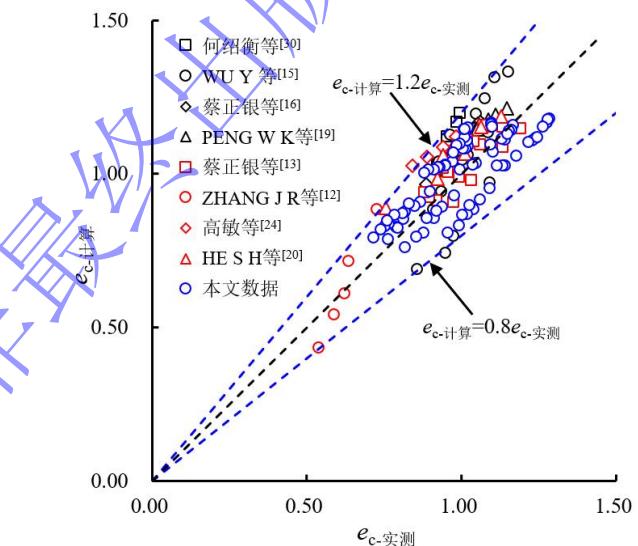


图 11 临界孔隙比计算值与实测值对比

Fig. 11 Comparison of critical void ratios between calculated results and measured data

表 4 钙质砂基本物理性质

Table 4 Basic physical properties of calcareous sand specimens

土样名称	初始孔隙比 $e_0$	固结路径 $K$	相对破碎率 $B_r$	临界孔隙比 $e_c$	试验组数	数据来源
南海西沙群岛钙质砂	0.10	0.40	0.019~0.075	0.923~0.994	4	何绍衡等 <sup>[30]</sup>
南海南沙岛钙质砂	0.99~1.28	1.00	0.055~0.115	0.821~1.151	18	WU Y 等 <sup>[15]</sup>
南海钙质砂	0.93~1.00	1.00	0.019~0.163	0.886~1.060	12	蔡正银等 <sup>[16]</sup>
南海珊瑚砂	0.98	1.00	0.003~0.018	0.924~1.145	10	PENG W K 等 <sup>[19]</sup>
南海钙质砂	0.88~1.13	1.00	0.014~0.120	0.881~1.190	16	蔡正银等 <sup>[13]</sup>
南沙群岛钙质砂	0.90	1.00	0.030~0.181	0.538~0.973	6	ZHANG J R 等 <sup>[12]</sup>
南海西沙群岛钙质砂	0.10	0.50~1.00	0.098~0.163	0.843~0.983	9	高敏等 <sup>[24]</sup>
南海钙质砂	0.91~0.98	0.22~1.00	0.010~0.101	0.756~1.130	9	HE S H 等 <sup>[20]</sup>

## 4.2 本构模型与验证

为便于工程中快速计算不同固结路径下的剪切变形, 拟提出能够定量考虑固结路径影响的本构模型。首先, 采用 Li 等<sup>[6]</sup>提出的砂土相关剪胀方程表达式:

$$d = d_0 \left( e^{m\psi} - \frac{\eta}{M_c} \right) \quad (6)$$

其中,  $d$  为剪胀率,  $d_0$  和  $m$  为剪胀参数,  $\eta$  为应力比。 $\psi$  为土的状态参量, 采用公式 (7) 计算:

$$\psi = e - e_c \quad (7)$$

在公式 (7) 中,  $e_c$  采用能够考虑固结应力路径影响的公式 (3) 和公式 (4) 计算。进一步引入 Li 等建立的砂土本构模型:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dp'} = \begin{bmatrix} 3G & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} - \\ \frac{h(L)}{3G - \eta Kd + K_p} \begin{bmatrix} 9G^2 & -3\eta KG \\ 3KGd & -\eta K^2 d \end{bmatrix} \begin{cases} d\epsilon_q \\ d\epsilon_v \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $h(L)$  为 Heaviside 方程, 当  $L > 0$  时,  $h(L) = 1$ , 当  $L \leq 0$  时,  $h(L) = 0$ 。 $G$ 、 $K$  和  $K_p$  分别为弹性剪切模量、弹性体积模量和塑性体积模量, 分别通过公式 (9) 至公式 (11) 计算:

$$G = G_0 \cdot \frac{(2.973 - e_0)^2}{1 + e_0} \cdot \sqrt{p' \cdot P_a} \quad (9)$$

$$K = G \cdot \frac{2(1+\nu)}{3(1+\nu)} \quad (10)$$

$$K_p = hG \left( \frac{M_c}{\eta} - e^{n\psi} \right) \quad (11)$$

$G_0$  为材料常数,  $e_0$  为初始孔隙比,  $\nu$  为泊松比,  $h$  和  $n$  为硬化参数。当  $d$  取值为 0 时, 公式 (6) 可转化为公式 (12)。在  $d=0$  的条件下, 将状态参数  $\psi$  和应力比  $\eta$  数值代入公式 (12), 即可计算出剪胀参数  $m$ 。

$$m = \frac{1}{\psi} \ln \frac{\eta}{M_c} \quad (12)$$

公式 (11) 在峰值应力状态下 ( $K_p=0$ ) 可转化为公式 (13), 将峰值应力状态下的状态参数  $\psi$  和应力比  $\eta$  代入公式 (13), 计算硬化参数  $n$ 。

$$n = \frac{1}{\psi} \ln \frac{M_c}{\eta} \quad (13)$$

在排水条件下, 可忽略小弹性变形, 即可得到公式 (14), 然后剪胀参数  $d_0$  可以根据  $\epsilon_v - \epsilon_q$  曲线进行校准。

$$\frac{d\epsilon_v}{d\epsilon_q} \approx d = d_0 \left( e^{m\psi} - \frac{\eta}{M_c} \right) \quad (14)$$

最后, 利用公式 (15) 计算硬化参数  $h$ , 再根据公式 (16) 校准  $h_1$ 、 $h_2$ 。

$$\frac{dq}{d\epsilon_q} \approx hG_0 \left\{ \frac{(2.973 - e)^2 (p' P_a)^{0.5} \left( \frac{M_c}{\eta} - e^{n\psi} \right)}{(1+e) \left( 1 - \frac{1}{3} \eta \right)} \right\} \quad (15)$$

$$h = h_1 - h_2 e \quad (16)$$

综上所述, 该模型参数共包含 7 个类型: 固结路径参数、临界状态应力比、弹性参数、颗粒破碎参数、临界状态参数、剪胀参数和硬化参数, 总共 18 个参数。参照已有文献中的剪胀参数和硬化参数的变化范围<sup>[6, 13, 16]</sup>, 结合试验实测数据, 本研究不同工况下模型参数的取值如表 5 和表 6 所示。

采用 Matlab 语言编制本构模型计算程序, 模拟不同固结应力路径下的钙质砂三轴固结排水剪切试验。将计算结果与试验结果对比绘制于图 12。从图中可以看出, 本研究提出的本构模型计算得到的  $q - \epsilon_a$  曲线和  $\epsilon_v - \epsilon_a$  曲线与实测曲线基本吻合。该模型在确定  $M_c$  数值后, 仅需要通过筛分试验标定剪切完成后的颗粒破碎参数, 就能够较为准确地反映不同应力路径下钙质砂的剪切变形特性。

表 5 考虑固结路径影响的钙质砂本构模型临界状态应力比参数

Table 5 Critical state stress ratio parameters of calcareous sand in constitutive model incorporating consolidation path effects

相对密实度	应力路径参数	临界状态应力比	相对密实度	应力路径参数	临界状态应力比
$D_r$	$K$	$M_c$	$D_r$	$K$	$M_c$
30%	0.45	1.382	70%	0.45	1.572
	0.60	1.348		0.60	1.521
	0.70	1.313		0.70	1.482
	1.00	1.263		1.00	1.430
50%	0.45	1.548	90%	0.45	1.609
	0.60	1.502		0.60	1.562
	0.70	1.463		0.70	1.536
	1.00	1.378		1.00	1.505

表 6 钙质砂本构模型其他参数

Table 6 Other constitutive model parameters of calcareous sand

弹性参数		颗粒破碎参数				临界状态参数				剪胀参数		硬化参数			
$G_0$	$\nu$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\xi$	$d_0$	$m$	$h_1$	$h_2$	$n$
160	0.3	0.109	0.042	0.012	-0.001	1.243	0.129	0.070	0.043	0.7	2.4	0.7	1.71	0.96	0.8

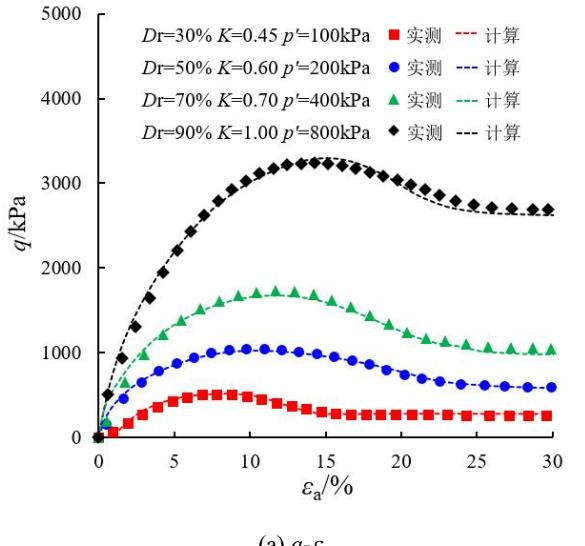
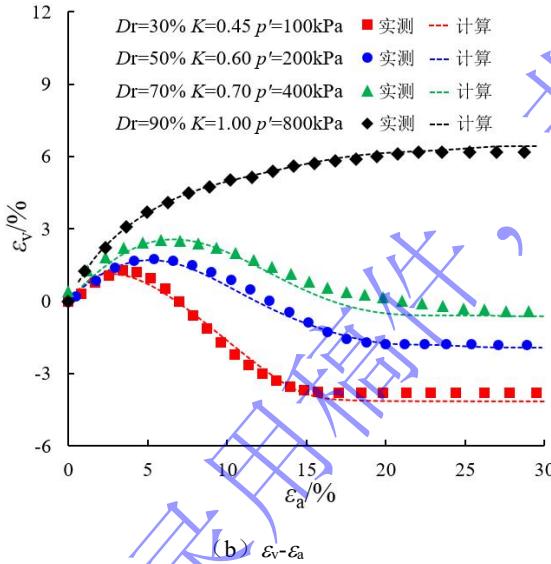
(a)  $q$ - $\epsilon_a$ 

图 12 模型模拟结果和实测结果对比

Fig. 12 Comparison of results from simulation and tests

为了验证该模型在模拟其他钙质砂剪切变形特性的适用性, 本研究选取了南海某吹填岛礁钙质砂<sup>[20]</sup>, 在  $D_r=80\%$  的密实度及  $K=0.40$  的条件下, 平均有效应力分别为 100、200、400 和 800kPa 的三轴固结排水试验结果进行验证。颗粒破碎参数详见表 3, 根据实测数据  $M_c$  取为 1.512, 其余本构模型参数同表 6, 将计算结果与试验结果的对比绘制于图 13。从图中可以看出, 该模型也能够较好模拟该案例钙质砂的剪切变形特性。

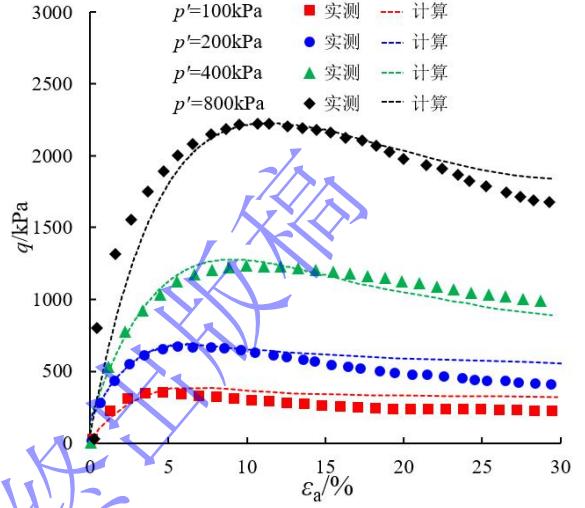
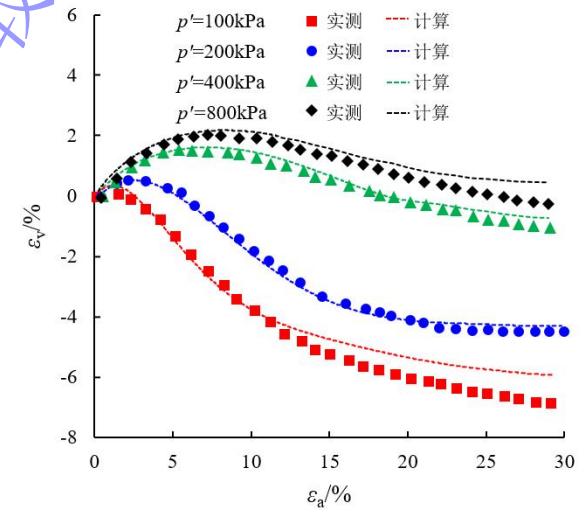
(a)  $q$ - $\epsilon_a$ (b)  $\epsilon_v$ - $\epsilon_a$ 

图 13 模型模拟结果和实测结果对比

Fig. 13 Comparison of results from simulation and tests

## 5 结论

通过对 4 个密实度、4 种固结应力路径和 5 个应力水平工况下的钙质砂三轴排水剪切试验, 研究了不同固结应力路径下钙质砂的应力应变、颗粒破碎和临界状态演化, 提出考虑固结应力路径影响的颗粒破碎数学表达式和本构模型, 主要结论如下:

1) 在相同密实度和平均有效应力工况下, 随着有效主应力比降低, 剪切完成后的颗粒相对破碎率降

低, 对应的临界孔隙比增加, 临界状态线斜率呈下降趋势。不同固结应力路径下剪切完成后的颗粒破碎程度出现差异, 导致钙质砂临界状态线斜率减小, 呈逆时针旋转趋势。

2) 提出有效主应力比-相对破碎率-临界孔隙比定量关系预测公式, 通过对比已有大量实测数据, 验证了公式(5)的有效性, 采用公式(5)计算得到的临界状态孔隙约为实测临界孔隙比的0.8-1.2倍。

3) 建立了与固结应力路径相关的钙质砂本构模型, 该模型能够较为准确反映不同固结应力路径、不同密实度和不同应力水平下的钙质砂应力-应变特性。在已知颗粒破碎程度工况下, 能够准确预测钙质砂在不同固结路径和应力水平下的剪切特性。

## 参考文献:

- [1] 汪轶群, 洪义, 国振, 等. 南海钙质砂宏细观破碎力学特性[J]. 岩土力学, 2018, 39(1): 199-206. (WANG Yi-qun, HONG Yi, GUO Zhen, et al. Micro- and macro-mechanical behavior of crushable calcareous sand in South China Sea[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(1): 199-206. (in Chinese))
- [2] SHAHNAZARI H, REZVANI R. Effective parameters for the particle breakage of calcareous sands: an experiment study[J]. Engineering Geology, 2013, 159: 98-105.
- [3] WANG X, ZHU C Q, WANG X Z, et al. Study of dilatancy behaviors of calcareous soils in a triaxial test[J]. Marine Georesources & Geotechnology, 2019, 37(9): 1057-1070.
- [4] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, WROTH C P. On the yielding of soils[J]. Géotechnique, 1958, 8(1): 22-53.
- [5] BEEN K, JEFFERIES M G, HACHEY J. The critical state of sands[J]. Géotechnique, 1991, 41(3): 365-381.
- [6] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, 50(4): 449-460.
- [7] CAI Z Y, LI X H. Deformation characteristics and critical state of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(5): 697-701.
- [8] 张敏, 杨蕴明, 李琦, 等. 含主应力旋转的应力路径对密砂临界状态的影响[J]. 岩石力学与工程学报: 2013, 32(12): 2560-2565. (ZHANG Min, YANG Yun-ming, LI Qi, et al. Influence of Stress Paths Including Principle Stress Rotation on Critical State of Dense Sand[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(12): 2560-2565. (in Chinese))
- [9] 孙越, 肖杨, 周伟, 等. 钙质砂和石英砂压缩下的颗粒破碎与形状演化[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(6): 1061-1068. (SUN Yue, XIAO Yang, ZHOU Wei, et al. Particle breakage and shape evolution of calcareous and quartz sands under compression[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(6): 1061-1068. (in Chinese))
- [10] XIAO Y, WANG C G, ZHANG Z C, et al. Constitutive modeling for two sands under high pressure[J]. International Journal of Geomechanics, 2021, 21(5): 04021042.
- [11] 陈军浩, 张艳娥, 王刚, 等. 不同固结路径下钙质砂固结排水强度性状研究[J]. 岩土力学, 2024, 45(08): 2290-2298. (CHEN Jun-hao, ZHANG Yan-e, WANG Gang, et al. An experimental study on consolidated drainage strength of calcareous sand under anisotropic consolidation paths[J]. Rock and Soil Mechanics, 2024, 45(08): 2290-2298. (in Chinese))
- [12] ZHANG J R, LUO M X. Dilatancy and critical state of calcareous sand incorporating particle breakage[J]. International Journal of Geomechanics, 2020, 20(4): 04020030.
- [13] 蔡正银, 陈元义, 朱洵, 等. 级配对珊瑚砂颗粒破碎与变形特性的影响[J]. 岩土工程学报, 2023, 45(4): 661-670. (CAI Zheng-yin, CHEN Yuan-yi, ZHU Xun, et al. Influences of gradation on particle breakage and deformation characteristics of coral sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, 45(4): 661-670. (in Chinese))
- [14] 张季如, 陈敬鑫, 王磊, 等. 三轴剪切过程中排水条件对钙质砂颗粒破碎、变形和强度特性的影响[J]. 岩土力学, 2024, 45(02): 375-384. (ZHANG Ji-ru, CHEN Jing-xin, WANG Lei, et al. Effect of drainage conditions during triaxial shearing on particle breakage, deformation, and strength properties of calcareous sand[J]. Rock and Soil Mechanics, 2024, 45(02): 375-384. (in Chinese))
- [15] WU Y, LI N, WANG X, et al. Experimental investigation on mechanical behavior and particle crushing of calcareous sand retrieved from South China Sea[J]. Engineering Geology, 2021, 280: 105932.
- [16] 蔡正银, 侯贺营, 张晋勋, 等. 考虑颗粒破碎影响的珊瑚砂临界状态与本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2019, 41(6): 989-995. (CAI Zheng-yin, HOU He-ying, ZHANG Jin-xun, et al. Critical state and constitutive model for coral sand considering particle breakage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, 41(6): 989-995. (in Chinese))

- [17] 汪成贵, 束善治, 肖杨, 等. 考虑钙质砂颗粒破碎的分数阶边界本构模型[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(6): 1162-1170. (WANG Cheng-gui, SHU Shan-zhi, XIAO Yang, et al. Fractional-order bounding surface model considering breakage of calcareous sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(6): 1162-1170. (in Chinese))
- [18] 王刚, 杨俊杰, 王兆南. 钙质砂临界状态随颗粒破碎演化规律分析[J]. 岩土工程学报, 2021, **43**(8): 1-8. (WANG Gang, YANG Jun-jie, WANG Zhao-nan. The critical state evolution of calcareous sand during particle breakage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, **43**(8): 1-8. (in Chinese))
- [19] PENG W K, ZHANG J R. Crushing and mechanical characteristics of coral sands under various stress paths[J]. Marine Georesources & Geotechnology, 2024, **42**(9): 1258-1272.
- [20] HE S H, GOUDARZY M, DING Z, et al. Strength, deformation, and particle breakage behavior of calcareous sand: role of anisotropic consolidation[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2023, **149**(3): 04023002.
- [21] 史剑, 钱森, 曾玲玲, 等. 不同固结路径温州黏土固有不排水强度性状试验研究[J]. 岩土工程学报, 2004, **36**(9): 1674-1679. SHI Jian, QIAN Sen, ZENG Ling-ling, et al. Undrained shear behaviors of reconstituted Wenzhou clay under different consolidation stress paths[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, **36**(9): 1674-1679. (in Chinese))
- [22] YE J H, YEERNAER H, CAO M, et al. Creep characteristics of calcareous coral sand in the South China Sea[J]. Acta Geotechnica, 2022, **17**(11): 5133-5155.
- [23] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, **111**(10): 1177-1192.
- [24] 高敏, 何绍衡, 夏唐代, 等. 复杂应力路径下钙质砂颗粒破碎及抗剪强度特性[J]. 岩土力学, 2022, **43**(增刊 1): 321-330. (GAO Min, HE Shao-heng, XIA Tang-dai, et al. Particles breakage and shear strength characteristic of calcareous sand under complex stress path[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, **43**(Suppl.1): 321-330. (in Chinese))
- [25] YAO T, CAO Z W, LI W. On the mechanical behaviour of a coral silt from the South China Sea[J]. Géotechnique, 2024: 1-40.
- [26] WEI H Z, LI X X, ZHANG S D, et al. Influence of particle breakage on drained shear strength of calcareous sands[J]. International Journal of Geomechanics, 2021, **21**(7): 04021118.
- [27] REZVANI R. The effect of particle breakage on the dilatancy and shear behavior of marine calcareous and siliceous deposits[J]. Marine Georesources & Geotechnology, 2023: 1-12.
- [28] 吴杨, 崔杰, 李能, 等. 岛礁吹填珊瑚砂力学行为与颗粒破碎特性试验研究[J]. 岩土力学, 2020, **41**(10): 3181-3191. (WU Yang, CUI Jie, LIN Neng, et al. Experimental study on the mechanical behavior and particle breakage characteristics of hydraulic filled coral sand on a coral reef island in the South China Sea[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(10): 3181-3191. (in Chinese))
- [29] SHEN J H, WANG X, CUI J, et al. Shear characteristics of calcareous gravelly sand considering particle breakage[J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2022, **81**(3): 130.
- [30] 何绍衡, 夏唐代, 李玲玲, 等. 温度效应对珊瑚礁砂抗剪强度和颗粒破碎演化特性的影响研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, **38**(12): 2535-2549. (HE Shaoheng, XIA Tangdai, LI Lingling, et al. Influence of temperature effect on shear strength and particle breaking evolution characteristics of coral reef sand[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, **38**(12): 2535-2549. (in Chinese))