

DOI: 10.11779/CJGE20240841

# 考虑颗粒破碎及与状态相关的双屈服面弹-塑性本构模型

陈嘉瑞<sup>1</sup>, 汤耀岚<sup>2</sup>, 张春顺<sup>\*1,3</sup>

(1. 武汉大学土木建筑工程学院, 湖北 武汉 430072; 2. 蒙纳士大学土木工程学院, 蒙纳士 3800; 3. 武汉大学水资源工程与调度全国重点实验室, 湖北 武汉 430072)

**摘要:** 大量试验研究表明, 岩土颗粒材料在荷载作用下会发生颗粒破碎, 导致粒径分布曲线(GSD)改变, 从而显著影响其力学特性。因此, 建立能够考虑颗粒破碎影响的本构模型对于精确预测颗粒材料的应力-应变关系至关重要。首先总结了 Hardin 提出的破碎演化模型的特点和局限性, 而后结合大量颗粒破碎试验结果, 提炼出能够反映颗粒破碎特性的双曲线破碎演化模型, 并基于该模型修正了弹性柔度矩阵  $\mathbf{C}^e$ , 使其考虑颗粒破碎的影响。其次, 建立了与颗粒破碎相关的临界状态方程, 清晰揭示了随着颗粒破碎增加, 材料临界状态线斜率随之增大的特性, 并将这一特性融入状态参量中, 推导了考虑颗粒破碎效应的塑性柔度矩阵  $\mathbf{C}^p$ 。最后, 结合修正后的弹性和塑性柔度矩阵, 建立并验证了考虑颗粒破碎与状态相关的双屈服面弹-塑性本构模型。

**关键词:** 本构关系; 颗粒破碎; 破碎演化; 双屈服面

中图分类号: TU443 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2025)12-2507-10

**作者简介:** 陈嘉瑞(1997—), 男, 博士研究生, 主要从事钙质砂力学、破碎特性和本构关系方面的研究工作。E-mail: chenjiarui@whu.edu.cn。

## A state-dependent double yield surface elastoplastic constitutive model considering particle breakage

CHEN Jiarui<sup>1</sup>, TANG Yaolan<sup>2</sup>, ZHANG Chunshun<sup>1,3</sup>

(1. School of Civil Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2. Department of Civil Engineering, Monash University, VIC 3800, Australia; 3.State Key Laboratory of Water Resources Engineering and Management, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** Numerous experimental studies have shown that particle breakage in granular geomaterials under loading alters the grain size distribution (GSD) and consequently affects their mechanical properties. Therefore, establishing a constitutive model that incorporates particle breakage is crucial for accurately predicting the stress-strain behavior of granular materials. First, this study derives a hyperbolic breakage evolution model based on the characteristics and limitations of Hardin's breakage evolution model and extensive test results and modifies the elastic compliance matrix ( $\mathbf{C}^e$ ) to account for particle breakage. Next, a critical state equation that considers particle breakage effects is established, effectively capturing the increasing slope of the critical state line due to particle breakage. This characteristic is incorporated into the state parameters, resulting in a plastic compliance matrix ( $\mathbf{C}^p$ ) that accounts for particle breakage. Finally, by combining the modified elastic and plastic compliance matrices, a state-dependent double yield surface elastoplastic constitutive model that considers particle breakage is developed and validated.

**Key words:** constitutive relation; particle breakage; breakage evolution; double yield surface

## 0 引言

颗粒破碎现象在高土石坝<sup>[1]</sup>、铁路道砟<sup>[2]</sup>、岛礁

吹填<sup>[3]</sup>等岩土工程领域十分常见。大量试验结果显示, 颗粒破碎与材料的宏观属性密切相关, 例如颗粒形

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(52278367); 水灾害防御全国重点实验室“一带一路”水与可持续发展科技基金项目(2024nkms08) This work was Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 52278367) and The Belt and Road Special Foundation of the National Key Laboratory of Water Disaster Prevention (Grant No. 2024nkms08).

收稿日期(Received): 2024-08-19 修回日期(Revised): 2025-03-25 接受日期(Accepted): 2025-03-27 网络出版日期(Online): 2025-03-28

\*通信作者(E-mail: Chunshun.Zhang@whu.edu.cn)

状<sup>[4]</sup>、应力水平<sup>[5-6]</sup>、剪切应变<sup>[7]</sup>、加载条件<sup>[8]</sup>、初始级配<sup>[9]</sup>等。在力学特性方面,颗粒破碎会抑制材料的剪胀、降低其峰值强度、使临界状态线发生偏移等<sup>[10-11]</sup>。因此,建立考虑颗粒破碎效应的本构模型,对准确预测易破碎材料的力学特性至关重要。

在过去的 20 年间,许多学者对这一问题进行了深入研究,建立了多种考虑颗粒破碎效应的本构模型。例如,传统的弹塑性本构模型<sup>[12-13]</sup>,基于广义塑性理论的模型<sup>[14]</sup>,基于边界面理论的模型<sup>[15]</sup>,以及亚塑性本构模型<sup>[16-17]</sup>。这些研究表明,若要在本构关系中合理考虑颗粒破碎的影响,需重点解决以下 3 个关键问题:①选取合适的颗粒破碎指标量化和反映由于颗粒破碎导致的材料 GSD 的改变;②建立颗粒破碎演化模型,动态的表征三轴试验中颗粒破碎发展的规律;③基于以上两点,定量描述颗粒破碎对本构关系中剪胀比、临界状态孔隙比、临界应力比等变量的影响。

基于上述研究框架,本文的主要工作可以分为以下几个部分。首先,借鉴 Hardin<sup>[6]</sup>提出的破碎演化模型的思想并改进其局限性,结合大量试验结果,建立一个新的破碎演化模型。该模型能够反映剪切过程中平均有效应力  $p'$  和应力比  $\eta$  对颗粒破碎的影响。通过简单的移项处理,将该模型进一步推导出破碎屈服面,用于判定材料在加载过程中是否发生破碎。其次,推导与破碎相关的弹性柔度矩阵,定量描述颗粒破碎对弹性应力-应变关系的影响。通过建立颗粒破碎和临界状态孔隙比之间的关系,结合破碎演化模型,推导出考虑颗粒破碎效应的临界状态面。基于上述工作,以 Li 等<sup>[18]</sup>和 Dafalias 等<sup>[19]</sup>提出的状态相关的本构理论以及临界状态土力学为框架,构造了与颗粒破碎和状态相关的剪胀方程及塑性模量,最终建立了考虑颗粒破碎且与状态相关的双屈服面弹-塑性本构模型。该模型的有效性在 Toyoura 砂和钙质砂的三轴试验中得到了全面的验证。

## 1 颗粒破碎演化模型

### 1.1 颗粒破碎指标的选取

可破碎岩土颗粒材料的级配曲线(GSD)在荷载的作用下不断发生变化,因此,合理的量化颗粒破碎程度至关重要。常见的颗粒破碎指标可分为以下两大类:①基于特定粒径变化的破碎指标。此类指标通过分析荷载作用前后颗粒级配曲线(GSD)中一个或几个特定粒径的变化来定义破碎程度,例如 Marsal<sup>[20]</sup>提出的  $B_g$ , Xiao 等<sup>[21]</sup>提出的  $B_{r50}$  等。虽然计算简单,但此类指标过于简化,无法全面反映材料在剪切过程中的整体 GSD 演化规律。②基于 GSD 曲线面积比的破碎指标。此类指标通过比较初始 GSD 与当前 GSD 围成的

面积,以及当前 GSD 与终极 GSD 围成的面积来量化破碎程度。典型指标包括 Qian 等<sup>[2]</sup>提出的 BBI, Hardin<sup>[6]</sup>提出的  $B_r$  以及 Einav<sup>[22]</sup>提出的  $B$  等。此类指标应用广泛,能够较好的反映荷载作用下材料整体 GSD 的演化规律。不同指标之间的主要区别在于对终极 GSD 的表征方式不同(即材料在极高荷载或极大应变下的 GSD)。其中, Einav<sup>[22]</sup>基于分形分布定义终极 GSD 的方式更为合理,能与大多数试验结果吻合<sup>[3]</sup>,已被广泛接受和应用<sup>[13, 17, 23]</sup>。基于上述分析,本文选取 Einav<sup>[22]</sup>提出的破碎指标  $B$  来量化颗粒材料的破碎程度,如图 1 所示,该指标值介于 0~1,能够合理反映材料的破碎演化规律。

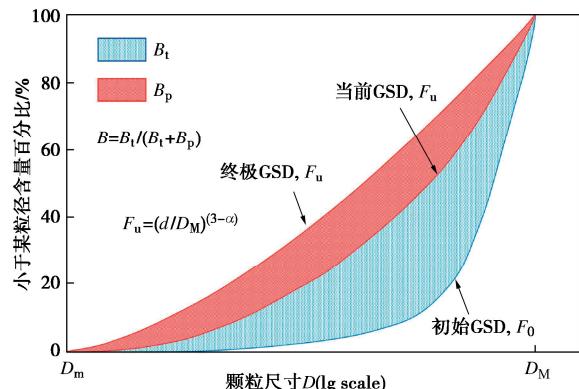


图 1 Einav 定义的颗粒破碎指标  $B$

Fig. 1 Breakage definition proposed by Einav

### 1.2 颗粒破碎演化模型

在弹-塑性框架内考虑颗粒破碎的影响首先需要建立相应的颗粒破碎演化模型。目前,基于试验结果,学者们已提出多种能够描述三轴试验中颗粒破碎演化规律的模型<sup>[14]</sup>。其中 Hardin<sup>[6]</sup>于 1985 年提出的破碎演化模型应用较为广泛,其具有以下两大特点:①颗粒破碎与  $p'$  成双曲线的关系;②同一  $p'$  下,颗粒破碎与  $\eta$  大小成正比。然而,Hardin<sup>[6]</sup>的模型还存在以下不足:①未考虑破碎阈值的影响,与试验结论相违背<sup>[23-24]</sup>;②模型中使用的破碎指标  $B_r$  未能合理的考虑极高荷载下材料终极粒径的分型分布;③模型中的拟合与经验参数较多,影响其实用性。

基于上述分析可以总结出一个合理的破碎演化模型需要同时具备 3 点:①颗粒破碎始于某一特定阈值 ( $p' \geq p_B$ );② $B$  与  $p'$  成双曲线关系,且当  $p'$  趋近于  $+\infty$  时,材料粒径分布接近分形分布,此时  $B$  趋近于 1;③ $B$  随  $p'$  的增加速率与  $\eta$  大小成正相关。

基于上述要求,笔者团队在前期研究中提出了如下双曲线形式的颗粒破碎演化模型<sup>[23]</sup>:

$$B = \begin{cases} 0 & (p' \leq p_B) \\ \frac{p' - p_B}{p' + \chi p_B} & (p' > p_B) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $p'$ 为平均有效应力;  $p_B$ 为破碎阈值, 可通过材料的  $p'-B$  关系曲线标定, 其值为  $B$  即将开始发生时对应的  $p'$ , 具体如图(2)所示;  $\chi$  为模型参数, 该值与  $\eta$  有关, 可用线性函数进行表征,

$$\chi = \chi_0 + k_\omega \eta \quad . \quad (2)$$

式中:  $\chi_0$  和  $k_\omega$  为模型参数, 用于控制破碎屈服面的大小和形状, 详情可见 Chen 等<sup>[23]</sup>的研究。

将式(1), (2)合并, 得到与  $p'$  和  $\eta$  有关的破碎演化模型:

$$B = \begin{cases} 0 & (p' \leq p_B) \\ \frac{p' - p_B}{p' + (\chi_0 + k_\omega \eta)p_B} & (p' > p_B) \end{cases} \quad . \quad (3)$$

图2展示了Chen等<sup>[23]</sup>和Coop等<sup>[24]</sup>分别针对钙质砂和风化花岗岩开展大量三轴试验得到的颗粒破碎  $B$  与  $p'$  和  $\eta$  的关系(图例中的  $\eta$  的具体数值源自上述文献)。可以发现, 该模型可以很好的模拟三轴试验中不同加载路径、排水条件下颗粒破碎的演化规律。模型参数见表1。

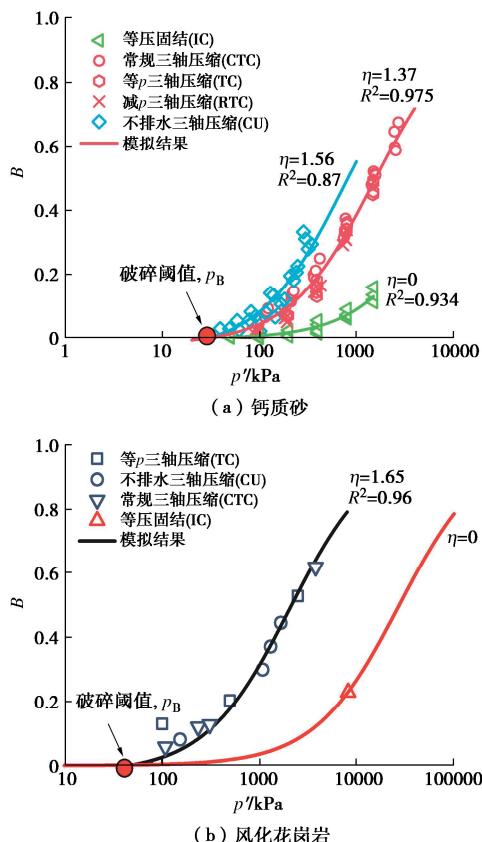


图2 破碎演化模型对不同材料颗粒破碎演化模拟结果

Fig. 2 Comparison of breakage evolution with different test results

表1 颗粒破碎演化模型参数

Table 1 Parameters of proposed breakage evolution model

材料	$\chi_0$	$k_\omega$	$p_B / \text{kPa}$
钙质砂 <sup>[23]</sup>	328	-195	30
风化花岗岩 <sup>[24]</sup>	550	-308	40

## 2 考虑颗粒破碎的临界状态面

$e$ - $\lg p'$ 平面上材料的临界状态线(CSL)可表示为<sup>[8]</sup>

$$e_c = \Gamma - \lambda \ln p' \quad . \quad (4)$$

式中:  $\lambda$  和  $\Gamma$  分别为  $e$ - $\lg p'$  平面上临界状态线的斜率和截距。

然而, 对于颗粒材料, 其 CSL 的位置与级配有关。因此, 随着颗粒破碎的发展, CSL 的位置会不断向下发生偏移, 可用下式进行表征<sup>[13]</sup>:

$$\Gamma(B) = \Gamma_0 - \frac{B}{\gamma + B} \quad . \quad (5)$$

式中:  $\Gamma_0$  为颗粒不破碎时材料在  $e$ - $\lg p'$  平面上临界状态线的截距;  $\gamma$  为模型参数, 表征颗粒破碎对 CSL 的影响程度。

将式(1), (4), (5)相结合, 可以得到考虑颗粒破碎的临界状态面表达式:

$$e_c = \begin{cases} \Gamma_0 - \lambda \ln p' & (p' \leq p_B) \\ \Gamma_0 - \frac{p' - p_B}{(1 + B)p' + (B\chi - 1)p_B} - \lambda \ln p' & (p' > p_B) \end{cases} \quad . \quad (6)$$

图3展示了  $e$ - $\lg p'$  平面上通过式(6)模拟的颗粒破碎条件下材料的 CSL, 以及式(4)模拟的颗粒不破碎条件下的 CSL。可以看出, 式(6)能够准确反映当平均有效应力  $p'$  超过破碎阈值  $p_B$  后, 可破碎材料 CSL 斜率随着颗粒破碎的发展而变陡的特点。此外, 当模型参数  $\chi$  增大, 由于式(1)模拟的颗粒破碎发展趋于缓慢, 故 CSL 向下偏移的幅度也随之减小。

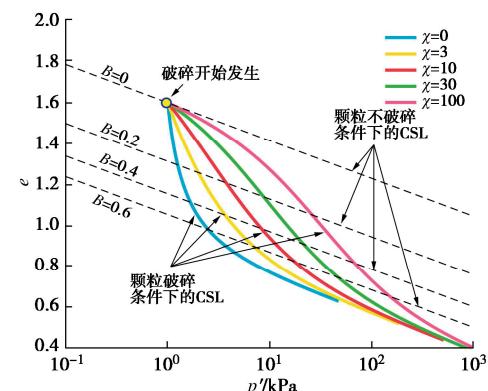


图3 可破碎材料(彩色实线)和不可破碎材料(黑色点线)在  $e$ - $\lg p'$  平面上的临界状态线

Fig. 3 CSLs for uncrushable materials with different gradations (black dotted lines) and crushable materials (colourful thick lines): on  $e$ - $\lg p'$  plane

图4展示了Chen等<sup>[23]</sup>报道的钙质砂在  $e$ - $\lg p'$  平面上的临界状态点与式(6)模拟结果的比较(具体参数

见表 2)。可以看出, 式(6)能够准确地反映当平均有效应力超过破碎阈值后, 钙质砂 CSL 斜率随着颗粒破碎的发展而变陡的特点。

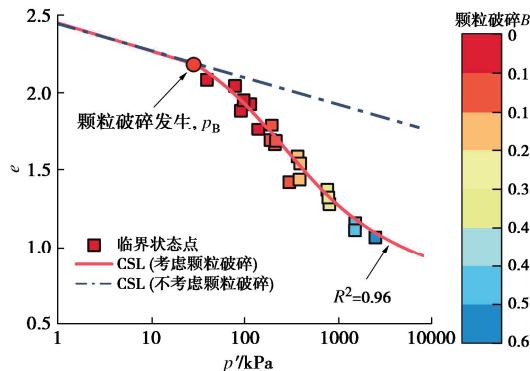


图 4 模拟结果和钙质砂试验结果的比较

Fig. 4 Simulation results versus test data of calcareous sand

### 3 本构模型基本框架

#### 3.1 考虑颗粒破碎的弹性应力应变关系

对于岩土颗粒材料, 其弹性应力-应变关系可用下式表征<sup>[18]</sup>:

$$\begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_v^e \\ d\epsilon_s^e \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中:  $K$  和  $G$  为体积和剪切模量;  $\epsilon_v^e$  和  $\epsilon_s^e$  为弹性体积应变以及弹性剪应变。

然而, 对于可破碎颗粒材料, 由于其剪切过程中 GSD 不断发生变化, 系统中所存储的弹性势能也随之发生变化, 其弹性应力-应变关系也应发生相应的改变。基于 Einav<sup>[22]</sup>的研究, 考虑颗粒破碎影响的弹性应力-应变关系可以表示为如下形式:

$$\begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_v^e \\ d\epsilon_s^e \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{9p'}{1-9B} \\ \frac{9q}{1-9B} \end{Bmatrix} dB \quad (8)$$

式中:  $\vartheta$  为初始级配指标<sup>[22]</sup>。 $K$  和  $G$  可表达为

$$\left. \begin{aligned} G &= (1-9B)G_0 \frac{(2.97-e)^2}{1+e} \sqrt{p'p_a}, \\ K &= G \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中:  $G_0$  为初始剪切模量;  $\nu$  为泊松比。

结合式(3), (8), 可得到破碎阶段的弹性本构关系:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_v^e \\ d\epsilon_s^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(1 + \frac{\vartheta p'}{1-9B} \frac{dB}{dp'}\right) \frac{1}{K} & \left(\frac{\vartheta p'}{1-9B} \frac{dB}{dq}\right) \frac{1}{K} \\ \left(\frac{\vartheta q}{1-9B} \frac{dB}{dp'}\right) \frac{1}{3G} & \left(1 + \frac{\vartheta q}{1-9B} \frac{dB}{dq}\right) \frac{1}{3G} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} dp' \\ dq \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$C^*$  为考虑颗粒破碎效应的弹性柔度矩阵,

$$C^{*} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\vartheta p}{1-9B} \frac{dB}{dp'}\right) \frac{1}{K} & \left(\frac{\vartheta p'}{1-9B} \frac{dB}{dq}\right) \frac{1}{K} \\ \left(\frac{\vartheta q}{1-9B} \frac{dB}{dp'}\right) \frac{1}{3G} & \left(1 + \frac{\vartheta q}{1-9B} \frac{dB}{dq}\right) \frac{1}{3G} \end{bmatrix} \quad (11)$$

从式(11)可以看出, 对于不可破碎材料, 也就是当  $dB$  为 0 时, 式(11)便可退化至经典的弹性柔度矩阵  $C^e$ :

$$C^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G} \end{bmatrix} \quad (12)$$

#### 3.2 双屈服面方程

针对塑性屈服, Li 等<sup>[18]</sup>的研究表明, 与应力比不断变化的加载路径相比, 岩土颗粒材料在常应力比路径下极少发生塑性变形。因此, 其弹-塑性屈服面采取以下形式的表达式:

$$f_p = q - \eta p' = 0 \quad (13)$$

式中:  $\eta$  为应力比, 定义为  $\eta = q/p'$ 。

针对破碎屈服, 参考 Kikumoto 的方法<sup>[25]</sup>, 通过对颗粒破碎演化模型(式(3))进行移项处理, 可得到颗粒破碎屈服面  $f_B$ :

$$f_B = \frac{(1-B)}{p_B} p' - \left[ B \left( \chi_0 + k_w \frac{q}{p'} \right) + 1 \right] = 0 \quad (14)$$

图 5 展示了破碎屈服面在  $p'-q-B$  空间中的形状。从图中可以看出, 随着  $B$  增大, 屈服面的形状不断扩大。这表明, 随着颗粒破碎持续发展, 需要更大的应力才能进一步诱发破碎, 这一现象可称之为破碎引起的屈服面硬化。当应力状态达到破碎屈服面 ( $f_B=0$ ), 并试图超过当前屈服面时 ( $df_B>0$ ), 材料会发生颗粒破碎, 从而改变其级配。总体而言, 本文提出的颗粒破碎屈服面可作为判断颗粒破碎是否发生的准则, 应用于建立考虑颗粒破碎效应的弹-塑性本构模型之中。

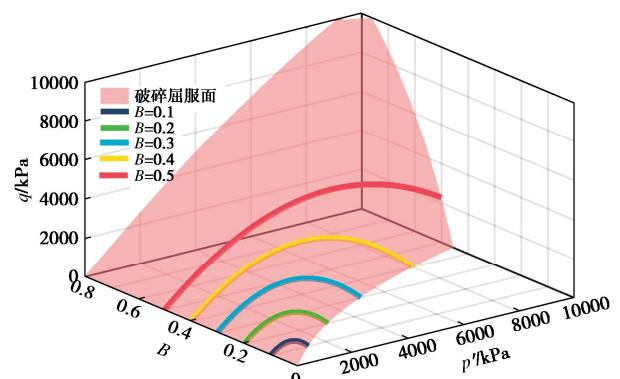


图 5  $p'-q-B$  平面上的破碎屈服面

Fig. 5 Breakage yield surface on  $p'-q-B$  space

### 3.3 塑性模量

参考 Dafalias 和 Manzari<sup>[19]</sup>的研究, 塑性阶段的应力-应变关系可表示为

$$d\epsilon_s^p = \frac{d\eta}{H} \quad , \quad (15)$$

$$d\epsilon_v^p = d_g |d\epsilon_s^p| = d_g \left| \frac{d\eta}{H} \right| \quad . \quad (16)$$

式中:  $d\epsilon_s^p$  为塑性剪应变增量;  $d\epsilon_v^p$  为塑性体积应变增量;  $d\eta$  为应力比增量;  $H$  为塑性模量;  $d_g$  为剪胀因子。

根据 Li 等<sup>[18]</sup>的建议, 塑性模量  $H$  需满足以下几个条件: ①在  $\eta=0$  时,  $H$  趋近正无穷; ②在临界状态时,  $H=0$ ; ③在边界应力比  $M_p$  时,  $H=0$ 。这表明, 在应力空间中,  $H$  的大小与  $\eta$  和  $M_p$  的“距离”相关。可以采用如下表达式<sup>[19]</sup>:

$$H = \frac{(M_p - \eta)G_0 h_0}{|\eta - \eta_{in}|} \left(1 - c_h e\right) \left(\frac{p'}{p_a}\right)^{-0.5} \quad . \quad (17)$$

式中:  $h_0$  和  $c_h$  为模型参数;  $p_a$  为大气压强, 取 101.3 kPa;  $\eta_{in}$  为初始加载阶段的应力比。

### 3.4 状态参数

状态参数定义为当前平均有效应力下, 当前孔隙比  $e$  与临界状态孔隙比  $e_c$  的距离<sup>[26]</sup>:

$$\psi = e - e_c \quad . \quad (18)$$

式 (18) 可以反映土体在剪切过程中所处的密实程度, 用于判断土体可能发生的剪切特性。将式 (5) 代入式 (18) 可得考虑颗粒破碎影响的状态参数,

$$\psi = e - \left( \Gamma_0 - \frac{B}{\gamma + B} - \lambda \ln p' \right) \quad . \quad (19)$$

### 3.5 与状态相关的剪胀、峰值应力比

参考 Li 等<sup>[18]</sup>的做法, 以简单的指数函数将剪胀应力比  $M_d$ 、边界应力比  $M_p$  与状态参数  $\psi$  相结合,

$$\begin{cases} M_p = M \exp(-n_p \psi), \\ M_d = M \exp(+n_d \psi). \end{cases} \quad (20)$$

式中:  $n_p$  和  $n_d$  为模型参数;  $M_d$  为剪胀应力比;  $M$  为临界状态应力比。

将上式 (19) 代入式 (20), 可得考虑颗粒破碎影响的  $M_p$  和  $M_d$ ,

$$\begin{cases} M_p = M \exp \left\{ -n_p \left[ e - \left( \Gamma_0 - \frac{B}{\gamma + B} - \lambda \ln p' \right) \right] \right\}, \\ M_d = M \exp \left\{ +n_d \left[ e - \left( \Gamma_0 - \frac{B}{\gamma + B} - \lambda \ln p' \right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (21)$$

与状态相关的剪胀方程  $d_g$  可用下式表示:

$$d_g = d_0 (M_d - \eta) \quad . \quad (22)$$

式中:  $d_0$  为模型参数。

从式 (22) 可以看出, 在应力比空间中  $d_g$  的大小与  $M_d$  和  $\eta$  的“距离”有关。当  $M_d > \eta$  时,  $d_g > 0$ , 材料发生剪胀, 反之, 材料发生剪缩; 当  $M_d = \eta$  时,  $d_g = 0$ , 材料处于临界状态。

### 3.6 循环加载的实现

从式 (17), (22) 可以发现, 在单调加载中 (三轴压缩), 塑性模量  $H$  和剪胀方程  $d_g$  分别为应力比与  $M_p$  和  $M_d$  的“距离”相关的函数。同样, 依据边界塑性理论, 对于反向加载 (三轴拉伸),  $H$  和  $d_g$  也应与  $M_p$  和  $M_d$  和  $\eta$  的“距离”相关。考虑到  $M_p$  恒为正值,  $\eta$  可正可负, 基于 Dafalias 等<sup>[19]</sup>的研究, 三轴拉伸条件下的塑性模量可定义为

$$H = \frac{(M_p + \eta)G_0 h_0}{|\eta - \eta_{in}|} (1 - c_h e) \left( \frac{p'}{p_a} \right)^{-0.5} \quad . \quad (23)$$

式中:  $M_p + \eta$  可以表示三轴拉伸阶段  $\eta$  和  $M_p$  之间的“距离”。

三轴拉伸条件下的剪胀方程定义为

$$d_g = d_0 (M_d + \eta) \quad . \quad (24)$$

式中:  $M_d + \eta$  可以表示三轴拉伸阶段  $\eta$  和  $M_d$  之间的“距离”。

### 3.7 总应力-应变关系

结合式 (15) ~ (17) 可得塑性的应力-应变关系:

$$\begin{cases} d\epsilon_v^p \\ d\epsilon_s^p \end{cases} = \begin{bmatrix} -\text{sgn}(d\epsilon_s^p)dq & \text{sgn}(d\epsilon_s^p)d_g \\ \frac{H p'^2}{H p'^2} & H p' \\ \frac{-q}{H p'^2} & \frac{1}{H p'} \end{bmatrix} \begin{cases} dp' \\ dq \end{cases} \quad . \quad (25)$$

$C^p$  为考虑塑性柔度矩阵,

$$C^p = \begin{bmatrix} -\text{sgn}(d\epsilon_s^p)dq & \text{sgn}(d\epsilon_s^p)d_g \\ \frac{H p'^2}{H p'^2} & H p' \\ \frac{-q}{H p'^2} & \frac{1}{H p'} \end{bmatrix} \quad . \quad (26)$$

将式 (26), (11) 相结合可以得到颗粒破碎阶段的总应力-应变关系:

$$\begin{cases} d\epsilon_v \\ d\epsilon_s \end{cases} = [C^p + C^{e*}] \begin{cases} dp' \\ dq \end{cases} \quad . \quad (27)$$

将式 (26), (12) 相结合可以得到颗粒不破碎阶段的总应力-应变关系:

$$\begin{cases} d\epsilon_v \\ d\epsilon_s \end{cases} = [C^p + C^e] \begin{cases} dp' \\ dq \end{cases} \quad . \quad (28)$$

## 4 模型积分算法

本文建立的模型的积分算法主要可分为两个部分。

(1) 不破碎试探步: 在此阶段, 假设材料不发生

进一步的颗粒破碎。此时, 使用传统的弹性柔度矩阵  $\mathbf{C}^e$ , 以及基于当前颗粒破碎  $B$  对应的 CSL 推导塑性柔度矩阵  $\mathbf{C}^p$ , 从而开展应力积分计算。

(2) 破碎修正步: 在当前颗粒破碎  $B$  对应的破碎屈服面  $f_B$  中对上一步计算得到的应力增量进行判断, 若  $df_B > 0$ , 则使用考虑颗粒破碎效应的弹性柔度矩阵  $\mathbf{C}^*$  进行计算, 从而对总应力-应变关系进行修正, 反之, 则不需要进行修正。

基于本节介绍的破碎修正积分方法, 后文将对不易破碎的颗粒材料 Toyoura 砂以及易破碎颗粒材料钙质砂开展模型验证工作。

## 5 模型参数确定及验证

### 5.1 模型参数的确定

本模型共有 15 个参数, 包括: ①破碎演化模型相关的参数  $\chi_0$ ,  $k_o$  和  $p_B$ ; ②临界状态线相关的参数  $\Gamma$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$  和  $M$ ; ③剪胀有关的参数  $d_0$  和  $n_d$ ; ④弹性应力-

应变关系有关的参数  $G_0$ ,  $v$  和  $\vartheta$ ; ⑤塑性应力-应变关系有关的参数  $b_0$ ,  $c_h$  和  $n_p$ 。其中, 参数  $G_0$ ,  $v$ ,  $b_0$ ,  $c_h$ ,  $n_p$ ,  $M$ ,  $d_0$ ,  $\lambda$  的标定方法可见 Li 等<sup>[18]</sup>的研究, 本文不再赘述。破碎演化模型参数的标定如前文所述。 $\Gamma$  和  $\gamma$  可通过拟合颗粒破碎  $B$  和 CSL 在  $e$ - $\lg p'$  平面上的截距得到。 $\vartheta$  为初始级配指标, 用于表征材料在剪切过程中发生破碎的难易程度, 可通过对初始 GSD 使用统计均值化方法计算得到<sup>[27-28]</sup>。表 2 展示了用于模型验证的两类材料的模型参数。

### 5.2 模型验证

#### (1) 情形一: 不可破碎颗粒材料——Toyoura 砂模型验证

Verdugo 等<sup>[29]</sup>针对初始相对密实度范围为 18.5%~63.7% 的 Toyoura 砂, 在多级围压下 (100~3000 kPa) 开展了一系列固结不排水剪切试验, 如下图 6 所示。

可以看出, 本文建立的模型模拟效果较好, 能够

表 2 本构模型参数

Table 2 Model parameters

材料	弹性参数	破碎参数	临界状态参数	塑性参数
Toyoura 砂	$G_0 = 125$ , $v = 0.05$	—	$\Gamma = 0.934$ , $\lambda = 0.019$ , $M = 1.25$ ,	$d_0 = 0.7$ , $n_d = 3.5$ , $c_h = 0.97$ , $n_p = 1.1$ , $h_0 = 7.2$
钙质砂	$G_0 = 55$ , $v = 0.01$	$p_B = 30 \text{ kPa}$ , $\chi_0 = 328$ , $k_o = -195$ , $\theta = 0.75$	$\gamma = 0.95$ , $\Gamma = 2.3$ , $\lambda = 0.14$ , $M = 1.39$	$d_0 = 0.8$ , $n_d = 1.5$ , $c_h = 0.0025$ , $n_p = 0.4$ , $h_0 = 0.82$

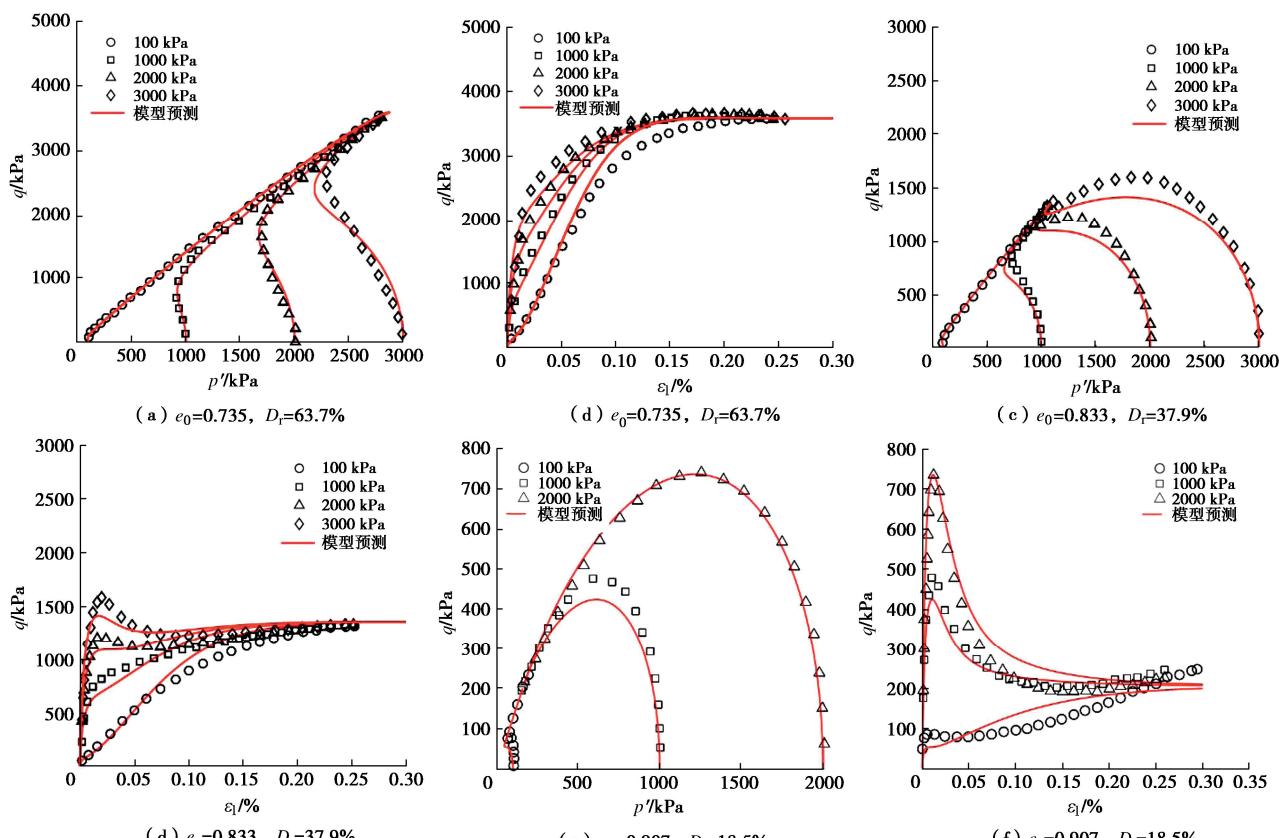


图 6 不排水条件下模型对 Toyoura 砂的预测和试验结果的比较

Fig. 6 Proposed model predictions versus undrained experimental results of Toyoura sand

有效地反映初始相对密实度和围压对 Toyoura 砂在不排水条件下应力-应变关系的影响。对于松砂和中密砂, 随着围压的增大, 试样的应力-应变关系逐渐由应变硬化型转化为应变软化型, 出现了明显的峰值强度。同时, 试样的有效应力路径从不流动逐渐过渡为流动, 并在围压高达 2000 kPa 时转化为“完全流动”。这表明, 随着围压的升高, 松砂和中密砂在剪切过程中更容易发生剪缩现象。对于密砂, 随着围压增加, 试样的应力-应变关系从完全的应变硬化型转变为略微的应变软化型, 其峰值强度并不显著。有效应力路径从“不流动”逐步转变为“有限制的流动”。这表明, 在围压下, 试样由完全的剪缩逐渐过渡到先剪缩后剪胀的行为特征。

Yang 等<sup>[30]</sup>针对中密( $D_r=50\%$ )的 Toyoura 砂开展了不排水条件下的循环三轴剪切试验, 如图 7 所示。其中, 试样的初始围压为 300 kPa, 循环应力比为 0.53。从图 7 中可以看出, 本文建立的模型能够有效地反映: ①在剪切初始阶段, 试样因发生剪缩导致其有效应力持续减小的现象; ②随着剪切的持续进行, 试样的行为呈现出剪缩与剪胀交替出现的特点。

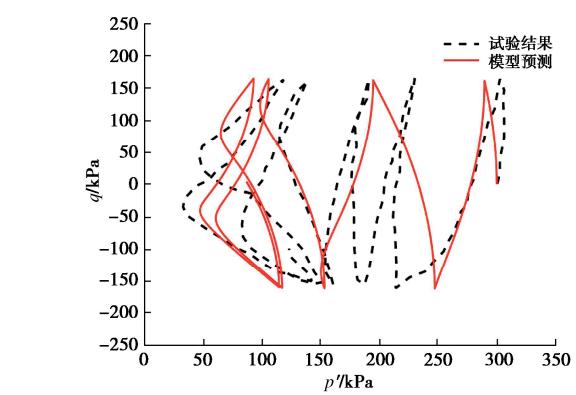
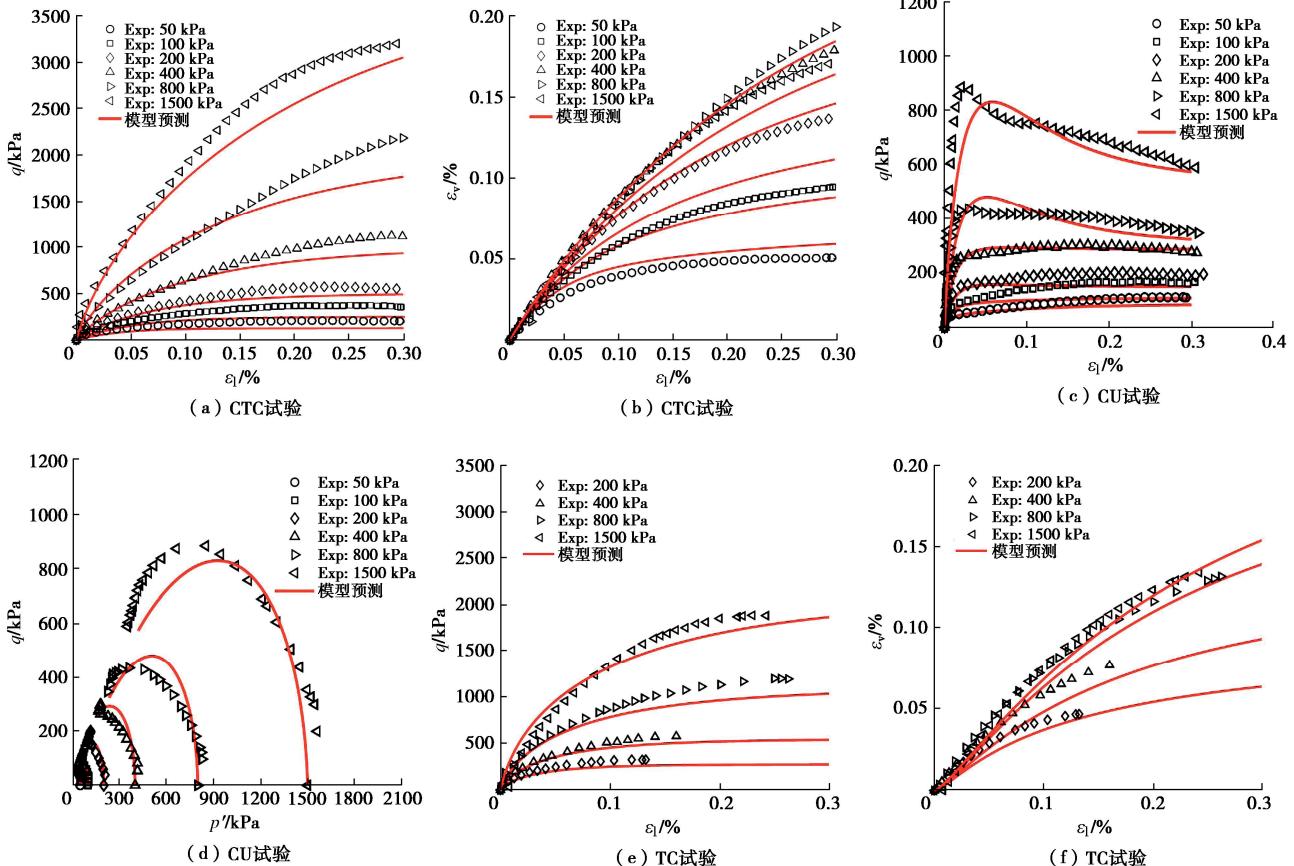


图 7 不排水条件下模型对循环三轴预测和试验结果的比较

Fig. 7 Proposed model predictions versus cyclic undrained experimental data

## (2) 情形二: 可破碎颗粒材料——钙质砂模型验证

为了进一步验证模型的有效性, 本文针对不同加载路径和围压(200~1500 kPa)下的钙质砂三轴试验结果进行了验证, 如图 8 所示。用于模型验证的钙质砂试样的最大粒径  $D_{max}=5$  mm, 初始 GSD 较差 ( $C_u=4.4$ ,  $C_c=1.14$ ,  $D_{50}=1.78$  mm), 试样尺寸为 50 mm  $\times$  100 mm。其中, 钙质砂在三轴试验前后的 GSD 都通过筛分试验测得, 以确定其在试验过程中的颗粒破碎程度。

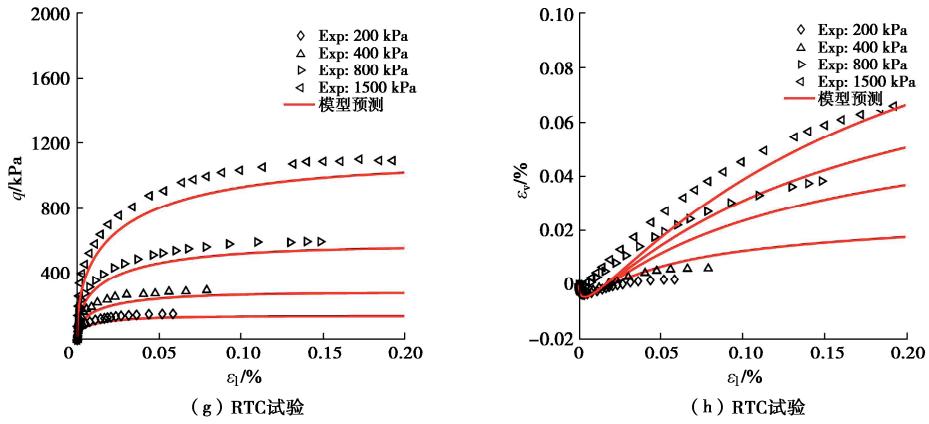


图 8 模型对不同加载条件下钙质砂的预测和试验结果的比较

Fig. 8 Proposed model predictions versus experimental data of calcareous sand under various loading conditions

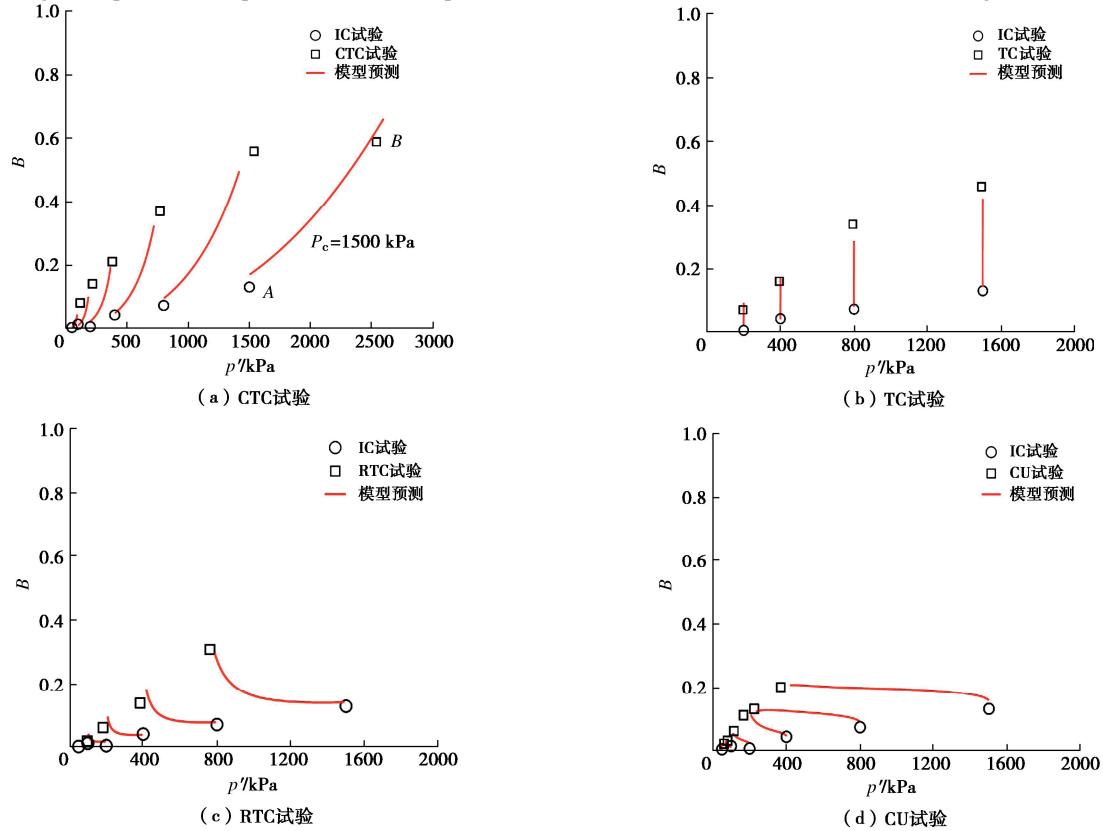


图 9 剪切过程中破碎演化模型的预测结果与试验结果的对比

Fig. 9 Breakage evolution model predictions versus experimental data of calcareous sand during shearing

关于该部分试验的详细信息可参考 Chen 等<sup>[23]</sup>的研究。从图 8 中可以看出，本文建立的模型可以较好的模拟不同加载路径和排水条件下钙质砂的应力-应变关系。对于 CTC, TC, RTC 试验，其应力-应变关系都呈现出了显著的应变硬化的特点，同时伴随着持续不断的体积收缩。这是因为钙质砂在剪切过程中易发生颗粒破碎，促进颗粒之间的排列组合，进一步填充试样内部的孔隙，导致试样产生额外的体积收缩<sup>[23]</sup>，导致试样的应力-应变关系呈现出应变硬化的特点<sup>[11]</sup>。对于 CU 试验，随着围压的增加，其应力-应变关系逐渐从应变硬化转变为应变软化，有效应力路径逐渐从“有限制

的流动”转变为“流动”。这表明，随着围压增大，试样发生了静态液化，这也与钙质砂易破碎的特点相关。

图 9 展示了本文模型对不同应力路径三轴试验过程中钙质砂颗粒破碎演化规律的模拟结果。以图 9(a)为例，A 点表示钙质砂在围压为 1500 kPa 的等压固结下发生的颗粒破碎程度；B 点则表示在该围压下，剪切结束时的颗粒破碎程度。这是由于试验只检测了钙质砂在固结完成和剪切结束时的颗粒破碎情况，未包含剪切过程中间阶段的颗粒破碎。图 9(a)中 AB 两点间的红线表示模型预测的钙质砂从剪切开始至结束过程中颗粒破碎的演化规律。结果表明，本文建立的

模型能够较好地反映钙质砂试样从固结完成到剪切结束阶段的颗粒破碎的演化趋势, 且与试验结果匹配度较高。

## 6 结 论

本文基于双曲线形式建立了与平均有效应力  $p'$  和应力比  $\eta$  有关的颗粒破碎演化模型, 并以此为基础推导了考虑颗粒破碎效应的 CSL 方程以及弹性柔度矩阵。结合上述工作, 参考 Li 等<sup>[18]</sup>, Dafalias 等<sup>[19]</sup>, 提出的状态相关的本构理论, 建立了考虑颗粒破碎影响且与状态相关的双屈服面弹-塑性本构模型。

(1) 提出了一种能够反映不同加载路径、排水条件、应力水平影响的破碎演化模型, 并基于此推导了破碎屈服面。

(2) 结合破碎演化模型, 建立了颗粒破碎和  $e-\lg p'$  平面上临界状态线截距的关系, 动态地反映了随着颗粒破碎发展, 材料 CSL 斜率不断变陡峭的特点。

(3) 推导了与颗粒破碎相关的弹性柔度矩阵, 将颗粒破碎的影响引入弹性应力-应变关系之中。

(4) 建立的模型只需要一套参数, 便能较好的预测材料在不同加载路径、排水条件及静动荷载下的应力-应变关系。

**利益冲突声明/Conflict of Interests:** 所有作者声明不存在利益冲突。All authors disclose no relevant conflict of interest.

**作者贡献/Authors' Contributions:** 陈嘉瑞, 汤耀嵒参与试验方案的设计和试验结果的分析; 张春顺提供试验指导; 陈嘉瑞, 汤耀嵒, 张春顺参与论文写作和修改。所有作者均阅读并同意最终稿件的提交。This study was designed and analyzed by CHEN Jiarui and TANG Yaolan. The experiments were supervised by ZHANG Chunshun. The manuscript was drafted and revised by CHEN Jiarui, TANG Yaolan and ZHANG Chunshun. All the authors have read the last version of manuscript and consented for submission.

## 参考文献:

- [1] 孔宪京, 刘京茂, 邹德高, 等. 紫坪铺面板坝堆石料颗粒破碎试验研究[J]. 岩土力学, 2014, 35(1): 35-40. (KONG Xianjing, LIU Jingmao, ZOU Degao, et al. Experimental study of particle breakage of Zipingpu rockfill material[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(1): 35-40. (in Chinese))
- [2] QIAN J F, ZHANG C S, ZHOU W R, et al. A thermodynamically consistent constitutive model for soil-rock mixtures: a focus on initial fine content and particle crushing[J]. Computers and Geotechnics, 2024, 169: 106233.
- [3] COOP M R, SORENSEN K K, FREITAS T B, et al. Particle breakage during shearing of a carbonate sand[J]. Géotechnique, 2004, 54(3): 157-163.
- [4] CIL M B, ALSHIBLI K A. 3D evolution of sand fracture under 1D compression[J]. Géotechnique, 2014, 64(5): 351-364.
- [5] 张家铭, 张凌, 蒋国盛, 等. 剪切作用下钙质砂颗粒破碎试验研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(10): 2789-2793. (ZHANG Jiaming, ZHANG Ling, JIANG Guosheng, et al. Research on particle crushing of calcareous sands under triaxial shear[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(10): 2789-2793. (in Chinese))
- [6] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(10): 1177-1192.
- [7] WANG G, WANG Z N, YE Q G, et al. Particle breakage evolution of coral sand using triaxial compression tests[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2021, 13(2): 321-334.
- [8] WANG G, WANG Z N, YE Q G, et al. Particle breakage and deformation behavior of carbonate sand under drained and undrained triaxial compression[J]. International Journal of Geomechanics, 2020, 20(3): 04020012.
- [9] 蔡正银, 陈元义, 朱洵, 等. 级配对珊瑚砂颗粒破碎与变形特性的影响[J]. 岩土工程学报, 2023, 45(4): 661-670. (CAI Zhengyin, CHEN Yuanyi, ZHU Xun, et al. Influences of gradation on particle breakage and deformation characteristics of coral sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, 45(4): 661-670. (in Chinese))
- [10] BANDINI V, COOP M R. The influence of particle breakage on the location of the critical state line of sands[J]. Soils and Foundations, 2011, 51(4): 591-600.
- [11] TANG Y L, ZHANG C S, LI C Y, et al. Modelling of granular materials at crushing-dominant stage[J]. Acta Geotechnica, 2024, 19(10): 6535-6551.
- [12] 蔡正银, 侯贺营, 张晋勋, 等. 考虑颗粒破碎影响的珊瑚砂临界状态与本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2019, 41(6): 989-995. (CAI Zhengyin, HOU Heying, ZHANG Jinxun, et al. Critical state and constitutive model for coral sand considering particle breakage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, 41(6): 989-995. (in Chinese))
- [13] TANG Y L, ZHANG C S, LI C Y, et al. A simple gradation-state-dependent model for granular materials[J]. Computers and Geotechnics, 2024, 170: 106274.

- [14] LIU H B, ZOU D G. Associated generalized plasticity framework for modeling gravelly soils considering particle breakage[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2013, **139**(5): 606-615.
- [15] 王兆南, 王 刚, 叶沁果, 等. 考虑颗粒破碎的钙质砂界面循环本构模型 [J]. 岩土工程学报, 2021, **43**(5): 886-892. (WANG Zhaonan, WANG Gang, YE Qinguo, et al. Cyclic bounding surface model for carbonate sand incorporating particle breakage[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2021, **43**(5): 886-892. (in Chinese))
- [16] TANG Y L, WANG S, CHEN L X, et al. A gradation-density-dependent hypoplastic model for calcareous sand with particle crushing[J]. *Géotechnique*, 2025: 1-16.
- [17] TANG Y L, WANG S, ZHANG C S. A gradation-dependent hypoplastic model for crushable sands[J]. *Acta Geotechnica*, 2024, **19**(10): 6937-6953.
- [18] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. *Géotechnique*, 2000, **50**(4): 449-460.
- [19] DAFALIAS Y F, MANZARI M T. Simple plasticity sand model accounting for fabric change effects[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, **130**(6): 622-634.
- [20] MARSAL R J. Large scale testing of rockfill materials[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1967, **93**(2): 27-43.
- [21] XIAO Y, LIU H L. Elastoplastic constitutive model for rockfill materials considering particle breakage[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2017, **17**(1): 04016041.
- [22] EINAV I. Breakage mechanics: part I: theory[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**(6): 1274-1297.
- [23] CHEN J R, TANG Y L, YE J H, et al. Effects of loading paths and initial densities on mechanical response and gradation evolution of calcareous sand[J]. *Engineering Geology*, 2025, **346**: 107908.
- [24] COOP M, LEE I. The behaviour of granular soils at elevated stresses. *Predictive soil mechanics[C]// Proceedings of the Wroth Memorial Symposium held at St Catherine's College, Oxford*, 1992.
- [25] KIKUMOTO M, WOOD D M, RUSSELL A. Particle crushing and deformation behaviour[J]. *Soils and Foundations*, 2010, **50**(4): 547-563.
- [26] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands[J]. *Géotechnique*, 1985, **35**(2): 99-112.
- [27] CHEN J R, ZHANG C S, LI C Y, et al. A state-dependent bounding surface model of coarse-grained materials considering effect of initial grain size distribution[J]. *Computers and Geotechnics*, 2024, **169**: 106187.
- [28] 张春顺, 林正鸿, 杨典森, 等. 考虑初始级配影响的粗粒土非线性弹性模型研究 [J]. 岩土力学, 2025, **46**(3): 750-760. (ZHANG Chunshun, LIN Zhenghong, YANG Diansen, et al. Nonlinear elastic constitutive model of coarse-grained soils considering the effect of initial grain size distribution[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2025, **46**(3): 750-760. (in Chinese))
- [29] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. *Soils and Foundations*, 1996, **36**(2): 81-91.
- [30] YANG J, SZE H Y. Cyclic behaviour and resistance of saturated sand under non-symmetrical loading conditions[J]. *Géotechnique*, 2011, **61**(1): 59-73.