

# 一个描述封闭系统非饱和黏土冻结变形的数学模型

吴俊成<sup>1</sup>, 鲁洋<sup>1\*,4</sup>, 张勇敢<sup>2,4</sup>, 王建<sup>1,3</sup>, 刘斯宏<sup>1,4</sup>

(1. 河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098; 2. 河海大学 地球科学与工程学院, 江苏 南京 211100; 3. 河海大学  
卓越工程师学院, 江苏 南京 210098; 4. 河海大学大坝长效特性及环保修复中西联合实验室, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 冻结作用下黏性土体的变形规律与饱和度密切相关, 呈现为低饱和度时冻缩、高饱和度时冻胀的变形特征, 针对该现象已有一些试验报道, 但理论模型方面的研究相对匮乏。基于土体冻结变形试验规律及物理机制分析, 建立了在封闭系统中统一描述非饱和黏土体冻缩-冻胀变形的数学模型。主要开展以下工作: (1) 提出有效系数  $\eta$  和有效饱和度  $S_{re}$ , 量化土体孔隙比和饱和度对冻结变形的影响, 推导了冻结体应变与孔隙比、饱和度之间的数学关系。(2) 综合考虑冻吸力的收缩作用和冰水相变的膨胀作用, 将冻结变形过程划分为“冷缩”、“冻缩”和“冰胀”三阶段, 定义临界冻结温度  $T_i$ , 求解气相在土体冻结过程中产生的变形值, 实现冻缩-冻胀现象的统一解释。本模型简单有效, 参数少; 可较好地反映冻结变形规律, 能准确预测临界饱和度。应用该模型对已报道的粉质黏土冻结试验规律进行预测, 验证了模型的有效性。

**关键词:** 非饱和黏土; 冻胀/缩; 饱和度; 孔隙比; 数学模型

**中图分类号:** TU445    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1000-

**作者简介:** 吴俊成(2003-), 男, 主要从事水工岩土等方面的研究工作。E-mail: wujuncheng@hhu.edu.cn

## A mathematical model describing the frozen deformation of unsaturated clayey soils in a closed system

WU Jun-cheng<sup>1</sup>, LU Yang<sup>1,4</sup>, ZHANG Yong-gan<sup>2,4</sup>, WANG Jian<sup>1,3</sup>, LIU Si-hong<sup>1,4</sup>

(1. College of Water Conservancy and Hydropower, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. College of Earth Science and Engineering, Hohai University, Nanjing 211100, China; 3. Graduate College for Elite Engineers, Hohai University, Nanjing 210098, China; 4. International Joint Laboratory of Long-term Behaviour & Environmentally Friendly Rehabilitation Technologies on Dams, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** The deformation pattern of frozen soil is closely related to its saturation, exhibiting shrinkage at low saturation and expansion at high saturation. While there have been experimental reports on this phenomenon, research on theoretical models remains relatively scarce. Based on the analysis of the laws governing soil freezing deformation and its physical mechanisms, a mathematical model has been established to uniformly describe the shrinkage-swelling deformation of unsaturated soil in a closed system. This work includes the following key aspects: (1) The proposal of effective coefficient  $\eta$  and effective saturation  $S_{re}$  to quantify the influence of pore size and saturation on freezing deformation, along with deriving the mathematical relationship between freezing volumetric strain and void ratio as well as degree of saturation. (2) Based on the freeze shrinkage mechanism induced by cryogenic suction and ice phase expansion, the freezing deformation process can be described into three stages: cold shrinkage, frost shrinkage, and ice expansion. Additionally, the critical frost shrinkage temperature  $T_i$  is defined to estimate the deformation generated by gas phase during soil freezing, thereby achieving a unified explanation for the swelling-shrinkage deformation under freezing. This model is characterized by its simplicity, effectiveness, and minimal parameters; it can effectively reflect patterns in freezing deformation and accurately predict its critical degree of saturations. Application of this model to predict results from some reported freezing tests conducted on fine-grained clay has validated its rationality and effectiveness.

**Key words:** Unsaturated clayey soils; Frost expansion/shrinkage; Degree of saturation; Void ratio; Mathematical model

## 0 引言

受严寒气候及周期性温差变化的影响, 寒区工程常遭遇冻结、冻融作用, 工程病害问题较常规地区尤为严重<sup>[1-3]</sup>。在冻结状态下, 土体的冻结变形特征受饱

和度等因素影响显著, Hamilton<sup>[4]</sup>针对 5 种 Alberta clay 开展封闭系统下的单向冻结试验, 发现在低饱和度时

基金项目: 国家自然科学基金(52109123; 52279099; 52479099); 水利部水库大坝安全重点实验室开放研究基金(YK324005)

1 收稿日期: 2024-04    \*通信作者(E-mail: luy@hhu.edu.cn)

发生冻缩、高饱和度发生冻胀，且在初始饱和度为 0.86~0.9 范围内的冻结体变为零，即既不发生冻缩、也不发生冻胀；刘振亚等<sup>[5]</sup>开展了不补水条件下的三维等压控温冻结变形试验，发现初始饱和度对粉质黏土的冻结变形呈现出类似的规律，冻缩-冻胀变形转换的饱和度分界值为 0.75；Lu 等<sup>[6]</sup>针对南水北调中线的弱膨胀土，开展了 3 种不同初始饱和度下的冻融循环试验并进行体积跟踪量测，发现冻结变形稳定时，低饱和度时 ( $S_r=0.63$  和 0.84) 呈现为冻缩、高饱和度时 ( $S_r=0.97$ ) 为冻胀。可见，在封闭系统条件下（无外界补水），诸多试验均发现“低饱和度冻缩、高饱和度冻胀”的冻结变形规律。然而，关于初始饱和度对冻胀-冻缩变形影响的理论模型还相对缺乏，构建一个能够解释该变形作用机制并可统一描述冻胀冻缩变形演化规律的理论模型具有重要的科学意义。

理论模型的构建往往需要基于对物理过程的全面认识。土体在封闭系统下冻结时，发生冻胀或冻缩变形的过程较为复杂，相关学者基于试验规律提出不同的猜想或观点。其中，对于“冻胀”现象的机理认识较为统一，通常认为发生冻胀的原因是原位水分和迁移水分的冰水相变导致的体积膨胀<sup>[7]</sup>；而对于“冻缩”现象的机理认识目前尚不一致。一方面，有学者认为可能是冻结过程中，液态孔隙水减少导致的类似“干燥收缩”<sup>[4]</sup>，也有学者指出发生冻缩现象是因为冻结黏聚力的提高与冰胶结作用<sup>[5]</sup>。此外，非饱和土力学领域的相关学者认为土体发生冻缩变形是由于冻结过程中基质吸力发生小幅增加<sup>[8]</sup>，并将其直观解释为是“冻吸力”（Cryogenic suction）诱导引起的<sup>[6]</sup>。

针对土的冻结变形特征，诸多学者开展了理论模型研究，以期为变形预测提供支撑。凌贤长等<sup>[9]</sup>建立了非饱和膨胀土水-热-变形耦合冻胀模型，解耦出非饱和膨胀土冻结过程中的冻胀分量与膨胀分量，但对冻缩现象并未述及；Dagesse<sup>[10]</sup>通过对 Hamilton<sup>[4]</sup>的土体冻结变形试验数据进行函数拟合，得到冻胀和冻缩变形的统一计算公式，但仅为纯数学上的拟合，参数无确切的物理含义，未能考虑影响变形的内在物理机制；Liu 等<sup>[11]</sup>创新地将土的低温冻缩与常温等向压缩过程进行类比，基于常温力学过程间接估算出由冻结黏聚力引起的体缩应变。上述学者在描述冻结变形机制和建立理论模型做出了诸多有益尝试与贡献，但目前还尚未建立一种既能考虑低温冻结过程物理机制、又能统一描述冻缩冻胀变形规律的预测模型。

鉴于此，本文基于土的冻胀冻缩变形试验规律，从冻土力学和非饱和土力学的交叉角度解译低温冻结过程土体变形的物理机制，综合考虑冻吸力的收缩作用和冰水相变的膨胀作用，对土体冻结状态中液气冰

三相诱导的体应变进行计算，建立了统一描述土体冻胀冻缩变形的数学模型，并应用该模型描述已报道的粉质黏土冻结试验规律，验证了模型的有效性。

## 1 试验规律

笔者和相关学者曾相继开展了不同类型黏土的冻结变形试验，考察其冻结变形并总结出相应的试验规律，主要考虑了土体初始饱和度、孔隙比、冻融次数等因素的影响。为便于本文理论模型的构建，下面首先对相关试验规律及其影响因素进行概括性总结。

### 1.1 初始饱和度的影响

Lu 等<sup>[6]</sup>针对南水北调中线的弱膨胀性黏土（液限 42.6%，塑限 22.5%，比重 2.72），开展了封闭系统下的循环冻融试验，考察了每个循环冻融过程中土样的冻结-融化变形规律。试验结果表明，不同初始饱和度工况下，多次冻结变形均呈现出“低饱和度时发生冻缩变形 ( $S_r=62.9\%$  和 83.9%)、高饱和度时发生冻胀变形 ( $S_r=96.5\%$ )”的试验规律（图 1）。

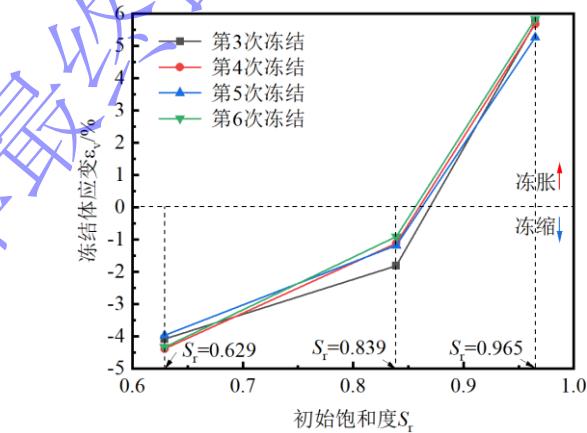
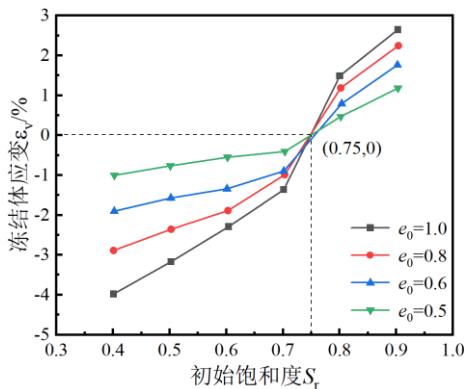


图 1 某黏性土的冻结体应变试验规律<sup>[6]</sup>

Fig.1 Frozen volumetric strain of a clayey soil under cyclic freeze-thaw condition

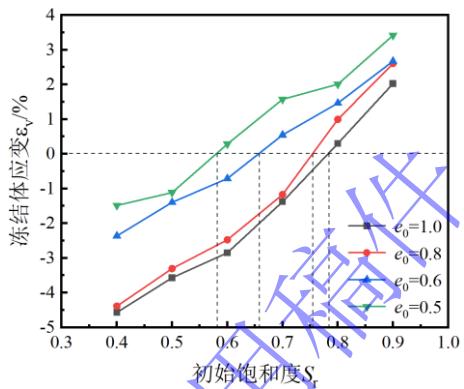
### 1.2 初始饱和度和孔隙比的耦合作用

刘振亚等<sup>[5]</sup>针对非饱和粉质黏土（液限 31.2%，塑限 18.3%，比重 2.72）开展了封闭系统下的单次冻结试验，揭示了初始饱和度和孔隙比对冻结变形规律的耦合作用（图 2），试样的冻结体应变同样呈现出“低饱和度时冻缩、高饱和度时冻胀”的显著特征。特别地，当冻结体应变为 0 时（既不发生冻缩、也不发生冻胀），不同初始孔隙比试样对应的冻结体应变与初始饱和度关系曲线大致相交于同一点，对应的初始饱和度大致为 0.75，本文暂将其定义为“临界饱和度”指标。可见，该“临界饱和度”指标在实际工程中可有效缓解冻结变形引起的冻害，对开展冻害预防、运行维护有着重要的工程指导意义。

图 2 某粉质黏土的冻结体应变试验规律<sup>[5]</sup>Fig.2 Frozen volumetric strain of silty clay under 1<sup>st</sup> freezing

### 1.3 初始饱和度、孔隙比和冻融次数的耦合影响

刘振亚等<sup>[12]</sup>曾进一步报道了循环冻融条件下粉质黏土的三维等压控温冻结变形试验（试验土的参数同 1.2 节），以第五次冻结状态下土样的冻结变形试验规律为例（图 3）。粉质黏土初始饱和度在 0.4~0.9 之间时，冻结体应变随初始饱和度的增加逐渐由“冻缩”转变为“冻胀”。然而，此时不同初始孔隙比时试样的临界饱和度也各不相同（不同于图 2 中相交于一点），可见，循环冻融作用对不同初始孔隙比试样临界饱和度的演变规律影响较为显著。

图 3 第五次冻结时某粉质黏土的冻结体应变试验规律<sup>[12]</sup>Fig.3 Frozen volumetric strain of silty clay under 5<sup>th</sup> freezing

### 1.4 试验规律小结

封闭系统环境下（无外界补水条件），土体在冻结过程中，普遍呈现出“低饱和度时发生冻缩，高饱和度时发生冻胀”的变形特征。特别地，当土样处于较高饱和度范围时，存在一个既不发生冻缩也不发生冻胀的“临界饱和度”，针对这一特征饱和度的准确预测，具有重要的工程冻害防治指导意义。

## 2 数学模型

针对土的冻胀冻缩变形试验规律，下面基于冻土力学和非饱和土力学的相关理论，提出一个可统一描

述冻结变形的理论模型。下面对模型假设、概念定义以及公式推导进行详细阐述：

### 2.1 模型假设

冻结过程中冰相出现时，冰相的压力往往大于液相的压力，Nishimura<sup>[13]</sup>指出冰水界面相互作用的微观状态可由图 4 所示，冰水相压力之间的定量关系可采用 Clapeyron 方程来描述<sup>[14]</sup>：

$$\frac{u_l}{\rho_l} - \frac{u_i}{\rho_i} = L \ln \frac{T}{T_0} \quad (1)$$

其中， $u_l$  和  $u_i$  分别为液相和冰相压力，Pa； $\rho_l$  和  $\rho_i$  分别为水和冰密度，kg/m<sup>3</sup>； $L$  为相变潜热，水取 333.5 kJ/kg； $T$  为冻结后的温度，K； $T_0$  代表冻结前的温度，K。

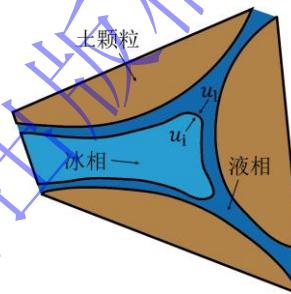
图 4 冻结过程中的微观状态<sup>[13]</sup>

Fig.4 Micro-configuration of process in freezing

借鉴非饱和土力学中“吸力”（Suction）的概念，Thomas<sup>[14]</sup>将液相压力  $u_l$  与冰相压力  $u_i$  的差值  $S_t$  定义为“冻吸力”（Cryogenic suction），并给出数学表达式。类似于非饱和土体的干燥过程，吸力增大，体积发生收缩；类似地，冻结过程中，冻吸力  $S_t$  的增大会使得孔隙收缩，联立式(1)，冻吸力的数学形式可表达为：

$$\begin{cases} S_t = u_l - u_i \\ u_i = \rho_i \left( \frac{u_l}{\rho_l} - L \ln \frac{T}{T_0} \right) \\ S_t = u_l - \rho_l \left( \frac{u_l}{\rho_l} - L \ln \frac{T}{T_0} \right) \approx \rho_l L \ln \frac{T}{T_0} \end{cases} \quad (2)$$

此外，土体内部孔隙主要被孔隙气和孔隙水占据，其中气相的赋存形态与其饱和度密切相关。包承纲先生曾指出，在研究非饱和土的气相形态时，应将关注点放在两类主要形态上，即部分连通形态与内部联通形态<sup>[15]</sup>。Alonso 等认为土体浸水过程中，先饱和的是集聚体内部的小孔隙，进而集聚体间的大孔隙逐渐饱和，只有当水分开始填充大孔隙时，土体的宏观力学行为才会受到饱和度变化的影响，并提出有效饱和度概念<sup>[16,17]</sup>。借鉴上述学术观点以及冻土力学和非饱和土力学中的一些共性理论认识，针对封闭系统中非饱和土的冻结变形过程，做出如下假设：

**假设 1:** 土体内部的孔隙可分为有效孔隙和无效孔隙。所谓有效孔隙，即是在土体冻结过程中，能稳定地与外界大气不相连通的孔隙；“有效”即为在冻结过程中受冰-水界面张力（冻吸力）增加使得孔隙体积缩小的能力；而无效孔隙则是不满足上述条件的孔隙。通常，土体在高饱和度下的孔隙多为有效孔隙，而低饱和度时多为无效孔隙，无效孔隙中冰相少，无法稳定封闭孔隙。冻结过程中，土体中的已冻水（土体降至某一温度时已经结冰的水定义为已冻水）可近似认为基本赋存于有效孔隙之中。

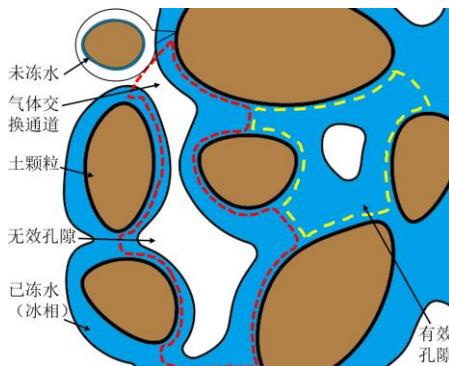


图 5 无效孔隙与有效孔隙的示意图

Fig.5 Schematic diagram of ineffective and effective pores

**假设 2:** 土体降温过程分可划分为三个阶段，按时间依次是：冷缩阶段、冻缩阶段和冰胀阶段（图 6）。当温度处于土体冰点  $T_f$  以上时，因热胀冷缩土体体积缓慢缩小；当温度低于  $T_f$  时出现冰相，冰水交界面处产生冻吸力，有效孔隙发生体积收缩，最终以增大孔隙气压的方式平衡，在宏观上表现为土体冻缩，这与相关试验现象具有一致性<sup>[18]</sup>。随着温度继续降低，冰相的增加使得土骨架产生膨胀变形，由冻缩转为冻胀趋势对应的温度定义为临界冻缩温度  $T_i$ 。此外，大量试验证实：在降温过程中，未冻水含量先减小后逐渐趋于恒定<sup>[19]</sup>，故冻结体应变也随温度的下降趋于稳定，并呈现为：低饱和度冻缩，高饱和度冻胀。

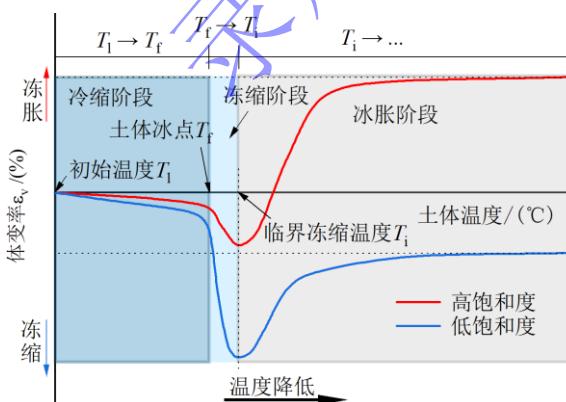


图 6 降温过程中土体变形的三个阶段示意图

Fig.6 Three stages of deformation during the cooling process

## 2.2 相关定义

### (1) 有效孔隙率（有效系数）

有效孔隙体积与土体总体积的比值为有效孔隙率  $n'$ ，其与孔隙率  $n$  的关系如下：

$$n' = \eta n = \eta \frac{e}{e+1} \quad (3)$$

其中， $\eta$  为有效系数。

### (2) 已冻水含量

有效孔隙中已冻水与有效孔隙中所有水体积之比为已冻水含量  $\theta_1$ 。

$\theta_1$  为土体内未冻水体积与水的体积之比，其关系式如下：

$$\theta_1 = \omega_u \cdot \frac{G_s}{e \cdot S_r} \quad (4)$$

其中： $\omega_u$  为未冻水含量， $G_s$  为土体比重， $S_r$  为土体饱和度， $e$  为孔隙比；

$\theta_2$  为土体内已冻水体积与水的体积之比，其关系式如下：

$$\theta_2 = 1 - \omega_u \frac{G_s}{e \cdot S_r} \quad (5)$$

根据假设 1 可知，已冻水可认为主要存在于有效孔隙中，而未冻水按  $\eta$ : $(1-\eta)$  分布在有效孔隙和无效孔隙中。即  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  和  $\eta$  满足如下关系：

$$\theta_i = \frac{\theta_2}{\theta_1 \cdot \eta + \theta_2} \quad (6)$$

联立 (4)、(5) 和 (6) 解得未冻水含量  $\omega_u$  与已冻水含量  $\theta_i$  的关系如下：

$$\theta_i = \frac{1 - \omega_u \frac{G_s}{e \cdot S_r}}{\omega_u \frac{G_s}{e \cdot S_r} \eta + 1 - \omega_u \frac{G_s}{e \cdot S_r}} \quad (7)$$

其中，未冻水含量  $\omega_u$  可由徐学祖等<sup>[20]</sup>的经验模型确定：

$$\frac{\omega_0}{\omega_u} = \left( \frac{T}{T_f} \right)^b \quad (T < T_f) \quad (8)$$

式中， $T_f$  指土体冰点（℃）， $\omega_0$  指土样初始含水率， $\omega_u$  指土样在温度  $T$  时的未冻水含量；本模型中  $T$  取冻结状态下的土样最终温度；对于非饱和粉质黏土， $b$  值约为 0.51<sup>[21]</sup>。

刘振亚等<sup>[12]</sup>指出粉质黏土冰点可由拟合效果较好的公式 (9) 表达，再根据饱和度、含水率和孔隙比的关系即可求得特定饱和度下对应的未冻水含量  $\omega_u$ 。

$$T_f = -5.85e^{\left(\frac{-\omega}{6.07}\right)} - 0.07 \quad (9)$$

其中,  $T_f$  为土体的冰点(°C);  $\omega$  为土体的含水率(%);

### (3) 有效饱和度

土体有效孔隙内水的体积与有效孔隙体积之比定义为有效饱和度  $S_{re}$ 。

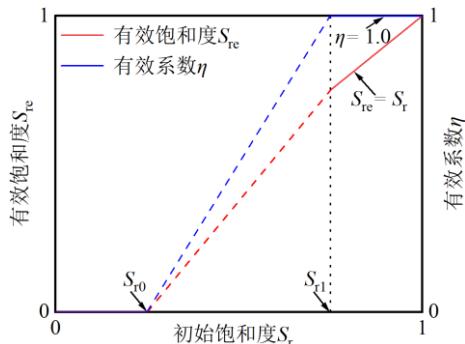


图 7 有效系数、有效饱和度与初始饱和度的关系

Fig.7 The relationship between effective coefficient, effective saturation and initial saturation

图 7 为有效系数、有效饱和度与初始饱和度的关系示意图。 $S_{r0}$  指首先出现有效孔隙时的初始饱和度。 $S_{r1}$  指的是土体孔隙全为有效孔隙时的初始饱和度。此外, 虚线段仅为示意, 并非真实曲线的情况, 真实曲线的详细推导如下:

当  $\eta=0$  时, 即此时土体内不存在有效孔隙, 根据定义此时有:

$$S_{re} = 0 \quad (10)$$

当  $\eta \neq 0$  时, 由假设 1 可知, 有效孔隙内的水包括土体内的已冻水和有效孔隙内的未冻水; 有效孔隙体积  $V_{ve}$  和有效孔隙中水的体积  $V_{we}$  有如下关系:

$$V_{ve} = \eta V_v = \eta \frac{V_w}{S_r} \quad (11)$$

$$V_{we} = (\theta_1 \cdot \eta + \theta_2) V_w \quad (12)$$

联立 (9) 和 (10), 可得  $S_{re}$  与  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  和  $S_r$  的关系如下:

$$S_{re} = \frac{V_{we}}{V_{ve}} = \frac{(\theta_1 \eta + \theta_2)}{\eta} S_r \quad (13)$$

进一步地, 联立式 (4) 和 (5), 即可得  $S_{re}$  和  $S_r$  的关系如下:

$$S_{re} = \frac{\omega_u \frac{G_s}{e} S_r \eta + \left(1 - \omega_u \frac{G_s}{e} S_r\right)}{\eta} S_r \quad (14)$$

### 2.3 有效孔隙的体积变化

已知土体的饱和度  $S_r$ , 孔隙率  $n$ , 孔隙比  $e$ , 已冻水含量  $\theta_i$ , 有效孔隙率  $n'$ 。降温前后的土体温度分别为  $t_1$ ,  $t_2$ ; 对于每个土体单元的有效孔隙, 降温前后对应的气体摩尔体积为  $v$ ,  $v'$ ; 由物质的量的关系可知, 对于气体, 物质的量  $n$ 、气体摩尔体积  $v$  和气体体积  $V_g$  有如下关系:

$$V_g = vn \quad (15)$$

冻结前后, 有效孔隙内气体的物质的量  $n$  不变, 降温前后有效孔隙内的气体体积  $V_{Gi}$ ,  $V_{Gi}'$  关系如下:

$$\frac{v'}{v} = \frac{V_{Gi}'}{V_{Gi}} \quad (16)$$

封闭系统下, 降温前后有效孔隙内水(降温后为液态水和固态水两相之和)的体积分别为  $V_{li}$ ,  $V_{li}'$ , 则其与已冻水含量  $\theta_i$  之间满足如下关系:

$$\left( \frac{10}{9} \theta_i + 1 - \theta_i \right) V_{li} = \left( 1 + \frac{1}{9} \theta_i \right) V_{li}' = V_{li}' \quad (17)$$

降温前各有效孔隙中气体的体积之和即为降温前有效孔隙部分的气体的总体积  $V_G$ , 降温前有效孔隙部分水的总体积  $V_l$  同理。

$$\begin{cases} \sum V_{Gi} = V_G \\ \sum V_{li} = V_l \end{cases} \quad (18)$$

降温后各有效孔隙中气体的体积之和即为降温后有效孔隙部分的气体的总体积  $V_G'$ , 降温后对应水的体积  $V_l'$  同理。

$$\begin{cases} \sum V_{Gi}' = V_G' \\ \sum V_{li}' = V_l' \end{cases} \quad (19)$$

有效孔隙中水与气体的体积之和为有效孔隙总体积, 降温前后有效孔隙的总体积  $V_e$ ,  $V_e'$  有如下关系:

$$\begin{cases} V_G + V_l = V_e \\ V_G' + V_l' = V_e' \end{cases} \quad (20)$$

解 (18) 得  $V_e$ ,  $V_e'$  有如下关系:

$$V_e' = \left( \frac{v'}{v} - 1 \right) V_G + \frac{1}{9} \theta_i V_l + V_e \quad (21)$$

有效孔隙体积增量  $\Delta V_e$  与  $V_e$ ,  $V_e'$  有如下关系:

$$\Delta V_e = V_e' - V_e \quad (22)$$

根据有效饱和度定义, 可得  $V_G$ ,  $V_l$  有如下关系:

$$\begin{cases} V_G = (1 - S_{re})V_e \\ V_l = S_{re}V_e \end{cases} \quad (23)$$

联立上述公式, 得  $\Delta V_e$  与  $S_{re}$ 、 $\theta_i$ 、 $V_e$  有如下关系:

$$\Delta V_e = \left[ \left( \frac{\nu'}{\nu} - 1 \right) (1 - S_{re}) + \frac{1}{9} \theta_i S_{re} \right] V_e \quad (24)$$

若土体总体积为  $V$ , 根据有效孔隙率  $n'$  定义可得:

$$\frac{V_e}{V} = n' = \eta \frac{e}{e+1} \quad (25)$$

进一步整理得:

$$\frac{\Delta V_e}{V} = \eta \left[ \left( \frac{\nu'}{\nu} - 1 \right) (1 - S_{re}) + \frac{1}{9} \theta_i S_{re} \right] \frac{e}{e+1} \quad (26)$$

## 2.4 土体冻结应变

经典土力学认为, 土颗粒本身固相的体积一般认为不发生变化, 土体体积的增量取决于土体内孔隙体积的改变。结合本文假设, 土体冻结过程中, 仅有有效孔隙发生了体积改变, 则土体体积增量  $\Delta V$  与有效孔隙体积增量  $\Delta V_e$  满足如下关系:

$$\Delta V = \Delta V_e \quad (27)$$

进一步, 根据冻结应变  $\varepsilon_v$  定义:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} \quad (28)$$

最终, 整理得到  $\varepsilon_v$  的数学表达式为:

$$\varepsilon_v = \eta \left[ \left( \frac{\nu'}{\nu} - 1 \right) (1 - S_{re}) + \frac{1}{9} \theta_i S_{re} \right] \frac{e}{e+1} \quad (29)$$

## 3 模型参数确定

根据公式(29), 结合上一节中的相关理论推导可知, 本文所提计算模型的未知量或参数包括 2 类(饱和度、孔隙比、比重、冻结温度及未冻水含量等物理参数可通过试验直接获得), 具体如表 1 所示:

表 1 未知量及所需参数

Table 1 Unknown quantity and additional parameters

类型	未知量	参数数量	所需参数
1	有效系数 $\eta$	1	$\eta$
2	降温前后的气体摩尔体积 $\nu, \nu'$	1	$T_i$

### 3.1 有效系数 $\eta$ (有效孔隙率 $n'$ )

低饱和度时(图 8(a)), 吸附作用下土中的少量液相更多以未冻水形式存在, 有效孔隙较少, 有效系数几乎为 0。高饱和度时(图 8(b)), 有效孔隙广泛分布, 即使存在局部封闭空间, 整体也可看作更大的有效孔

隙, 此时有效系数随着饱和度的增加将迅速增加, 并逐渐趋近于 1。

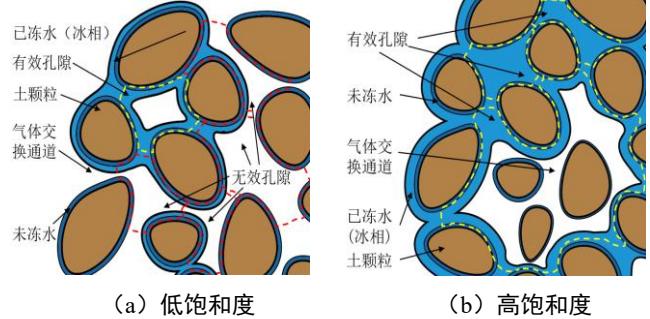


图 8 不同饱和度土体内部孔隙分布形态示意图

Fig.8 Distribution of soil internal pores under different saturations

图 7 已给出了有效系数与初始饱和度的关系示意图, 下面给出一种满足该规律的具体幂函数表达式, 如式(30)所示, 使用其他合理的函数形式也可以。图 9 所示为不同参数下该函数计算得到的结果。其中  $S_{r0}, q$  是该函数的参数。

$$\eta(S_r) = \begin{cases} 0 & S_r < S_{r0} \\ 1 - \frac{(S_r - 1)^q}{(S_{r0} - 1)^q} & S_{r0} < S_r < 1 \end{cases} \quad (30)$$

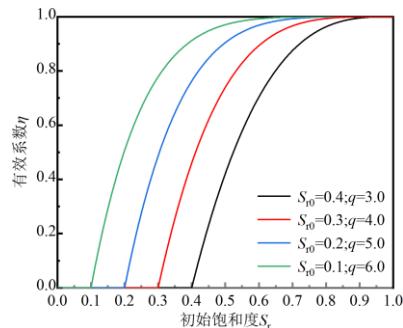


图 9 公式(30)得到的有效系数  $\eta$  的分布线

Fig.9 The distribution line of effective coefficients by formula (30)

### 3.2 降温前后的气体摩尔体积 $\nu, \nu'$

通常来说, 降温前后的气体摩尔体积( $\nu, \nu'$ )可根据试验测量得出, 而在实际计算时, 大多采用实际气体状态方程近似计算。雷德利希-邝氏状态方程(Redlich-Kwong equation of state, 简称 RK 方程)是一种适用于低温气体状态的形式简洁、精度较高的显式方程<sup>[22]</sup>, 下面选用 RK 方程计算, 其表达式如下:

$$p = \frac{RT}{\nu - b} - \frac{a}{\sqrt{T}\nu(\nu + b)} \quad (31)$$

式中,  $p$  为气体压强, Pa;  $R$  为气体常数, 通常取 8.314J/(mol·K);  $T$  为温度, K;  $\nu$  为气体摩尔体积, m<sup>3</sup>/mol;  $a$  为常数, 用于修正分子间引力;  $b$  为常数, 用于修正体积; 常数  $a, b$  存在理论解, 分别如下:

$$\begin{cases} a = \frac{0.4275R^2T_c^{5/2}}{P_c} \\ b = \frac{0.08664RT_c}{P_c} \end{cases} \quad (32)$$

式中,  $P_c$  为临界压力, Pa;  $T_c$  为临界温度, K;  $R$  为气体常数; 以空气为例:  $T_c=126.0\text{K}$ ;  $P_c=3394387.5\text{Pa}$ 。

设  $p$  和  $p'$  分别为降温前后的孔隙气压力, 其中  $p$  等于环境气压, 取  $p=101.325\text{kPa}$ 。根据假设 2, 降温后冰水交界面产生冻吸力  $S_t$ , 有效孔隙发生体积收缩, 最终以增大孔隙气压的方式平衡, 则  $p'$  可表达为:

$$p' = p + |S_t| \quad (33)$$

式中, 冻吸力  $S_t$  采用式(2)进行计算。考虑到冻吸力的作用主要体现在冻缩阶段, 故  $T_0$  取土体冰点  $T_f$ , 而  $T$  取临界冻缩温度  $T_i$ , 根据试验结果拟合反演得到。对粉质黏土,  $T_f$  可采用式(9)计算。

## 4 模型验证

由公式(29)可知, 参数  $\eta$  和  $v'$  确定后, 即可求解指定饱和度和孔隙比下的土体冻结体应变。本文将参数确定的过程简化为约束优化问题, 即: 将部分试验数据作为已知量, 选用决定系数  $R^2$  作为约束优化标准, 随后采用反演参数对整个试验范围的冻结体应变进行预测, 并与试验结果进行对比分析, 以验证模型的有效性和鲁棒性。通常, 若能够采用较少试验数据的反演参数实现对整个试验规律的预测, 则说明模型有较好的物理机制解释能力, 下面选用刘振亚等<sup>[5,12]</sup>的试验结果对模型进行验证, 具体流程如图 10 所示。

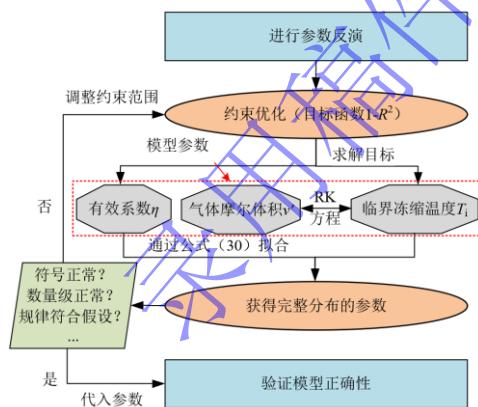


图 10 模型验证的流程图

Fig.10 Flow chart of model validation

### 4.1 单次冻结试验验证

基于刘振亚等<sup>[5]</sup>开展的粉质黏土单次冻结试验对模型进行验证。首先, 选择低饱和度范围 ( $S_r=0.4; 0.5; 0.6$ ) 的 3 组试验数据进行模型参数反演, 将得到的参数代入模型并对整体试验范围 ( $S_r=0.4\sim0.9$ ) 的土体冻结体应变进行预测, 结果如图 11(a)所示。可以看出,

预测结果基本能反映试验规律, 但在较高饱和度时, 模型的预测结果与试验点略有偏差, 这意味着上述方法在预测高饱和度试样的冻结体应变时, 其精度及适用性有所欠缺。

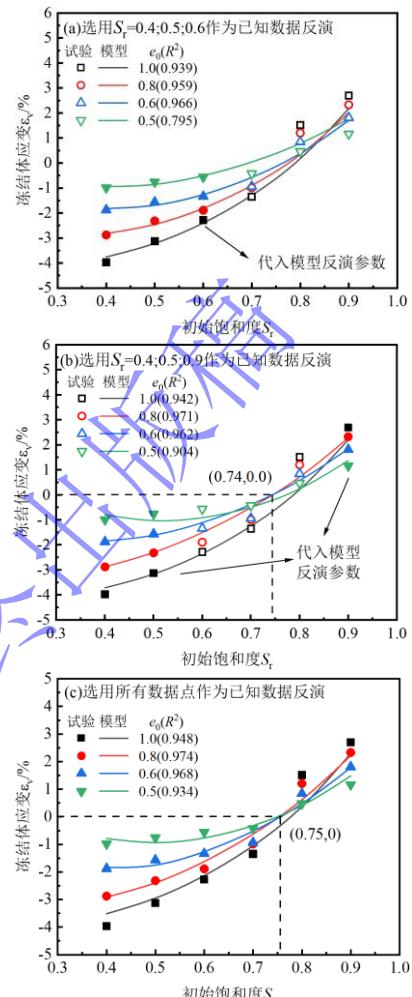


图 11 单次冻结试验<sup>[5]</sup>结果与模型预测结果对比图

Fig.11 Comparison between the single freezing test results of silty clay and the predicted results

若在较宽饱和度范围内选择 3 组不同饱和度 ( $S_r=0.4; 0.5; 0.9$ ) 试验数据进行模型参数反演, 得到的反演参数对试验范围 ( $S_r=0.4\sim0.9$ ) 的冻结体应变预测更为准确(图 11(b)), 并且不同孔隙比试样的临界饱和度预测值基本相交于一点, 其位置大致位于  $(0.74, 0)$ , 这与试验报道的临界饱和度 0.75 基本一致(图 2)。可见, 选择较宽范围的试验数据进行参数反演, 可以取得更优的预测效果。

进一步地, 采用全部试验数据进行模型参数反演, 并将其用于冻结体应变预测, 结果如图 11(c)所示。可以看出, 此时预测结果与试验结果吻合度更佳, 与图 11(b)类似, 不同孔隙比试样的临界饱和度预测值大致相交于  $(0.75, 0)$ , 这与试验报道的临界饱和度 0.75 相同。综上, 选择所有的试验数据点开展参数反演, 取得的模型预测效果最优。

## 4.2 多次冻结试验验证

为进一步验证模型的适用性，采用刘振亚等<sup>[12]</sup>开展的粉质黏土循环冻融试验来考察本文模型对多次冻结试验的预测效果，基本验证思路与 4.1 节相同。图 12 (a)、(b) 和 (c) 给出了模型预测结果，可以看出，采用三种不同的模型参数反演策略，均能较好地预测试验规律。上述结果与单次冻结工况有所不同，也即是说：随着冻结次数增加，试验结果的准确预测对模型参数反演所需数据量的要求越来越低，这可能是因为经历多次冻融循环作用后，试样的冻融变形趋于稳定，此时再次遭遇冻结作用，其冻结变形受低温环境的影响逐渐变小。此外，与其他孔隙比 ( $e_0=0.6, 0.8, 1.0$ ) 工况相比， $e_0=0.5$  时的预测结果稍微偏离试验值。

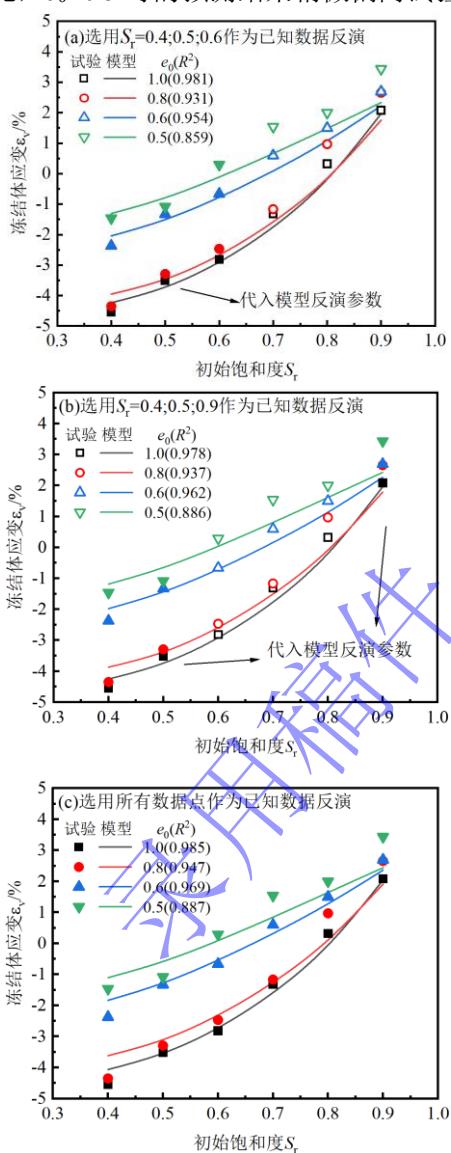


图 12 多次冻结试验<sup>[12]</sup>结果与模型预测结果对比图

Fig.12 Comparison between the muti-freezing test results of silty clay and the predicted results

事实上，如图 13 所示，上述试验土样的黏聚力与饱和度的关系呈现出较强的孔隙比相关性，即：1) 孔

隙比越小，试样越密实，颗粒间的粘结作用更强，其黏聚力越大；2) 相同孔隙比下，随着初始饱和度的增加，黏聚力基本呈现出先增大后减小的趋势，且对于较密实的试样该现象更为显著，这主要是由于压实黏土存在“双孔隙结构”<sup>[17]</sup>，此时最优含水率的“干侧”与“湿侧”的强度演化规律一般呈现相反的变化趋势。孔隙比  $e_0=0.5$  时，土样更加密实，压实土体的“双孔隙结构”特征更加显著，其物理力学行为更加复杂，本文提出的数学模型并未考虑该特殊结构特征，这可能也是  $e_0=0.5$  时的预测结果相较其他大孔隙比时吻合度略有降低的原因。

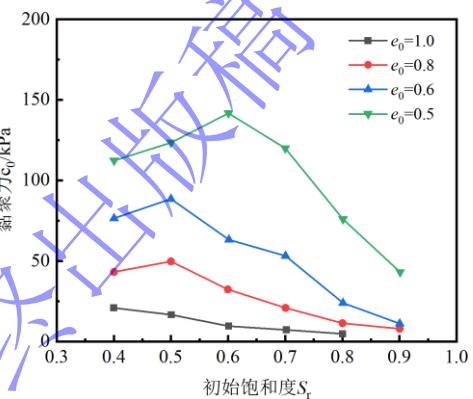


图 13 压实土样常温下饱和度与黏聚力关系曲线<sup>[5]</sup>

Fig.13 Cohesion of compacted soil samples related to the initial degree of saturation

## 4.3 模型参数演化规律

模型参数根据流程图 10 所示的步骤进行反演所得，主要包括  $\eta$  和  $\nu'$ ，其中  $\nu'$  通过临界冻缩温度  $T_i$  代入 RK 方程 (31) 所得。根据反演结果，单次冻结工况下  $T_i$  分布在 270K~271.5K 之间，而多次冻结工况下  $T_i$  分布在 270K~271K 之间，也即是说：对于同一种土， $T_i$  受初始饱和度和冻结历史影响并不敏感。胡坤等<sup>[18]</sup>的针对某黏土开展的冻胀试验中也发现：不同初始饱和度黏土的冻结变形从冻缩转变为冻胀趋势时，其临界温度基本相同，这也进一步验证了上述反演所得  $T_i$  演化规律的合理性。

图 14 (a) 和 (b) 分别给出了单次冻结和多次冻结试验预测模型中有效系数  $\eta$  的演化规律。由图可知，随着初始饱和度的增加，有效系数  $\eta$  逐渐增大，这也在一定程度上证实了图 7 假设的有效系数与初始饱和度的关系是合理的；此外，随着孔隙比的增加，有效系数  $\eta$  逐渐增大，且初始饱和度越高，不同孔隙比试样的有效系数相对差异越小。综上，从单次和多次冻结试验预测结果及其参数演化规律两个方面来说，本模型能够较好地描述封闭系统下非饱和黏土的冻结变形行为。

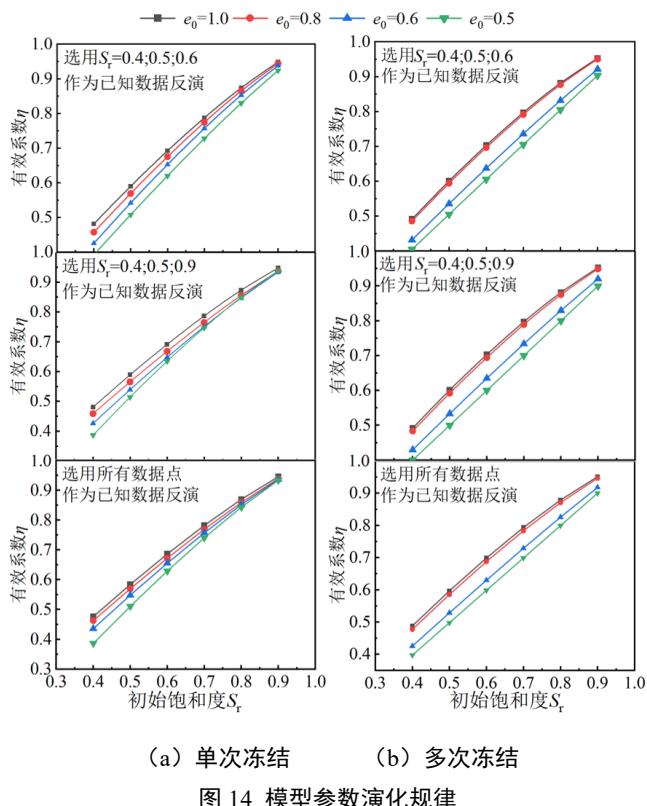


图 14 模型参数演化规律

Fig.14 Evolution of the model parameters for the model predicted results

## 5 结论

本文基于封闭系统下非饱和黏土在不同初始饱和度下的冻结变形试验现象和演化规律, 考虑冻吸力收缩和冰水相变膨胀的联合作用物理机制, 建立了统一描述封闭系统下非饱和黏土冻胀冻缩变形规律的数学模型。主要结论如下:

(1) 本模型能准确反映粉质黏土冻结体应变与饱和度和孔隙比的关系; 可较好地预测临界饱和度、反映冻结变形规律。对于其他土体的适用性有待进一步验证。

(2) 本模型综合考虑冻吸力的收缩作用和冰水相变的膨胀作用, 能刻画冻结过程的内在物理机制, 突破了现有纯数学拟合模型适用性较差的局限性。模型参数较少, 预测效果良好, 为统一描述非饱和黏土冻胀冻缩变形特征提供一种新的建模思路。

(3) 本模型在经历单次冻结及多次冻结历史非饱和黏土的变形预测中均具有良好的适用性, 具有揭示循环次数、孔隙比和饱和度与冻结变形之间内在联系的潜力。

本模型虽能较好地描述冻胀和冻缩变形规律, 但仍存在一定的局限性, 如未能考虑开放系统条件下水分迁移的影响。后续将进一步开展相关试验验证和模型优化研究。

## 参考文献:

- [1] 孙斌祥, 徐学祖, 赖远明, 汪双杰, 章金钊. 碎石粒径对寒区路堤自然对流降温效应的影响[J]. 岩土工程学报, 2004, (06): 809-814. (SUN Fu-bing, XU Xue-zu, LAI Yuan-ming, WANG Shuang-jie, ZHANG Jin-zhao. Impact of ballast grain sizes on natural convection cooling effect of embankment in permafrost regions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, (06): 809-814. (in Chinese))
- [2] 鲁洋, 刘斯宏, 张勇敢, 杨蒙, 王柳江, 李卓. 土石坝心墙掺砾土的渗透特性冻融演化规律试验研究[J]. 水力学报, 2021, 52 (05): 603-611. (LU Yang, LIU Si-hong, ZHANG Yong-gan, YANG Meng, WANG Liu-jiang, LI Zhuo. Experimental study on permeability characteristics of clay-gravel mixtures under freezing-thawing actions in core wall of earth-rock dams[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2021, 52 (05): 603-611. (in Chinese))
- [3] 张勇敢, 鲁洋, 刘斯宏, 田金博, 张思钰, 方斌昕. 土工袋抑制膨胀土冻胀性能试验及机制探讨[J]. 岩土力学, 2024, 45 (03): 759-768+796. (ZHANG Yong-gan, LU Yang, LIU Si-hong, TIAN Jin-bo, ZHANG Si-yu, FANG Bin-xin. Experimental study and mechanism exploration of soilbags for inhibiting frost heaving performance of expansive soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2024, 45 (03): 759-768+796. (in Chinese))
- [4] Hamilton A B. Freezing shrinkage in compacted clays[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1966, 3(1): 1-17.
- [5] 刘振亚, 刘建坤, 李旭, 房建宏. 毛细黏聚与冰胶结作用对非饱和粉质黏土冻结强度及变形特性的影响[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(06): 1551-1559. (LIU Zhen-ya, LIU Jian-kun, LI Xu, FANG Jian-hong. Effect of capillary cohesion and ice cementation on strength and deformation of unsaturated frozen silty clay[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2018, 37(06): 1551-1559. (in Chinese))
- [6] Lu Y, Liu S, Alonso E, Wang L, Xu L, Li Z. Volume changes and mechanical degradation of a compacted expansive soil under freeze-thaw cycles[J]. Cold Regions Science and Technology, 2019, 157: 206-214.
- [7] 周扬, 周国庆, 周金生, 王建州. 饱和土冻结透镜体生长过程水热耦合分析[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(4): 578-585. (ZHOU Yang, ZHOU Guo-qing, ZHOU Jin-sheng, WANG Jian-zhou. Ice lens growth process involving coupled moisture and heat transfer during freezing of saturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(4): 578-585. (in Chinese))

- [8] 黄佑芬, 吴道勇, 吴诗雨. 循环冻融条件下重塑硫酸盐渍土变形试验研究[J]. 冰川冻土, 2022, 44(2): 602-611. (HUANG You-fen, WU Dao-yong, WU Shi-yu. Experimental study on deformation of remolded sulfate saline soil under freeze-thaw cycles[J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2022, 44(2): 602-611. (in Chinese))
- [9] 凌贤长, 罗军, 耿琳, 唐亮. 季节冻土区非饱和膨胀土水-热-变形耦合冻胀模型[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(7): 1255-1265. (LING Xian-zhang, LUO Jun, GENG Lin, TANG Liang. Coupled hydro-thermo-deformation frost heave model for unsaturated expansive soils in seasonally frozen soil regions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(7): 1255-1265. (in Chinese))
- [10] Dagesse D F. Freezing-induced bulk soil volume changes[J]. Canadian journal of soil science, 2010, 90(3): 389-401.
- [11] Liu Z, Liu J, Li X, Fang J. Experimental study on the volume and strength change of an unsaturated silty clay upon freezing[J]. Cold Regions Science and Technology, 2019, 157: 1-12.
- [12] 刘振亚, 刘建坤, 李旭, 房建宏. 非饱和粉质黏土冻结温度和冻结变形特性试验研究[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(08): 1381-1387. (LIU Zhen-ya, LIU Jian-kun, LI Xu, FANG Jian-hong. Experimental study on freezing point and deformation characteristics of unsaturated silty clay subjected to freeze-thaw cycles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(08): 1381-1387. (in Chinese))
- [13] Nishimura S, Gens A, Olivella S, Jardine R. THM-coupled finite element analysis of frozen soil: formulation and application[J]. Géotechnique, 2009, 59(3): 159-171.
- [14] Thomas H R, Cleall P, Li Y C, Harris C, Kern-Luetsch M. Modelling of cryogenic processes in permafrost and seasonally frozen soils[J]. Géotechnique, 2009, 59(3): 173-184.
- [15] 包承纲. 非饱和土的性状及膨胀土边坡稳定问题 [J]. 岩土工程学报, 2004, (01): 1-15. (BAO Cheng-gang. Behavior of unsaturated soil and stability of expansive soil slope [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, (01): 1-15. (in Chinese))
- [16] Alonso E E, Pereira J M, Vaunat J, Olivella S. A microstructurally based effective stress for unsaturated soils. Géotechnique, 2010, 60(12): 913-925.
- [17] Alonso E E, Pinyol N M, Gens A. Compacted soil behaviour: initial state, structure and constitutive modelling[J]. Géotechnique, 2013, 63(6): 463-478.
- [18] 胡坤, 高兆国, 王少伟, 杨兆, 吴炎. 某冻胀敏感性粉质黏土冻结过程物理力学特性试验[J]. 长江科学院院报, 2023, 40(8): 127. (HU Kun, GAO Zhao-guo, WANG Shao-wei, YANG Zhao, WU Yan. Experimental Study on Physical and Mechanical Properties of a Frost Susceptible Silty Clay in Freezing Process[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2023, 40(8): 127. (in Chinese))
- [19] 应赛, 夏晓舟, 文桃, 周凤玺, 曹亚鹏, 李国玉, 章青. 基于核磁共振技术的土体冻结特征曲线试验研究 [J]. 岩土工程学报, 2024, 46 (07): 1437-1444. (YING Sai, XIA Xiao-zhou, WEN Tao, ZHOU Feng-xi, CAO Ya-peng, LI Guo-yu, ZHANG Qing. Experimental study on freezing characteristic curve of soils based on nuclear magnetic resonance technology [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2024, 46 (07): 1437-1444. (in Chinese))
- [20] 徐学祖, 王家澄, 张立新. 冻土物理学[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 42-43. (XU Xiao-zu, WANG Jia-cheng, ZHANG Li-xin. Physics of frozen soil[M]. Beijing: Science Press, 2001: 42-43. (in Chinese))
- [21] 徐学祖, 邓友生. 冻土中水分迁移的试验研究[M]. 北京: 科学出版社, 1991: 27-28. (XU Xiao-zu, DENG You-sheng. Experimental study on water migration in freezing and frozen soils[M]. Beijing: Science Press, 1991: 27-28. (in Chinese))
- [22] Sokolov M, Sadovsky N, Zuev A, Gileva L, Nguyen MH. Real gas state equations comparative analysis for low-temperature calculations[C]//E3S Web of Conferences. EDP Sciences, 2019, 140: 05007.