

DOI: 10.11779/CJGE20240847

# 堆石料分数阶广义塑性模型

李海潮<sup>1</sup>, 魏英杰<sup>2</sup>, 童晨曦<sup>3</sup>, 范怡飞<sup>1</sup>, 蔡靖<sup>1,4</sup>

(1. 中国民航大学交通科学与工程学院, 天津 300300; 2. 中国地质大学(北京)工程技术学院, 北京 100083; 3. 中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075; 4. 民航机场智能建造与工业化工程技术研究中心, 天津 300300)

**摘要:** 将 Caputo 分数阶微分方法引入传统的广义塑性理论, 建立了适用于粗粒土的分数阶广义塑性模型。该模型采用分数阶流动法则, 通过将分数阶应力微分算子作用于屈服函数, 可以得到新的剪胀方程, 并最终给出新的加载方向和塑性流动方向的表达式。研究表明: 分数阶数是关于状态参量的表达式, 在剪切过程中状态参量的演变会诱导加载方向和塑性流动方向之间的夹角发生变化, 并在临界状态等于零; 因此, 岩土材料具有动态非正交变形特点, 而经典的非关联流动法则在描述该特性时存在理论不足, 需要引入额外的塑性势函数。建立的分数阶广义塑性模型能够为解决该理论难题提供新的研究思路, 在确定状态参量和塑性模量等方面, 该模型也与传统方法有所不同。通过将模型计算结果与不同类型堆石料的排水和不排水三轴压缩试验结果进行对比, 均取得了较好的拟合效果, 初步证明了模型的有效性。

**关键词:** 堆石料; 分数阶流动法则; 广义塑性理论; 状态参量; 本构关系

**中图分类号:** TU43

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-4548(2025)12-2540-11

**作者简介:** 李海潮 (1991—), 男, 博士, 讲师, 主要从事岩土材料的本构关系和大变形破坏数值计算等方面的研究工作。E-mail: haichao821@outlook.com。

## Fractional generalized plastic model for rockfill

LI Haichao<sup>1</sup>, WE Yingjie<sup>2</sup>, TONG Chenxi<sup>3</sup>, FAN Yifei<sup>1</sup>, CAI Jing<sup>1,4</sup>

(1. Transportation Science and Engineering College, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China; 2. School of Engineering and Technology, China University of Geosciences (Beijing), Beijing 100083, China; 3. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 4. Engineering Technology Research Center for Intelligent Construction and Industrialization of Civil Aviation Airports, Tianjin 300300, China)

**Abstract:** This paper extends the theory of generalised plasticity by applying the Caputo fractional differentiation approach to develop a new fractional constitutive model for rockfill. The proposed model employs a so-called fractional flow rule and applies the fractional differential operation on the yield surface to derive a new dilatancy equation. New representations of the plastic flow direction and the loading direction are provided by allowing the fractional order to equal or not equal 1.0. The current study suggests that the evolution of the relative positions between the plastic flow direction and the loading direction is influenced by the state parameter, as it alters the value of the fractional order. The fractional generalised plastic model can capture this non-orthogonal deformation characteristic without introducing an additional plastic potential function. Moreover, the proposed model features new representations of the state parameter and the plastic modulus while incorporating a limited number of material constants to simplify its formula. The model's predictions are compared with the triaxial test data of various types of rockfill under both drained and undrained conditions to verify the effectiveness of the proposed model in describing the strength and deformation characteristics of the rockfill. Good fitting results are obtained in the study, which initially proves the effectiveness of the model.

**Key words:** rockfill; fractional flow rule; generalized plasticity; state parameter; constitutive equations

**基金项目:** 天津市教委科研项目自然科学基金项目一般项目 (XJ2022009601); 民航机场智能建造与工业化工程技术研究中心开放课题 (MHJGGCZX-KFKT-2023-01, 2023-04) This work was supported by Natural Science Project of the Scientific Research Program of the Education Commission of Tianjin (Grant No. XJ2022009601), Open Project of the Civil Aviation Airport Intelligent Construction and Industrialization Engineering Technology Research Center (Grant No. MHJGGCZX-KFKT-2023-01, 2023-04).

**收稿日期(Received):** 2024-08-20 **修回日期(Revised):** 2025-02-02 **接受日期(Accepted):** 2025-02-21 **网络出版日期(Online):** 2025-02-22

\*通信作者 (E-mail: caijing75@163.com)

## 0 引言

堆石料是土石坝和山区机场等工程的重要填筑材料, 具有低围压剪胀和高围压减缩的非正交体积变形特性<sup>[1-3]</sup>。建立面向工程实践的本构模型来合理描述该特性, 对于准确预测土石坝的结构行为和分析山区机场跑道基础的沉降变形机理具有十分重要的理论意义。

广义塑性理论由 Zienkiewicz 等<sup>[4]</sup>和 Pastor 等<sup>[5]</sup>提出, 包含塑性流动方向、加载方向和塑性模量等重要力学概念, 具有框架清晰和易于实现等优点, 是开展土工结构物静-动力学分析的重要工具。在此基础上建立的 P-Z 模型<sup>[5]</sup>属于典型的广义塑性模型, 能够较好地描述黏土和砂土的应变软化和剪胀特性。Ling 等<sup>[6]</sup>基于状态参量的概念<sup>[7]</sup>构建新的塑性模量, 克服了 P-Z 模型不能反映围压对砂土变形相关性影响的不足。对于堆石料, 陈生水等<sup>[8]</sup>、朱晟等<sup>[9]</sup>、刘恩龙等<sup>[10]</sup>、Xiao 等<sup>[11]</sup>建立了不同类型的广义塑性模型来考虑颗粒破碎、应力水平和初始相对密度等因素对材料强度和变形特性的影响, 取得了极大的成功。不过这些模型通常采用经验的剪胀方程来构建塑性流动法则和加载方向, 这些经验公式对于复杂加载条件下不同类型堆石料的剪胀特性的计算精度仍有待进一步检验, 而且该方法也缺乏较为明确的理论依据。另外, 根据 Tapias 等<sup>[12]</sup>、Alonso 等<sup>[13]</sup>Pancrudo 堆石料的塑性应变增量矢量并不始终垂直于屈服面, 具有非正交变形特性。这意味着在剪切过程中塑性流动方向和加载方向之间存在夹角, 传统广义塑性模型只能通过选择两个不同的经验公式来描述该力学现象, 这可能进一步破坏理论的严谨性。

近些年发展起来的分数阶弹塑性理论为描述岩土材料的非正交变形特性提供了新的研究思路, 其核心思想是采用非局域性的分数阶应力微分算子作用于屈服函数来得到新的流动法则, 从而统一描述材料的相关联和非关联塑性流动<sup>[15-19]</sup>。笔者前期采用该方法建立了堆石料的分数阶下加载面模型<sup>[20]</sup>, 成功地描述了不同围压和初始孔隙比对 Tacheng 堆石料<sup>[11]</sup>的强度和变形特性的影响。对比可以发现, 该模型包含的分数阶剪胀方程可用于构建新的塑性流动方向和加载方向, 两者之间的相对位置关系将取决于分数阶数。不过, 分数阶微分方法目前较少用于建立适用于堆石料的广义塑性模型, 本文将对此进行探究。

本文首先基于分数阶流动法则由修正剑桥模型屈服函数得到新的剪胀方程, 并根据堆石料的相变状态的变形特征建立分数阶数与状态参量之间的联系。随后, 定义加载因子和流动因子的概念, 两者分别对应

分数阶数等于和不等 1 两种情形, 由此可以确定塑性流动方向和加载方向。最后, 本文提出新的状态相关塑性模量表达式并建立堆石料的分数阶广义塑性模型。通过将模型计算结果与不同类型堆石料的排水和不排水三轴压缩试验结果进行对比分析, 可以验证该模型的有效性。

## 1 分数阶广义塑性模型

如无特别说明, 本文应力均为有效应力且体积变形以压为正。有效平均主应力  $p$ , 剪应力  $q$  和应力比  $\eta$  分别表示为

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \\ q &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s}\|, \\ \eta &= \frac{q}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: 符号“tr”表示矩阵求迹运算;  $\boldsymbol{\sigma}$  为 Cauchy 应力张量, 偏应力张量  $\mathbf{s}$  可以表示为  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p \cdot \mathbf{1}$ , 其中,  $\mathbf{1}$  为单位矩阵。

### 1.1 状态参量

Been 等<sup>[7]</sup>定义状态参量  $\psi$  为颗粒材料当前孔隙比  $e$  与相同应力水平对应的临界状态孔隙比  $e_{cs}$  之差,

$$\psi = e - e_{cs} \quad (2)$$

根据图 1, 状态参量  $\psi$  可用于判断  $e$ - $p$  平面中颗粒材料当前状态点与临界状态线 (critical state line, CSL) 之间的相对位置关系, 并确定其密实程度。如图中  $A$  点位于临界状态线下方, 试样将处于密实状态 ( $\psi < 0$ ), 在排水剪切过程中孔隙比  $e$  会先减小然后增大, 体积变形具有剪胀性, 而  $B$  点对应的状态点位于临界状态线上方 ( $\psi > 0$ ), 在排水剪切过程中  $e$  会单调递减至临界状态孔隙比  $e_{cs}$ , 体积变形具有减缩性。

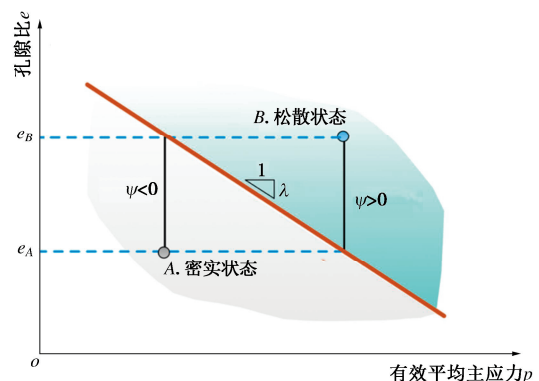


图 1 状态参量力学示意图

Fig. 1 Schematic diagram of state parameter

确定状态参量的关键在于给出任意加载时刻土的当前应力点对应的临界状态孔隙比。不同于黏土, 砂

土和堆石料等颗粒材料在  $e$ - $p$  平面中的临界状态线具有明显的非线性，其等向压缩曲线 (isotropic compression line, ICL) 具有类似的特点，并且与初始孔隙比  $e_0$  有关<sup>[21-23]</sup>。参考 Sheng 等<sup>[24]</sup>，本文采用如下方法来描述颗粒材料的等向压缩曲线和临界状态线，

$$\ln(1+e) = N - \lambda \ln(p + p_r) \quad (3)$$

$$\ln(1+e_{cs}) = \Gamma - \lambda \ln(p + p_{cr}) \quad (4)$$

式中： $\lambda$  为材料参数； $N$  和  $\Gamma$  分别为  $p + p_r = 1$  kPa 和  $p + p_{cr} = 1$  kPa 时对应的当前孔隙比和临界状态孔隙比，其中，参数  $p_r$  和  $p_{cr}$  分别用于控制 ICL 和 CSL 的斜率。对于本文拟建立的分数阶广义塑性模型， $p_r$  和  $N$  为非必要参数。

根据式 (4)，粗粒土的临界状态孔隙比  $e_{cs}$  可表示为

$$e_{cs} = \exp[\Gamma - \lambda \ln(p + p_{cr})] - 1 \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (2) 中，可以得到如下状态参数  $\psi$  的计算方法：

$$\psi = 1 + e - \exp[\Gamma - \lambda \ln(p + p_{cr})] \quad (6)$$

图 2 给出了不同初始孔隙比下 Toyoura 砂土<sup>[25]</sup>在  $e$ - $p$  平面中的等向压缩曲线和临界状态线，两者可以分别采用式 (3)，(4) 进行准确描述。从图 2 中可以看出，Toyourea 砂土的等向压缩曲线与初始孔隙比  $e_0$  有关，具有非线性变化特点，当固结应力  $p$  趋近于无穷大时，原本相互独立的等向压缩曲线将重合于一条线性的极限压缩曲线 (limited compression line, LCL)；堆石料的临界状态线也具有类似的特点<sup>[10]</sup>。

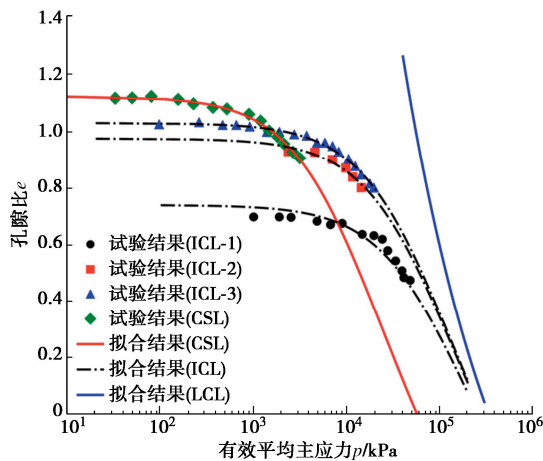


图 2 Toyoura 砂土<sup>[25]</sup>的等向压缩曲线和临界状态线试验结果及其拟合

Fig. 2 Experimental isotropic compression line and critical state line of Toyoura sand with fitting results<sup>[25]</sup>

## 1.2 分数阶应力-剪胀方程

广义塑性理论<sup>[4-6]</sup>假定材料总的应变增量  $d\epsilon$  由弹性应变增量  $d\epsilon^e$  和塑性应变增量  $d\epsilon^p$  两部分组成，即  $d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p$ 。本文采用下式给出的分数阶流动法则

计算塑性应变增量  $d\epsilon^p$ ：

$$d\epsilon^p = \Lambda \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\partial^\mu \mathcal{F}}{\partial p^\mu} \right) \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial^\mu \mathcal{F}}{\partial q^\mu} \right) \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \right] \quad (7)$$

式中： $\Lambda$  为塑性比例常数； $\mathcal{F}$  为屈服函数； $\mu$  为分数阶数，对应的 Caputo 分数阶微分定义的积分形式如下所示<sup>[26]</sup>：

$${}_a D_x^\mu = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\mu+1-n}} d\tau \quad (8)$$

式中： $D$  为分数阶微分符号， $D = \partial^\mu / \partial x^\mu$ ； $a$  为积分下限， $a = 0$ ， $x$  为积分上限；伽马函数  $\Gamma$  的表达式为  $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-\tau) \tau^{x-1} d\tau$ ，由式 (8) 可将幂函数的 Caputo 分数阶微分表示为

$$\frac{\partial^\mu (x^m)}{\partial x^\mu} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\mu)} x^{m-\mu} \quad (m > -1) \quad (9)$$

相比较传统方法，分数阶流动法则能够统一描述相关联和非相关联流动法则，分别对应  $\mu = 1$  和  $\mu \neq 1$  两种情形。对于后者，通过将分数阶应力微分算子直接作用于屈服函数，即可以得到不垂直于屈服面的塑性应变增量矢 (图 3)，从而在不引入塑性势函数的情况下有效描述材料的非正交变形特性<sup>[16-18]</sup>。

在此基础上，定义塑性因子  $d$  为塑性体积应变增量  $d\epsilon_v^p$  和塑性剪切应变增量  $d\epsilon_s^p$  之间的比值，根据式 (7) 给出的分数阶流动法则， $d$  的定义式可改写为

$$d = \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_s^p} = \frac{\partial^\mu \mathcal{F} / \partial p^\mu}{\partial^\mu \mathcal{F} / \partial q^\mu} \quad (10)$$

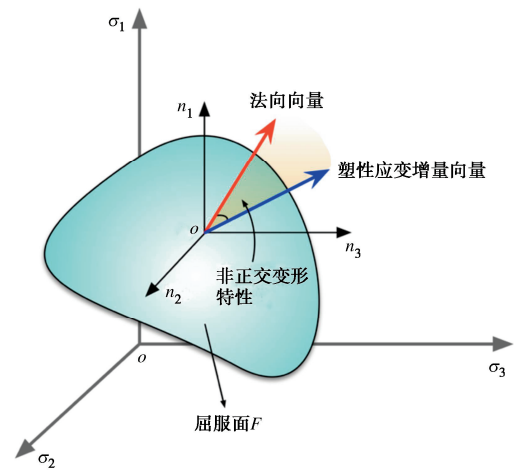


图 3 分数阶流动法则力学示意图

Fig. 3 Schematic diagram of fractional flow rule

由于式 (10) 包含分数阶应力微分算子，因此将其称为分数阶剪胀 5 方程以示区别。假定  $\mathcal{F}$  的表达式为修正剑桥模型屈服函数<sup>[27]</sup>：

$$\mathcal{F} = (2p - p_0)^2 + \left( \frac{2q}{M} \right)^2 - p_0^2 = 0 \quad (11)$$

式中： $p_0$  为  $p$ - $q$  平面中屈服面与  $p$  轴的交点； $M$  为



临界状态应力比。

结合式 (8), (9) 给出的 Caputo 分数阶微分定义, 可以得到  $\mathcal{F}$  关于有效平均主应力  $p$  和剪应力  $q$  的  $\mu$ -阶偏导数:

$$\frac{\partial^\mu \mathcal{F}}{\partial p^\mu} = \frac{\alpha M^2 p^2 - (2-\mu)q^2}{\Gamma(3-\mu)p^\mu}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^\mu \mathcal{F}}{\partial q^\mu} = \frac{2q^{2-\mu}}{\Gamma(3-\mu)}. \quad (13)$$

将式 (12), (13) 代入式 (10) 中, 即可以得到塑性因子  $d$  的最终表达式<sup>[17-18]</sup>:

$$d = \frac{\mu M^2 - (2-\mu)\eta^2}{2\eta^{2-\mu}}. \quad (14)$$

当  $\mu=1$  时, 式 (14) 将退化为修正剑桥模型的剪胀方程, 即  $d = (M^2 - \eta^2)/(2\eta)$ 。

图 4 分别给出了 Lechago 坝页岩堆石料<sup>[28]</sup>、堆石料<sup>[29]</sup>、如美堆石料<sup>[30]</sup>的剪胀因子  $d$  随应力比  $\eta$  变化规律试验结果。作为对比, 给出了修正剑桥模型剪胀方程 ( $d = (M^2 - \eta^2)/(2\eta)$ ), P-Z 模型剪胀方程 ( $d = (1 + \alpha_f)(M_f - \eta)$ , 其中  $\alpha_f$  和  $M_f$  为材料参数) 和分数阶剪胀方程的拟合结果, 可以看出本文方法能够较好描述不同类型堆石料的剪胀特性试验结果。进一步, 剪胀因子  $d$  随应力比  $\eta$  和分数阶数  $\mu$  的变化规律如图 5 所示。

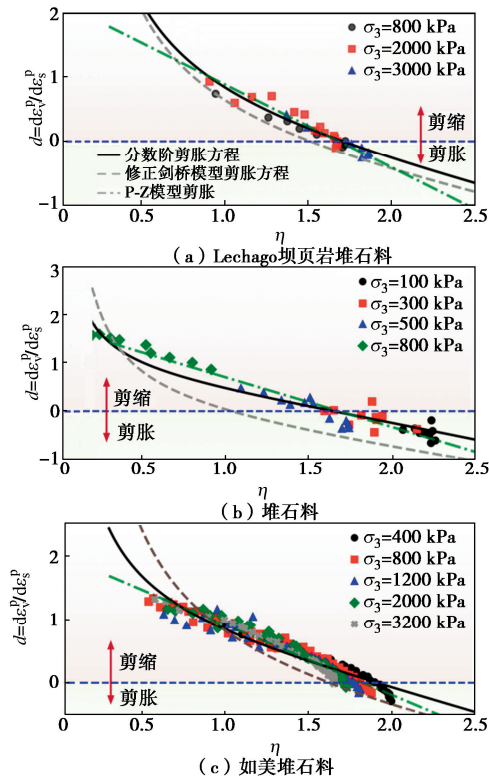


图 4 不同类型堆石料<sup>[28-30]</sup>剪胀特性试验结果及其拟合

Fig. 4 Experimental dilatancy data of different kinds of rockfill with fitting results<sup>[28-30]</sup>

事实上, 在剪切过程中堆石料具有更为复杂的剪

胀特性, 并且与应力水平、加载路径和初始孔隙比等因素有关。可以简单概括为: 在初始剪切阶段, 剪胀因子  $d$  会随着应力比  $\eta$  增大而减小, 当  $d$  首次等于零时, 对应的应力比  $M_c$  为相变状态应力比, 此时试样的体积变形将由剪缩转变为剪胀。进一步加载会达到潜在峰值应力比  $M_p$ , 此后  $\eta$  会逐渐减小并最终等于临界状态应力比  $M$ 。

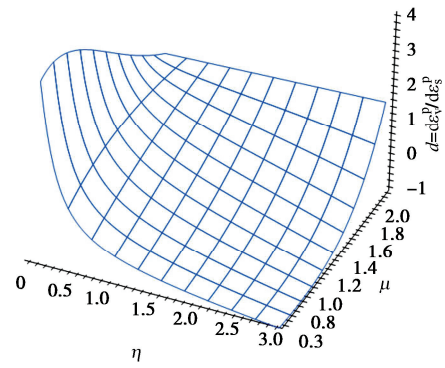


图 5 剪胀因子  $d$  随应力比  $\eta$  和分数阶数  $\mu$  的变化规律

Fig. 5 Evolution of dilatancy ratio  $d$  against stress ratio  $\eta$  and fractional order  $\mu$

笔者早期研究结果表明<sup>[18, 20]</sup>, 在加载过程中分数阶数  $\mu$  的值需进行调整, 否则将不满足土的临界状态的基本假定。主要原因在于, 当土样由充分剪切变形达到临界状态后体积保持不变, 需满足条件  $\eta = M$  和  $d = 0$ , 根据式 (14) 不难得到此时  $\mu=1$ , 但考虑材料的非正交变形特性时, 分数阶数  $\mu$  的初始值却不等于 1.0。

为克服该不足, 可以根据相变状态的变形特征建立分数阶数和状态参量之间的联系, 即当  $\eta = M_c$  时, 塑性因子  $d$  同样等于零, 满足条件:

$$d|_{\eta=M_c} = \frac{\mu M^2 - (2-\mu)M_c^2}{2M_c^{2-\mu}} = 0. \quad (15)$$

整理式 (15) 可以得到

$$\mu = \frac{2M_c^2}{M^2 + M_c^2}. \quad (16)$$

式 (16) 表明分数阶数  $\mu$  是关于相变状态应力比  $M_c$  的函数, 在临界状态有  $M_c = M$  和  $\mu=1$ 。进一步根据 Li 等<sup>[31]</sup>, 相变状态应力比  $M_c$  是关于状态参量  $\psi$  的指数函数:

$$M_c = M \exp(k_c \psi). \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (16) 中, 可最终得到分数阶数  $\mu$  的表达式:

$$\mu = \frac{2 \exp(2k_c \psi)}{1 + \exp(2k_c \psi)}. \quad (18)$$

分数阶数  $\mu$  随状态参量  $\psi$  变化规律如图 6 所示。



联立式 (14), (18), 即可以得到状态相关的分数阶剪胀方程。在临界状态有  $\psi = 0$ ,  $\mu = 1$  且  $d = 0$ , 因此本文提出的剪胀方程将始终满足临界状态的基本定义, 并考虑状态参量对堆石料剪胀特性的影响。

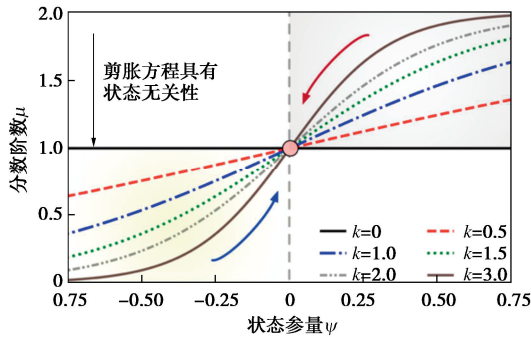


图6 分数阶数  $\mu$  随状态参量  $\psi$  变化规律

Fig. 6 Evolution of fractional order  $\mu$  against state parameter  $\psi$

### 1.3 塑性流动方向和加载方向

塑性流动方向  $\mathbf{m}$  和加载方向  $\mathbf{n}$  是广义塑性理论的核心概念之一, 在三维应力空间中,  $\mathbf{m}$  和  $\mathbf{n}$  具有相似的表达式, 分别为

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{1+d_f^2}} \left( \frac{d_f}{3} \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \right), \quad (19)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+d_l^2}} \left( \frac{d_l}{3} \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \right). \quad (20)$$

式中:  $d_f$ ,  $d_l$  分别为流动因子和加载因子。当两者不相等时, 塑性流动方向  $\mathbf{m}$  与加载方向  $\mathbf{n}$  之间存在夹角, 在荷载作用下土体会发生非正交变形, 对应经典弹塑性理论中的非关联流动法则。

由于本文给出的分数阶流动法则能够统一描述相关联和非相关联流动法则, 参考剪胀因子  $d$  的定义, 假定流动因子  $d_f$  和加载因子  $d_l$  的表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} d_f &= \frac{\partial^\mu \mathcal{F} / \partial p^\mu}{\partial^\mu \mathcal{F} / \partial q^\mu}, \\ d_l &= \frac{\partial \mathcal{F} / \partial p}{\partial \mathcal{F} / \partial q}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

可以看出,  $d_f$  和  $d_l$  都取决于屈服函数  $\mathcal{F}$  的选取, 并且当分数阶数  $\mu = 1$  时,  $d_f$  和  $d_l$  具有相同的定义式。对于后者, 由于加载方向始终垂直于屈服面, 因此该假定是合理的。此外, 当  $\mu$  是关于状态参量  $\psi$  的函数时 (式 (18)),  $d_f$  和  $d_l$  值的差异会导致塑性流动方向  $\mathbf{m}$  与加载方向  $\mathbf{n}$  之间的相对位置关系发生动态调整, 这为描述岩土材料的状态相关非正交变形特性提供了新的理论方法。

由于流动因子  $d_f$  和剪胀因子  $d$  的定义相同, 可以根据式 (14) 将  $d_f$  直接表示为

$$d_f = \frac{\mu M^2 - (2 - \mu) \eta^2}{2 \eta^{2-\mu}}. \quad (22)$$

式中: 分数阶数  $\mu$  为关于状态参量  $\psi$  的函数, 可以由式 (6), (18) 确定其在任意加载时刻的值。

在此基础上, 令  $\mu = 1$ , 可以得到加载因子  $d_l$  的表达式:

$$d_l = \frac{M^2 - \eta^2}{2 \eta}. \quad (23)$$

将式 (22), (23) 给出的流动因子  $d_f$  和加载因子  $d_l$  的表达式代入式 (19), (20) 中, 即可确定塑性流动方向  $\mathbf{m}$  与加载方向  $\mathbf{n}$ 。

### 1.4 应力-应变关系和塑性模量

广义塑性模型的应力-应变关系可以表示为<sup>[4-6]</sup>

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left[ \mathbf{D} - \frac{(\mathbf{n} : \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{D} : \mathbf{m})}{\mathbf{n} : \mathbf{D} : \mathbf{m} + \mathcal{H}} \right] d\boldsymbol{\epsilon}. \quad (24)$$

式中: 符号 “:” 和 “ $\otimes$ ” 分别为张量并联式双点积和张量并乘。弹性应力-应变张量  $\mathbf{D}$  的表达式为

$$\mathbf{D} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \left( \mathcal{J} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right). \quad (25)$$

式中:  $\mathcal{J}$  为四阶单位张量;  $K$ ,  $G$  分别为体积模量和剪切模量。

根据 Richart 等<sup>[32]</sup>, 颗粒材料的剪切模量  $G$  可以表示为

$$G = G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{1 + e} \sqrt{p / p_a}. \quad (26)$$

式中:  $G_0$  为材料参数;  $p_a$  为标准大气压。在此基础上, 可以将体积模量  $K$  表示为

$$K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G. \quad (27)$$

式中:  $\nu$  为泊松比。

最后, 根据 Li 等<sup>[31]</sup>, 为描述颗粒材料的应变软化和剪胀特性, 塑性模量  $\mathcal{H}$  需满足 3 个基本条件: ①在剪切起始时刻  $\mathcal{H}$  趋于正无穷大, 即  $\mathcal{H}|_{\eta=0} = +\infty$ ; ②  $\mathcal{H}$  在试样达到排水剪切峰值应力比  $M_p$  时等于零, 即  $\mathcal{H}|_{\eta=M_p} = 0$ ; ③在临界状态  $\mathcal{H}$  同样等于零, 即  $\mathcal{H}|_{\eta=M} = 0$ 。

为满足上述条件, 本文假定塑性模量  $\mathcal{H}$  的表达式为

$$\mathcal{H} = h_0 G (M_p / \eta - 1) \exp(\eta / M_p). \quad (28)$$

式中:  $h_0$  为材料参数, 潜在峰值应力比  $M_p$  是关于状态参量  $\psi$  的函数,

$$M_p = M \exp(-k_p \psi). \quad (29)$$

式中:  $k_p$  为材料参数。

显然, 式 (28) 满足条件①, ②; 根据式 (29), 在临界状态有  $\psi = 0$  和  $M_b = \eta$ , 将其代入式 (28) 中可以得到  $\mathcal{H} = 0$ , 因此同时满足条件③。至此, 可以完整建立适用于堆石料的分数阶广义塑性模型。

### 1.5 参数标定和单元试验

本文建立的分数阶广义塑性模型共有 9 个参数, 其中  $G_0$  和  $\nu$  为弹性相关参数,  $\Gamma$ ,  $\lambda$ ,  $p_{cr}$ ,  $M$  为临界状态参数,  $h_0$  为塑性模量有关的参数,  $k_c$  为剪胀性相关的参数, 用于确定相变状态应力比和分数阶数,  $k_p$  为峰值状态参数, 用于确定峰值应力比。

具体参数标定过程: ①弹性相关参数  $G_0$  和  $\nu$  可以通过小应变范围内的堆石料在排水剪切过程中的应力-应变曲线和体积变形曲线进行标定; ②临界状态参数  $\Gamma$ ,  $\lambda$ ,  $p_{cr}$ ,  $M$  可以通过堆石料的三轴压缩试验和等向压缩试验得到, 即  $M$  为  $p$ - $q$  平面中临界状态线的斜率, 而  $\Gamma$ ,  $\lambda$ ,  $p_{cr}$  则可以通过堆石料在  $e$ - $p$  平面中的临界状态孔隙比拟合得到。塑性模量参数  $h_0$  可以拟合三轴压缩试验的应力-应变曲线得到。参数  $k_c$  和  $k_p$  的确定方法为

$$\left. \begin{aligned} k_c &= \frac{1}{\psi_c^0} \ln \left( \frac{M_c^0}{M} \right), \\ k_p &= \frac{1}{\psi_p^0} \left( \frac{M}{M_p^0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中:  $\psi_c^0$ ,  $M_c^0$  分别为相变状态下的状态参量和应力比;  $\psi_p^0$ ,  $M_p^0$  分别为峰值状态下的状态参量和应力比, 可通过排水三轴压缩试验结果获得。

### 1.6 参数敏感性分析

为验证本文模型的有效性, 假定某堆石料的分数阶广义塑性模型的材料参数:  $G_0 = 50$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $M = 1.2$ ,  $\Gamma = 1.25$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $p_{cr} = 300$ ,  $k_c = 2.5$ ,  $k_p = 6$ ,  $h_0 = 1.8$ 。试样的初始孔隙比  $e_0$  为 0.82, 在围压  $\sigma_3$  分别为 100, 200, 300, 500, 700, 900 kPa 的条件下开展排水和不排水三轴压缩试验。

图 7 给出了分数阶广义塑性模型计算得到的排水三轴压缩试验结果。首先, 根据图 7 (c), 在  $e$ - $p$  平面中, 当围压  $\sigma_3$  为 100 kPa 时, 试样的初始状态点位于临界状态线下方, 处于相对密实状态, 在排水剪切过程中试样的孔隙比  $e$  会先减少然后增大。当  $\sigma_3$  大于 200 kPa 时, 试样的初始状态点均位于临界状态线的上方, 处于相对松散状态, 在排水剪切过程中试样的孔隙比  $e$  会逐渐减小, 并最终等于其临界状态孔隙比  $e_{cs}$ 。其次, 根据图 7 (a), (b), 可以看出在排水剪切过程中密实样 ( $\sigma_3 = 100$  kPa) 具有明显的应变软化和剪胀特性, 而松散样 ( $\sigma_3 = 300, 500, 700, 900$  kPa) 的体积会持续减小。

图 8 给出了分数阶广义塑性模型计算得到的不排水三轴压缩试验结果。首先, 根据图 8 (a), 该堆石料的不排水剪切强度会随着围压增大而增大, 残余强

度则几乎相同, 主要原因在于试样具有相同的初始孔隙比, 在不排水剪切过程中体积不发生变化, 其在  $e$ - $p$  平面中的状态点会水平移动至临界状态线上的同一点, 因此残余强度会保持不变。其次, 根据图 8 (b), 当试样处于相对密实状态时, 在不排水剪切过程中会产生负的超孔隙水压。最后, 由图 8 (c) 给出的有效应力路径计算结果, 当试样处于相对松散状态时, 其剪应力在达到峰值后会随着轴向应变的增大快速减小。

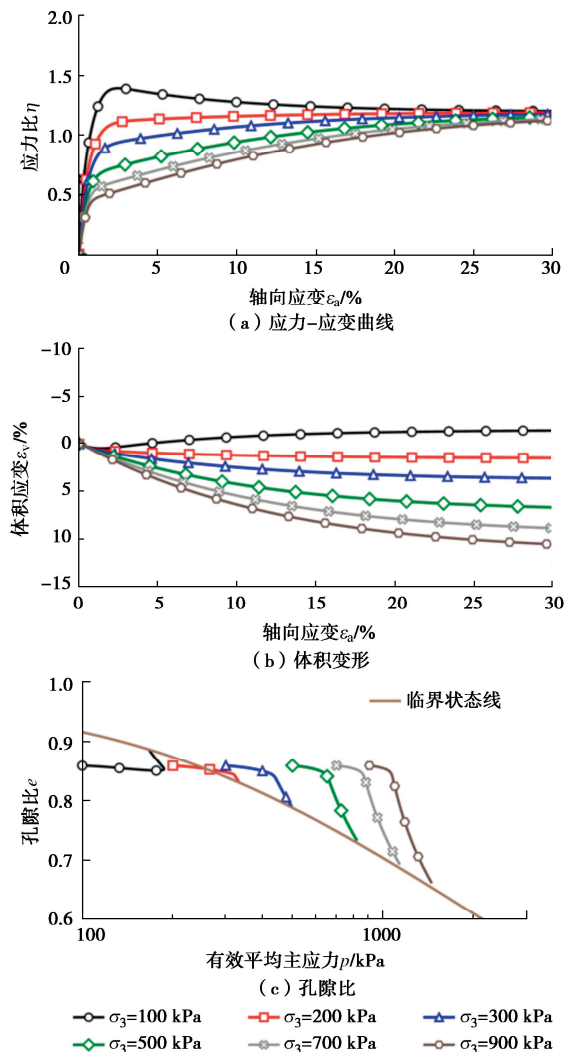
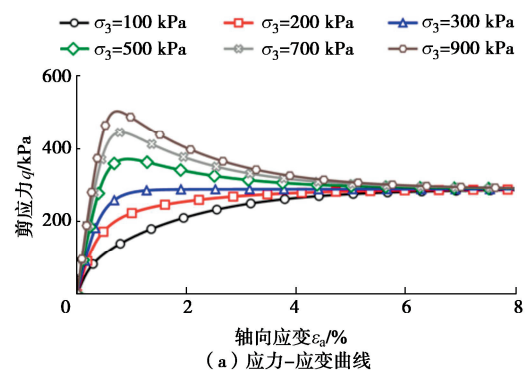


图 7 某堆石料在排水剪切条件下模型计算结果

Fig. 7 Model predictions of rockfill samples under drained shearing condition



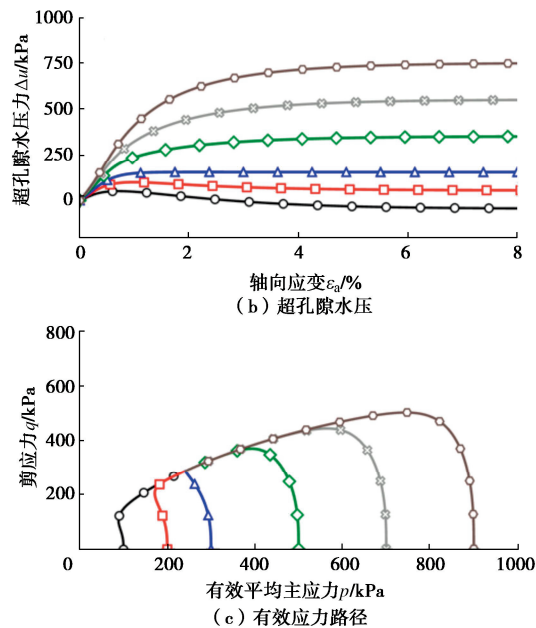


图 8 堆石料在不排水剪切条件下模型计算结果

Fig. 8 Model predictions of rockfill samples under undrained shearing condition

图 9 给出了不同围压下分数阶数随轴向应变的变化规律,可以看出尽管分数阶数的初始值不同,但随着轴向应变增大会逐渐趋近于 1,试样的非正交变形特性也逐渐减弱。

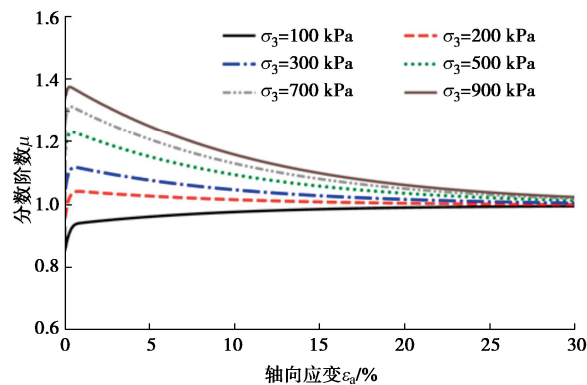


图 9 分数阶数随轴向应变变化规律

Fig. 9 Evolution of fractional order against axial strain

上述计算结果表明,本文建立的分数阶广义塑性模型能够反映堆石料等颗粒材料在排水和不排水三轴压缩过程中的强度、变形和超孔隙水压等特性。

表 1 不同类型堆石料的广义塑性模型材料参数

Table 1 Parameters of different kinds of rockfill for fractional generalised plastic model

堆石料名	$G_0$	$\nu$	$M$	$\Gamma$	$\lambda$	$p_{cr}$	$k_c$	$k_p$	$h_0$
长河坝堆石料 <sup>[10]</sup>	42	0.15	1.65	0.811	0.066	910	1.2	9.6	0.85
玄武岩堆石料 <sup>[33]</sup>	36	0.25	1.87	1.222	0.115	18.7	1.4	2.6	0.56
Ranjit Sagar 堆石料 <sup>[34]</sup>	35	0.39	2.06	0.179	0.001	11.3	1.1	1.8	0.96
Shah Nehar 堆石料 <sup>[34]</sup>	26	0.35	1.41	0.557	0.042	86.1	1.5	1.6	1.22
Purulia 大坝堆石料 <sup>[34]</sup>	52	0.31	1.46	0.593	0.042	42.3	0.8	1.2	0.48

## 2 模型验证

这里采用本文建立的分数阶广义塑性模型对长河坝堆石料<sup>[10]</sup>、玄武岩堆石料<sup>[33]</sup>、Ranjit Sagar 堆石料<sup>[34]</sup>、Shah Nehar 堆石料<sup>[34]</sup>和 Purulia 大坝堆石料<sup>[34]</sup>等材料的排水和不排水三轴压缩试验结果进行计算,对应的材料参数如表 1 所示。

### 2.1 长河坝堆石料

根据刘恩龙等<sup>[10]</sup>,长河坝堆石料的三轴压缩试验包含 9 组排水和不排水情况。在  $e-p$  平面不同围压下试样的初始状态点和临界状态点如图 10 所示,从中可以得到不同围压下长河堆石坝试样的初始孔隙比。

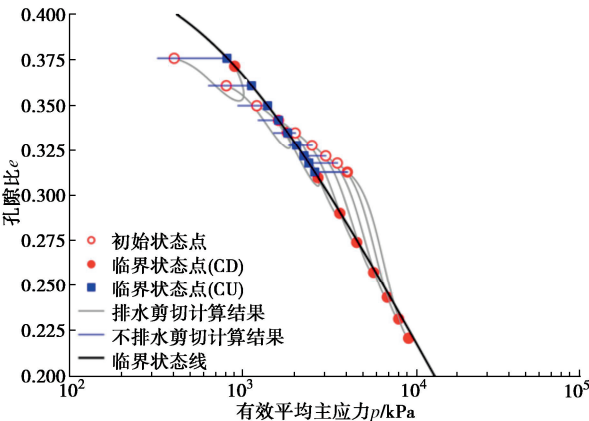


图 10 试样在  $e-p$  平面的初始状态点和临界状态点

Fig. 10 Initial and critical states of Changhe rockfill samples in  $e-p$  plane

图 11 给出了长河坝堆石料的排水三轴压缩试验结果和本文模型计算结果对比,可以看出两者较为接近。根据图 11 (a),在排水剪切过程中试样的应力-应变曲线主要表现为应变硬化,在高围压条件下模型计算得到的峰值强度要略大于试验结果。长河坝堆石料的体积变形规律如图 11 (b) 所示,当  $\sigma_3 = 0.4 \text{ MPa}$  时可以观察到轻微的剪胀现象的发生,本文模型能够反映该特性,但计算结果与试验结果仍存在一定差异。图 12 给出了长河坝堆石料的不排水三轴压缩试验结果和本文模型计算结果对比,可以看出本文模型能够准确的计算不同围压下试样的不排水剪切强度,同时合理的描述超孔隙水压随轴向应变的变化规律,但在小应变范围内 ( $\epsilon_a < 4 \%$ ) 计算得到的应力-应变曲线则与试验结



果存在较为明显的差异。整体上, 本文建的分阶广义塑性模型能够较好的描述长河坝堆石料在不同加载条件下的力学特性, 包括强度、变形和超孔隙水压等。

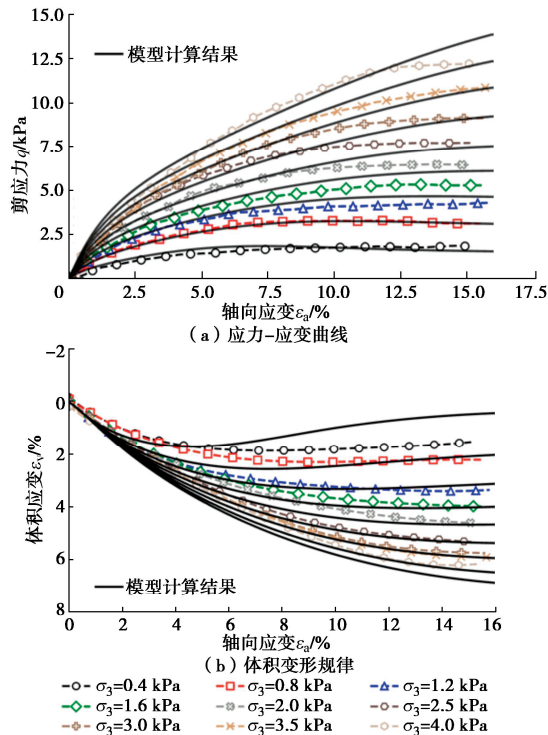


Fig. 11 Comparison between drained triaxial test data and model

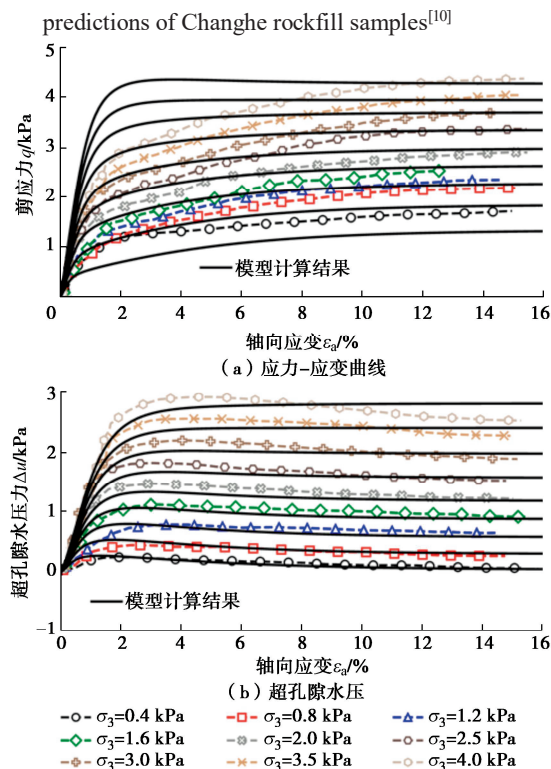


Fig. 12 Comparison between undrained triaxial test data and model predictions of Changhe rockfill samples<sup>[10]</sup>

## 2.2 玄武岩堆石料

图 13 给出了玄武岩堆石料<sup>[33]</sup>的排水三轴压缩试验结果和模型计算结果对比, 根据 Indraratna 等<sup>[33]</sup>, 围压  $\sigma_3$  设定为 50, 100, 200, 300 kPa, 对应的孔隙比  $e_0$  分别为 0.696, 0.682, 0.653, 0.627。可以看出, 本文模型能够合理的描述排水剪切过程中试验的剪应力和体积应变的变化规律。在低围压条件下, 试样的应力-应变曲线具有一定的应变软化特性, 而体积会先减小然后增大, 表现出明显的剪胀特性, 见图 13 (a), (b)。当  $\sigma_3 = 50$  kPa 时, 本文模型计算得到最大体积应变与试验结果之间存在 10%左右的误差, 不过随着围压增大误差会逐渐减小, 试验的体积变形也由剪胀转变为减缩。图 13 (c) 给出的孔隙比  $e$  随有效平均主应力  $p$  的变化规律能够更为直观地反映玄武岩堆石料的剪胀特性。

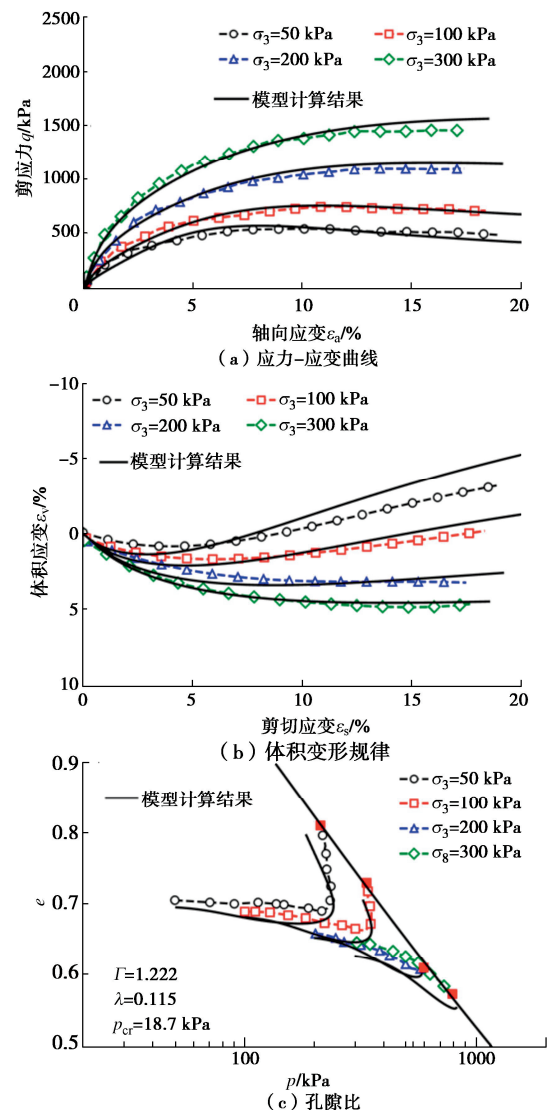


Fig. 13 Comparison between undrained triaxial test data and model predictions of crushed basalt<sup>[33]</sup>

2.3 其他堆石料

图 14~16 分别给出了 Ranjit Sagar 堆石料<sup>[34]</sup>、Shah Nehar 堆石料<sup>[34]</sup>和 Purulia 大坝堆石料<sup>[46]</sup>的排水三轴压缩试验结果和模型计算结果对比,可以看出拟合效果均较好,能够验证本文模型的有效性。根据 Varadarajan 等<sup>[34]</sup>,这 3 种堆石料的最大粒径均为 80 mm,在制样过程中初始孔隙比 $e_0$ 被限定为 0.16, 0.27, 0.252,围压则有所不同。根据图 14,在排水剪切过程中 Ranjit Sagar 堆石料的体积会不断减小,并且观察到剪胀现象的发生,其应力-应变曲线表现为应变硬化。根据图 15, 16, Shah Nehar 堆石料和 Purulia 大

坝堆石料具有“低围压剪胀和高围压减缩”的体积变化规律,本文模型能够合理的描述该重要特性,计算得到的不同围压下的应力-应变曲线也与试验结果吻合较好。

3 结 论

本文将 Caputo 分数阶微分方法引入传统的广义塑性理论,建立了适用于堆石料的分数阶广义塑性模型,得到 3 点主要结论。

(1)通过将分数阶应力微分算子作用于屈服函数

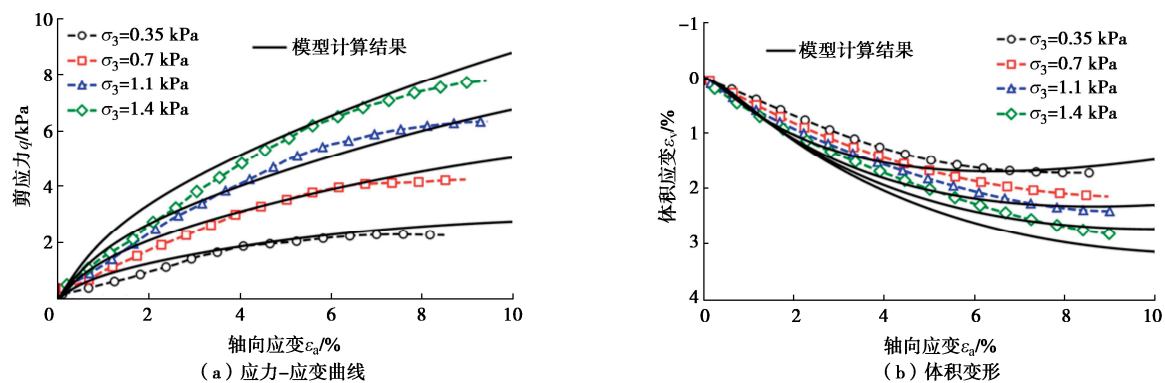


图 14 Ranjit Sagar 堆石料<sup>[34]</sup>排水三轴压缩试验结果和模型计算结果对比

Fig. 14 Comparison between drained triaxial test data and model predictions of Ranjit Sagar rockfill<sup>[34]</sup>

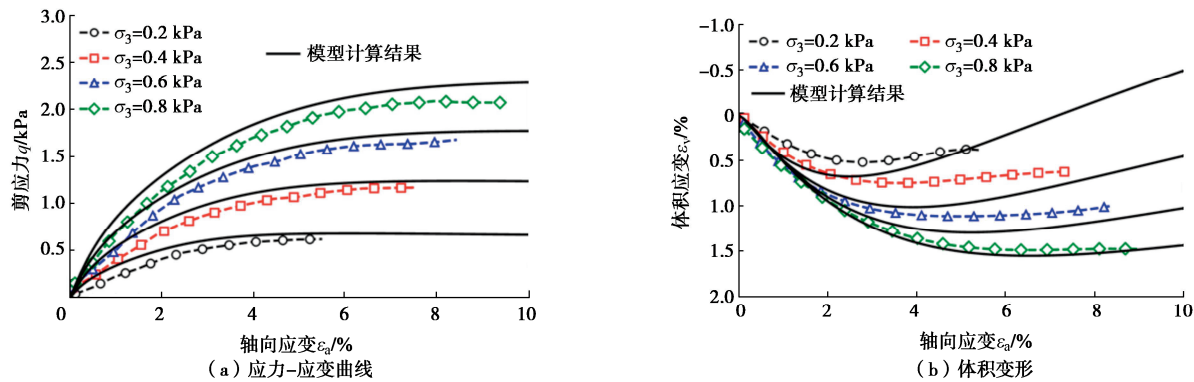


图 15 Shah Nehar 堆石料<sup>[34]</sup>不排水三轴压缩试验结果和模型计算结果对比

Fig. 15 Comparison between undrained triaxial test data and model predictions of Shah Nehar rockfill<sup>[34]</sup>

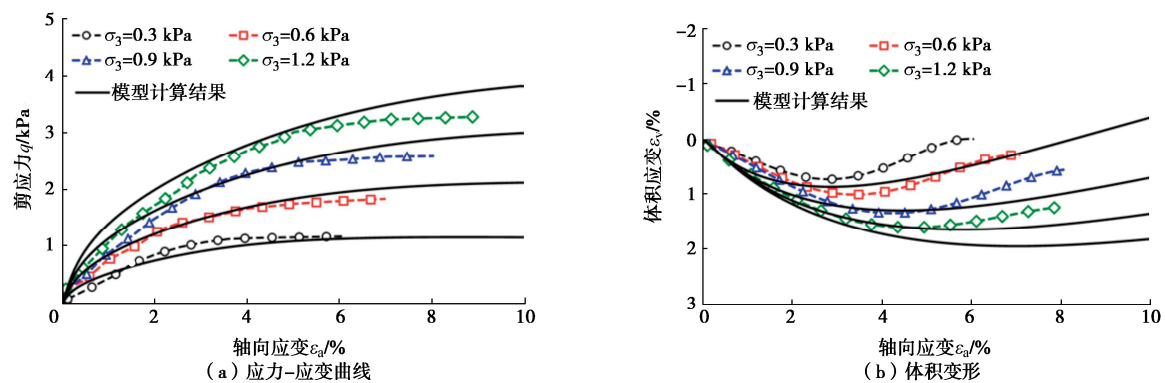


图 16 Purulia 大坝堆石料<sup>[34]</sup>不排水三轴压缩试验结果和模型计算结果对比

Fig. 16 Comparison between undrained triaxial test data and model predictions of Purulia dam rockfill<sup>[34]</sup>

可以得到新的流动法则和剪胀方程。随后基于土的临界状态的基本假定建立了分数阶数与状态参量之间的联系来合理描述堆石料的状态相关剪胀特性。

(2) 根据分数阶剪胀方程可以得到堆石料的加载方向和塑性流动方向, 两者分别对应分数阶数等于和不等 1 的情况。分数阶数的值与状态参量有关, 可用于改变加载方向和塑性流动方向之间的夹角, 从而反映堆石料等岩土材料的非正交变形特性的动态变化过程。

(3) 本文模型采用新的硬化模量计算方法, 仅包含有限的材料参数, 在形式上较为简洁。通过将模型计算结果与不同类型堆石料的排水和不排水三轴压缩试验结果进行对比分析, 均取得了良好的拟合效果。不过, 该模型是否能够准确描述堆石料在循环荷载作用下的力学响应, 仍有待进一步探究。

**利益冲突声明/Conflict of Interests:** 所有作者声明不存在利益冲突。All authors disclose no relevant conflict of interest.

**作者贡献/Authors' Contributions:** 李海潮、蔡靖参与研究内容设计, 李海潮、魏英杰、童晨曦开展模型推导和数值实现, 李海潮、范怡飞完成试验数据收集和模型验证, 李海潮、蔡靖、童晨曦参与论文写作和修改。所有作者均阅读并同意最终稿件的提交。This study was designed by LI Haichao and CAI Jing. The soil model were proposed and implemented by LI Haichao, WEI Yingjie, and TONG Chenxi. The experiments and analyses were conducted by LI Haichao and FAN Yifei. The manuscript was drafted and revised by LI Haichao, CAI Jing and TONG Chenxi. All the authors have read the last version of manuscript and consented for submission

## 参考文献:

- [1] 郭万里, 朱俊高, 彭文明. 粗粒土的剪胀方程及广义塑性本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(6): 1103-1110. (GUO Wanli, ZHU Jungao, PENG Wenming. Dilatancy equation and generalized plastic constitutive model for coarse-grained soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, **40**(6): 1103-1110. (in Chinese))
- [2] 孔宪京, 屈永倩, 邹德高, 等. 强震作用下面板堆石坝跨尺度面板开裂演化分析[J]. 岩土工程学报, 2020, **42**(6): 989-996. (KONG Xianjing, QU Yongqian, ZOU Degao, et al. Cross-scale crack evolution analysis for face slab in concrete faced rockfill dams under strong earthquake[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, **42**(6): 989-996. (in Chinese))
- [3] 何 斌, 徐剑飞, 何 宁, 等. 分布式光纤传感技术在高面板堆石坝内部变形监测中的应用[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(3): 627-633. (HE Bin, XU Jianfei, HE Ning, et al. Application of inner deformation monitoring of concrete face rockfill dams based on distributed optical fiber technology[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(3): 627-633. (in Chinese))
- [4] ZIENKIEWICZ O C, MROZ Z. Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics[J]. Mechanics of Engineering Materials, 1984, **44**(3): 655-680.
- [5] PASTOR M, ZIENKIEWICZ O C, CHAN A H C. Generalized plasticity and the modelling of soil behaviour[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1990, **14**(3): 151-190.
- [6] LING H I, LIU H B. Pressure-level dependency and densification behavior of sand through generalized plasticity model[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, **129**(8): 851-860.
- [7] BEEN K, JEFFERIES M G. Discussion: a state parameter for sands[J]. Géotechnique, 1986, **36**(1): 123-132.
- [8] 陈生水, 傅中志, 韩华强. 一个考虑颗粒破碎的堆石料弹塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(10): 1489 - 1495. (CHEN Shengshui, FU Zhongzhi, HAN Huaqiang. An elastoplastic model for rockfill materials considering particle breakage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(10): 1489-1495. (in Chinese))
- [9] 朱 晟, 魏匡民, 林道通. 筑坝土石料的统一广义塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(8): 1394-1399. (ZHU Sheng, WEI Kuangmin, LIN Daotong. Generalized plasticity model for soil and coarse-grained dam materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(8): 1394-1399. (in Chinese))
- [10] 刘恩龙, 陈生水, 李国英, 等. 堆石料的临界状态与考虑颗粒破碎的本构模型[J]. 岩土力学, 2011, **32**(增刊 2): 148-154. (LIU Enlong, CHEN Shengshui, LI Guoying, et al. Critical state of rockfill and constitutive model considering particle breakage[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(S2): 148-154. (in Chinese))
- [11] XIAO Y, LIU H L, CHEN Y M, et al. Testing and modeling of the state-dependent behaviors of rockfill material[J]. Computers and Geotechnics, 2014, **61**: 153-165.
- [12] TAPIAS M, ALONSO E E, GILI J. A particle model for rockfill behaviour[J]. Géotechnique, 2015, **65**(12): 975-994.
- [13] ALONSO E E, ROMERO E E, ORTEGA E. Yielding of rockfill in relative humidity-controlled triaxial experiments[J].



- Acta Geotechnica, 2016, **11**(3): 455-477.
- [14] DRAPACA C S, SIVALOGANATHAN S. A fractional model of continuum mechanics[J]. Journal of Elasticity, 2012, **107**(2): 105-123.
- [15] SUMELKA W. Fractional viscoplasticity[J]. Mechanics Research Communications, 2014, **56**: 31-36.
- [16] SUN Y F, GAO Y F, ZHU Q Z. Fractional order plasticity modelling of state-dependent behaviour of granular soils without using plastic potential[J]. International Journal of Plasticity, 2018, **102**: 53-69.
- [17] LU D C, LIANG J Y, DU X L, et al. Fractional elastoplastic constitutive model for soils based on a novel 3D fractional plastic flow rule[J]. Computers and Geotechnics, 2019, **105**: 277-290.
- [18] 李海潮, 马 博, 张 升, 等. 基于分数阶热弹塑性理论的软岩力学特性描述[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, **39**(7): 1311-1320. (LI Haichao, MA Bo, ZHANG Sheng, et al. Mechanical behaviors of soft rocks based on the fractional thermal elastic-plastic theory[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2020, **39**(7): 1311-1320. (in Chinese))
- [19] 汪成贵, 束善治, 肖 杨, 等. 考虑钙质砂颗粒破碎的分数阶界面本构模型[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(6): 1162-1170. (WANG Chenggui, SHU Shanzhi, XIAO Yang, et al. Fractional-order bounding surface model considering breakage of calcareous sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(6): 1162-1170.
- [20] 李海潮, 马 博, 张 升. 适用于堆石料的分数阶下加载面模型[J]. 岩土力学, 2021, **42**(1): 68-76. (LI Haichao, MA Bo, ZHANG Sheng. A fractional sub-loading surface model for rockfill[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, **42**(1): 68-76. (in Chinese))
- [21] JAVANMARDI Y, IMAM S M R, PASTOR M, et al. A reference state curve to define the state of soils over a wide range of pressures and densities[J]. Géotechnique, 2018, **68**(2): 95-106.
- [22] YAO Y P, LIU L, LUO T, et al. Unified hardening (UH) model for clays and sands[J]. Computers and Geotechnics, 2019, **110**: 326-343.
- [23] TONG C X, ZHAI M Y, LI H C, et al. Particle breakage of granular soils: changing critical state line and constitutive modelling[J]. Acta Geotechnica, 2022, **17**(3): 755-768.
- [24] SHENG D C, YAO Y P, CARTER J P. A volume - stress model for sands under isotropic and critical stress states[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, **45**(11): 1639-1645.
- [25] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. Soils and Foundations, 1996, **36**(2): 81-91.
- [26] ALMEIDA R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2017, **44**: 460-481.
- [27] ROSCOE K H, BURLAND J B. On the generalized stress-strain behavior of 'wet' clay[M]//Engineering Plasticity. Cambridge: Cambridge University Press, 1968. 535-609.
- [28] ALONSO E E, ITURRALDE E F O, ROMERO E E. Dilatancy of coarse granular aggregates[C]// Experimental Unsaturated Soil Mechanics. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2007: 119-135.
- [29] FU Z Z, CHEN S S, PENG C. Modeling cyclic behavior of rockfill materials in a framework of generalized plasticity[J]. International Journal of Geomechanics, 2014, **14**(2): 191-204.
- [30] 中国水电顾问集团成勘院. 如美筑坝材料室内试验报告[R]. 成都: 中国水电顾问集团成勘院, 2011. (Chengdu Engineering Corporation. Indoor Testing Results of the Rumei Dam Materials[R]. Chengdu: Chengdu Engineering Corporation, 2011. (in Chinese))
- [31] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449-460.
- [32] RICHART F E, JR Hall J R, WOODS R D. Vibrations of soils and foundations[R]. Nanjing: Prentice-Hall Inc Englewood Cliffs, 1970.
- [33] INDRARATNA B, KHABBAZ H, SALIM W. A laboratory study on improvement of railway ballast using geosynthetics[C]// Geotechnical Engineering for Transportation Projects. Los Angeles: American Society of Civil Engineers, 2004: 617-626.
- [34] VARADARAJAN A, SHARMA K G, ABBAS S M, et al. Constitutive model for rockfill materials and determination of material constants[J]. International Journal of Geomechanics, 2006, **6**(4): 226-237.