

# 基于稳定性与位移联系的桩固土坡极限位移解析方法

吴兵<sup>1</sup>, 李绍红<sup>2</sup>, 肖世国<sup>2\*</sup>, 梁瑶<sup>3</sup>

(1. 西南交通大学地球科学与工程学院, 四川 成都 610031; 2. 西南交通大学高速铁路线路工程  
教育部重点实验室, 四川 成都 610031; 3. 四川省交通勘察设计研究院有限公司, 成都 610017)

**摘要:** 传统的极限平衡法一般不能实现坡体稳定性与位移的联系, 无法求解坡体达到极限状态所发生的位移。为了在理论上近似解决这个问题, 以抗滑桩加固土质边坡为典型对象, 基于滑面土体的剪应力-剪切位移的非线性关系、滑体的静力平衡与各条块间的位移协调性, 考虑滑面处桩身轴力、剪力和弯矩对坡体稳定性的作用, 并通过滑体塑性变形理论计算该桩身剪力, 构建了联系位移的桩固坡体的稳定性控制方程, 推导了坡体极限位移的计算公式, 形成了桩固土坡的两种联系位移的稳定性分析方法。模型试验表明, 理论方法与试验结果吻合良好, 坡体极限位移的理论值相对于试验值的最大偏差约为 15.5%; 实例分析显示, 坡体竖向和沿滑面切向的极限位移均随距坡脚水平距离呈非线性增大特征, 坡体水平极限位移则随之略有减小; 桩固坡体的极限位移与设桩位置、桩径、桩间距、坡顶荷载以及坡体稳定性设计安全系数密切相关, 坡顶极限位移随桩位由坡脚靠近坡顶而呈非线性增大, 与桩径、桩间距之间分别呈非线性正相关性与负相关性, 与坡顶荷载、坡体稳定性设计安全系数之间均呈近似线性负相关性。所建立的方法有助于简单合理地确定桩固土坡的坡体极限位移, 为桩固土坡的联系位移的稳定性设计分析提供了一种有参考意义的便捷方法。

**关键词:** 土质边坡; 抗滑桩; 稳定性分析; 极限位移; 极限平衡法

中图分类号: TU 443 文献标识码: A

## Analysis method for limit displacement based on displacement-associated stability of piled soil slopes

Wu Bing<sup>1</sup>, Li Shaohong<sup>2</sup>, Xiao Shiguo<sup>2\*</sup>, Liang Yao<sup>3</sup>

(1. Faculty of Geosciences and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. Key Laboratory of High-speed Railway Engineering, Ministry of Education, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 3. Sichuan Communication Surveying & Design Institute Co., Ltd., Chengdu 610017, China)

**Abstract:** The classic limit equilibrium method cannot make a connection between slope stability and its displacement, and does not solve the limit displacement for the slope from a stable state to the limit state. To solve this problem approximately in theory, this study takes a piled slope as a typical object. Based on the nonlinear relationship between shear stress and shear displacement of the slip band soil, static equilibrium conditions and displacement compatibility among vertical slices of the slide mass, the control equations for the piled slope stability associated with displacements are established, in which the effects of axial force, shear force, and bending moment at the slip surface on the slope stability are considered, and the shear force is calculated using the plastic deformation theory of slide mass. The formula for the slope limit displacement is derived, and two analysis methods of the displacement-associated stability of the piled slope are provided. Some model tests show that the proposed limit displacements of piled slopes are close to the experimental results with the maximum relative error 15.5%. Case studies indicate that the vertical and tangential limit displacements of the slope are nonlinearly increasing with the horizontal distance from the slope toe, while the horizontal limit displacement slightly decreases. The limit displacements of the piled slope are closely related to the pile location, pile diameter, pile spacing, surcharge on the slope top, and design factor of safety for slope stability. The limit displacements at the slide mass top increases nonlinearly with the pile location from the slope toe to the top, they are nonlinearly positively and negatively related to the pile diameter and pile spacing, respectively, and they are approximately linearly negatively related to the surcharge and design factor of safety. The proposed method is helpful to effectively determine the limit displacement of piled slopes, and can serve as a simple reference approach to practical design and analysis of piled slope stability associated with the slope displacement.

收稿日期: 2024-08-01 修回日期: 2024-11-13

基金项目: 四川省交通勘察设计研究院有限公司资助科技项目 (No. 232022005) 和国家自然科学基金资助项目 (No.51578466)。

This work was supported by the Construction S&T Project of Sichuan Communication Surveying & Design Institute Co., Ltd. (Grant No. 232022005) and National Natural Science Foundation of China (51578466).

第一作者简介: 吴兵, 男, 1986 年生, 博士研究生, 主要从事路基边坡稳定性方面的研究。E-mail: 245603702@qq.com

通讯作者: 肖世国, 男, 1973 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事边坡稳定性与支撑结构方面的研究。E-mail: xiaoshiguo@swjtu.cn

**Keywords:** Soil slope; stabilizing pile; stability analysis; limit displacement; limit equilibrium method

## 0 引言

边坡失稳是一种常见的地质灾害。评估坡体稳定性与进行合理的工程加固是相关实践中的一项重要工作<sup>[1]</sup>。迄今,人们已经提出包括极限平衡法<sup>[2]</sup>、极限分析法<sup>[3]</sup>和数值模拟法<sup>[4]</sup>等用于分析边坡稳定性。其中,极限平衡法由于其清晰的力学概念以及简单的计算过程获得了大量关注,是边坡稳定性分析中的最常用方法。根据对潜在滑体受力分析模式的不同,极限平衡法可进一步分为条分法和整体法<sup>[5]</sup>。前者将滑体用一系列土条离散,通过各土条的局部平衡关系递推稳定系数,其包括 Bishop 法<sup>[6]</sup>、Morgenstern-Price (MP) 法<sup>[7]</sup>及传递系数法<sup>[8]</sup>;后者通过滑体整体平衡方程直接确定稳定系数,典型方法如 Bell 方法<sup>[9]</sup>。由于使用的是离散分析模式,前者相对于后者更容易拓展以考虑更多外部因素对坡体稳定性的影响。

除了稳定系数外,位移是表征边坡稳定状态的另一重要指标,将位移与稳定性相联系可完善分析方法理论体系又兼具实用价值<sup>[10]</sup>。特别地,坡体在达到极限状态(含设计极限状态)时所能产生的位移(这里称之为极限位移),反映了坡体的可滑动变形能力,对于充分认识坡体的潜在位移发展具有重要的意义。然而,除数值模拟法外<sup>[11]</sup>,多数既有边坡稳定性分析方法并未将稳定性与位移进行联系,也未实现对坡体极限位移的合理分析<sup>[12]</sup>。近年来,少数学者研究了联系位移的稳定性分析方法,可分为将位移视为外变量和内变量的两类方法。前者将土体强度参数与位移关联,通过计算不同位移状态下的强度参数进而评价土坡稳定性,典型方法如 Zou 等<sup>[13]</sup>;后者则通过转换为位移表达的稳定系数求解静力平衡方程组来评价土坡稳定性,典型方法如 Huang<sup>[14]</sup>。外变量法概念简单,但适用性有限,而内变量法兼具力学概念清晰与适用性广的特点,但个别情况下存在迭代不收敛问题,相关算法仍有缺陷。

无论是内变量还是外变量方法,以往讨论联系位移的边坡稳定性分析方法均是针对未经加固处理的坡体。实践中,对于稳定性达不到设计要求的土坡,采用包括抗滑桩在内的工程措施加固是常见的,相应的加固边坡稳定性分析对工程设计而言就尤为重要,如 Lee 和 Hull<sup>[15]</sup>、Ausilio 等<sup>[16]</sup>、Li 等<sup>[17]</sup>、Nian 等<sup>[18]</sup>、Xiao<sup>[19]</sup>,均基于极限平衡或极限分析理论提出了抗滑桩加固土坡的稳定性分析方

法。然而,这些方法仍属于传统的不涉及坡体位移的求解稳定系数范畴,未能实现抗滑桩加固边坡的稳定性与位移的联系,不能求解在稳定性设计安全系数下抗滑桩加固坡体的极限位移。

有鉴于此,本文针对抗滑桩加固土坡的稳定性问题,采用内变量模式,基于滑体极限平衡方程、土体(滑面)的剪应力-剪切位移关系、滑体各条块间的位移协调、桩体内力分析,建立坡体稳定性与位移之间的联系,推导出在稳定性设计安全系数下抗滑桩加固坡体的极限位移计算表达式,形成基于稳定性与位移联系的抗滑桩加固土坡的极限位移解析方法。

## 1 分析模型与公式推导

### 1.1 极限平衡方程

抗滑桩加固土坡简化分析模型如图 1 所示,根据极限平衡条分法,将潜在滑体 ABC 划分为  $n$  个竖直土条。图中,  $W$  表示土条自重,  $R$  和  $N$  分别表示土条底边的抗滑力和法向力,  $P$  和  $H$  分别表示土条之间的法向力和切向力,  $\beta$  表示坡角,  $x$ 、 $x_p$  分别表示土条和桩体中心距坡脚的水平距离。由土条与桩体的位置关系可将土条分为两类:一类为位于抗滑桩位置的土条(图中的土条  $j$ ),即  $x=x_p$ ;另一类为其余土条,即  $x \neq x_p$ 。与后者相比,前者需考虑抗滑桩的影响,即在静力平衡方程组中纳入在滑面处桩身截面(受荷段底端)的轴力  $N_p$ 、剪力  $Q_p$  和弯矩  $M_p$ ,这三者即为在边坡设计稳定性要求(达到指定的设计安全系数要求)下的桩体内力。

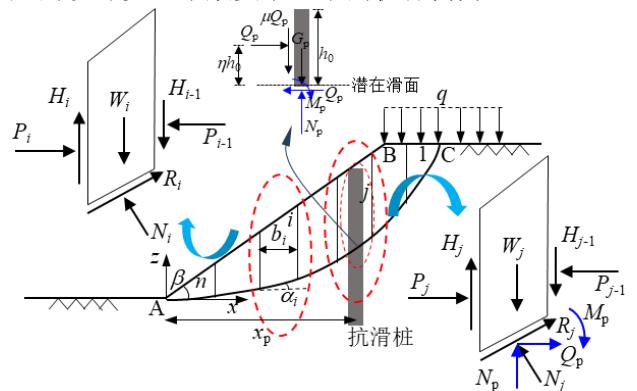


图 1 抗滑桩加固土坡简化分析模型

Fig. 1 Simplified analysis model for a piled soil slope

由桩体受荷段的静力平衡条件(图 1),可得滑面处桩身轴力  $N_p$  与剪力  $Q_p$  之间、弯矩  $M_p$  与剪力  $Q_p$  之间近似有下列关系<sup>[19]</sup>:

$$N_p = \frac{G_p}{S_p} + \mu Q_p = \frac{\gamma_p A_p h_0}{S_p} + \mu Q_p \quad (1)$$

$$M_p = \eta h_0 Q_p \quad (2)$$

式中,  $G_p$  表示桩体受荷段自重;  $\gamma_p$ 、 $A_p$  和  $S_p$  分别表示桩体重度、横截面积和桩间距;  $\mu$  表示桩-土摩擦系数;  $\eta_p$  是受荷段桩侧净推力作用系数, 与桩侧净推力分布模式相关;  $h_0$  表示受荷段桩长。

对于滑体中第  $i$  个条块, 由静力平衡条件, 可得该条块在垂直与平行滑面方向分别满足:

$$N_i = \begin{cases} (W_i + q_i) \cos \alpha_i + (P_i - P_{i-1}) \sin \alpha_i \\ + (\lambda f_{i-1} P_{i-1} - \lambda f_i P_i) \cos \alpha_i, (i \neq j) \\ (W_i + q_i) \cos \alpha_i + (P_i - P_{i-1}) \sin \alpha_i \\ + (\lambda f_{i-1} P_{i-1} - \lambda f_i P_i) \cos \alpha_i \\ - N_p \cos \alpha_i + Q_p \sin \alpha_i, (i = j) \end{cases} \quad (3)$$

$$T_i = \begin{cases} (W_i + q_i) \sin \alpha_i - (P_i - P_{i-1}) \cos \alpha_i \\ + (\lambda f_{i-1} P_{i-1} - \lambda f_i P_i) \sin \alpha_i, (i \neq j) \\ (P_i - P_{i-1}) \cos \alpha_i + (\lambda f_{i-1} P_{i-1} - \lambda f_i P_i) \sin \alpha_i \\ - N_p \sin \alpha_i - Q_p \cos \alpha_i \\ + (W_i + q_i) \sin \alpha_i, (i = j) \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $\alpha_i$  表示土条  $i$  底边水平倾角,  $q_i$  表示第  $i$  个土条的顶面荷载,  $F_s$  表示坡体稳定性设计安全系数,  $T_i$  为第  $i$  条块滑面的剪力; 根据 Morgenstern-Price 法 (MP 法) 的假设<sup>[7]</sup>,  $\lambda$  为待定常数,  $f_i$  为条间力

正弦函数,  $f_i = \sin[\pi(L_x - x_i)/(2L_x)]$ , 其中,  $x_i$  为条块  $i$  的前侧条间界面距滑面出口 O 点的水平距离,  $L_x$  为整个滑面在水平方向的投影长度。

此外, 对土条  $i$  由各力对其底边中点的力矩平衡可得:

$$P_i [z_i - 0.5b_i \tan \alpha_i] = \begin{cases} P_{i-1} [z_{i-1} + 0.5b_i \tan \alpha_i] \\ - 0.5\lambda b_i [f_i P_i + f_{i-1} P_{i-1}], (i \neq j) \\ P_{i-1} [z_{i-1} + 0.5b_i \tan \alpha_i] \\ - 0.5\lambda b_i [f_i P_i + f_{i-1} P_{i-1}] - M_p, (i = j) \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $b_i$  表示土条  $i$  的宽度,  $z_i$  表示条间法向力  $P_i$  作用点距滑面的高度。

由此, 将式(1)和(2)代入式(3)-(5)即可得到抗滑桩加固土坡稳定性的极限平衡方程。

## 1.2 联系位移的稳定性控制方程

在上述极限平衡方程中引入土体 (滑面) 剪应力-剪切位移关系, 是一种建立联系位移的稳定性控制方程的途径。实际上, 目前已有描述土体剪应力与剪切位移关系的模型<sup>[20-22]</sup>。其中, Lu<sup>[21]</sup>基于试验提出的剪应力-剪切位移关系是一种较为简单合理的模型, 其表达式为:

$$\tau_i = G \delta_i (1 + \delta_i^m / s_i)^\rho \quad (6)$$

式中,  $\tau_i$  和  $\delta_i$  分别表示第  $i$  条块滑面的剪应力和剪切位移;  $G$  表示滑面土体的线性剪切模量;  $m$ 、 $\rho$ 、 $s_i$  是无量纲数, 通过试验确定, 通常取  $m=2$ ,  $\rho$  一般取值为-0.5~0.7, 而无量纲数  $s_i$  与  $\rho$ 、法向应力  $\sigma_{ni} = N_i / (b_i \sec \alpha_i)$  之间满足:

$$s_i = -\frac{(c + \sigma_{ni} \tan \varphi)^2}{G^2} \left( \frac{2\rho}{1+2\rho} \right)^{-2\rho} (1+2\rho) \quad (7)$$

式中,  $c$  与  $\varphi$  分别为土体黏聚力和内摩擦角。

由式(6), 可得第  $i$  条块滑面的剪力  $T_i$  表达式为:

$$T_i = \tau_i b_i \sec \alpha_i \quad (8)$$

根据图 2 所示的各条块间位移协调关系, 可得第  $i$  条块的滑动位移  $u_i$ 、沿滑面剪切位移  $\delta_i$  以及水平向位移  $\omega_i$  与滑体后缘第 1 个土条的竖向位移 (称之为滑体顶部竖向位移, 简称坡顶竖向位移)  $v_0$  之间的关系, 其计算表达式分别为:

$$\begin{aligned} u_i &= v_0 \xi_i \\ \delta_i &= u_i \cos \psi = v_0 \xi_i \cos \psi \\ \omega_i &= v_0 \xi_i \cos(\alpha_i - \psi) \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $\psi$  表示滑面土体的剪胀角,  $\xi_i$  是为了简洁表达而引入的中间变量, 其表达式为:

$$\xi_i = \frac{1}{\sin(\alpha_i - \psi)} \frac{\cos(\alpha_i - 2\psi)}{\cos(2\psi - \alpha_i)} \quad (9a)$$

因此, 将式(9)先后代入式(6)、(8)再代入式(3)-(5), 经化简可得抗滑桩加固土坡的联系位移的稳定性控制方程为:

$$\begin{cases} N_i = (P_i - P_{i-1}) \sin \alpha_i + (\lambda f_{i-1} P_{i-1} - \lambda f_i P_i) \cos \alpha_i \\ + (W_i + q_i) \cos \alpha_i - N_p \cos \alpha_i \langle x \rangle + Q_p \sin \alpha_i \langle x \rangle \\ v_0 (N_i \tan \varphi + c b_i \sec \alpha_i) = \\ \chi_i \left[ (W_i + q_i) \sin \alpha_i - (P_i - P_{i-1}) \cos \alpha_i \right. \\ \left. + (\lambda f_{i-1} P_{i-1} - \lambda f_i P_i) \sin \alpha_i \right. \\ \left. - N_p \sin \alpha_i \langle x \rangle - Q_p \cos \alpha_i \langle x \rangle \right] \\ P_i [z_i - 0.5b_i \tan \alpha_i] + 0.5\lambda b_i [f_i P_i + f_{i-1} P_{i-1}] = \\ P_{i-1} [z_{i-1} + 0.5b_i \tan \alpha_i] - M_p \langle x \rangle \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $\langle x \rangle = \begin{cases} 1, x = x_p \\ 0, x \neq x_p \end{cases}$ , 是一个便于简化表达的符

号函数; 中间变量  $\chi_i$  的表达式为:

$$\chi_i = \frac{\sqrt{-s_i / (1+2\rho)} [1 - 1/(1+2\rho)]^\rho}{v_0 \xi_i \cos \psi [1 + (v_0 \xi_i \cos \psi)^2 / s_i]^\rho} \quad (10a)$$

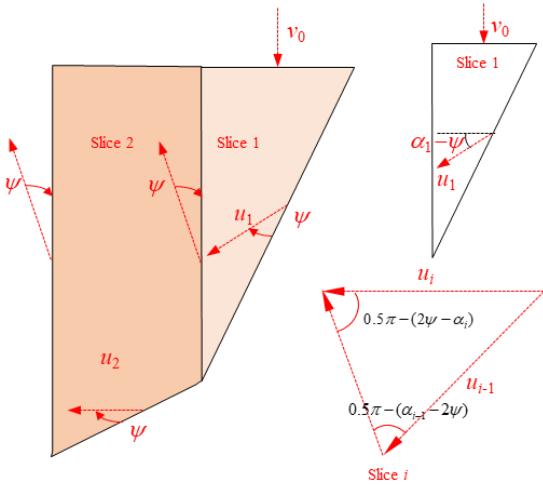


图 2 土条间的位移协调关系

Fig. 2 Displacement compatibility between soil slices

### 1.3 极限位移求解

由前述分析可见, 联系位移的桩固边坡稳定性分析实际上包括 2 个基本方面的求解, 即: 抗滑桩在滑面处设计内力 (与稳定性设计安全系数相对应)、坡顶竖向极限位移。

#### (1) 滑面处桩体设计内力

根据桩侧土体塑性变形模式(图 3), 在指定的稳定性设计安全系数  $F_s$  条件下, 桩体侧向土体推力  $p$  (沿高度的线分布力) 的简化算式<sup>[23,24]</sup>可表达为:

$$p(y) = c_0 S_p \left( \frac{S_p}{S_p - D} \right)^{\eta_1} \left[ \frac{1}{\eta_\varphi \tan \varphi_0} \right] \left[ \left( \eta_2 - 2\eta_\varphi^{0.5} \tan \varphi_0 - 1 \right) + \frac{\eta_3}{\eta_1} \right] - c_0 \left[ S_p \frac{\eta_3}{\eta_1} - 2(S_p - D) \eta_\varphi^{-0.5} \right] + \frac{\gamma y}{\eta_\varphi} \left[ S_p \left( \frac{S_p}{S_p - D} \right)^{\eta_1} \eta_2 - (S_p - D) \right] \quad (11)$$

式中,  $D$  为桩径,  $z$  表示距桩顶深度,  $\gamma$  表示土体重度; 无量纲系数  $\eta_1$ 、 $\eta_2$ 、 $\eta_3$ 、 $\eta_\varphi$  分别为:

$$\eta_1 = \eta_\varphi^{0.5} \tan \varphi_0 + \eta_\varphi - 1 \quad (11a)$$

$$\eta_2 = \exp \left[ \frac{D}{S_p - D} \eta_\varphi \tan \varphi_0 \tan \left( \frac{\pi}{8} + \frac{\varphi_0}{4} \right) \right] \quad (11b)$$

$$\eta_3 = 2 \tan \varphi_0 + 2\eta_\varphi^{0.5} + \eta_\varphi^{-0.5} \quad (11c)$$

$$\eta_\varphi = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (11d)$$

同时,  $c_0$  与  $\varphi_0$  分别为考虑稳定性设计安全系数的土体的计算黏聚力和计算内摩擦角, 采用强度折减法处理, 其表达式为:

$$c_0 = c/F_s \quad (11e)$$

$$\tan \varphi_0 = \tan \varphi / F_s \quad (11e)$$

由此, 对桩体受荷段由水平向静力平衡关系, 可得滑面处桩身设计剪力  $Q_p$  的表达式为:

$$Q_p = \int_0^{h_0} p(y) dy \quad (12)$$

于是, 将式(12)代入式(1)和(2)可得滑面处桩身轴力  $N_p$  和弯矩  $M_p$ 。

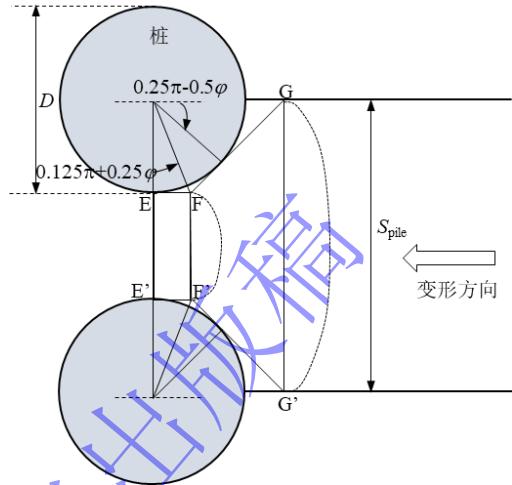
图 3 桩周土体的塑性变形模式<sup>[22-23]</sup>

Fig. 3 Plastic deformation mode of soil surrounding pile

#### (2) 滑体顶部竖向极限位移

根据式(10)中由上而下的第 3 个式子, 可变换得到  $\lambda$  的表达式为:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n 0.5b_i (P_i + P_{i-1}) \tan \alpha_i - M_p \langle x \rangle}{\sum_{i=1}^n 0.5b_i (f_i P_i + f_{i-1} P_{i-1})} \quad (13)$$

再根据式(10)中的前两个式子, 可变换得到:

$$P_i \left[ (\sin \alpha_i - \lambda f_i \cos \alpha_i) \tan \varphi_i \right] + (\cos \alpha_i + \lambda f_i \sin \alpha_i) \frac{1}{v_0} \chi_i = P_{i-1} \left[ (\sin \alpha_i - \lambda f_{i-1} \cos \alpha_i) \tan \varphi \right] + (\cos \alpha_i + \lambda f_{i-1} \sin \alpha_i) \frac{1}{v_0} \chi_i + \frac{1}{v_0} \chi_i \left[ (W_i + q_i) \sin \alpha_i - N_p \sin \alpha_i - Q_p \cos \alpha_i \right] - \left[ (W_i + q_i) \cos \alpha_i \tan \varphi_i + c b_i \sec \alpha_i - N_p \tan \varphi_i \cos \alpha_i + Q_p \tan \varphi_i \sin \alpha_i \right] \quad (14)$$

记中间变量  $A_i$ 、 $B_i$ 、 $T_i$ 、 $U_i$  分别为:

$$A_i = (\sin \alpha_i - \lambda f_i \cos \alpha_i) \tan \varphi \quad (15)$$

$$+ (\cos \alpha_i + \lambda f_i \sin \alpha_i) \frac{1}{v_0} \chi_i$$

$$B_i = (\sin \alpha_i - \lambda f_{i-1} \cos \alpha_i) \tan \varphi \quad (16)$$

$$+ (\cos \alpha_i + \lambda f_{i-1} \sin \alpha_i) \frac{1}{v_0} \chi_i$$

$$T_i = \chi_i \left[ (W_i + q_i) \sin \alpha_i - N_p \sin \alpha_i - Q_p \cos \alpha_i \right] \quad (17)$$

$$U_i = (W_i + q_i) \cos \alpha_i \tan \varphi + c_i b_i \sec \alpha_i - N_p \tan \varphi \cos \alpha_i + Q_p \tan \varphi \sin \alpha_i \quad (18)$$

将式(15)-(18)代入式(14), 经化简可得坡顶竖向极限位移  $v_0$  为:

$$v_0 = \frac{\sum_{i=1}^n T_i \prod_{j=i}^n \frac{B_{j+1}}{A_j}}{\sum_{i=1}^n U_i \prod_{j=i}^n \frac{B_{j+1}}{A_j}} \quad (19)$$

从而, 由式(9)可得第  $i$  条块的滑动极限位移  $u_i$ 、沿滑面切向极限位移  $\delta_i$  以及水平向极限位移  $\omega_i$ 。

#### 1.4 计算流程

本法所需参数包括边坡几何参数、土体物理力学参数、抗滑桩参数、稳定性设计安全系数。参数确定后, 首先采用式(12)计算桩身剪力, 再由式(1)和(2)计算桩身轴力和弯矩; 然后, 由式(10)中由上而下的第 1 个式子确定各土条底面法向应力, 代入式(7)计算参数  $s$ , 再由式(13)计算常数  $\lambda$ ; 最后, 通过式(19)计算滑体顶部竖向极限位移  $v_0$ ; 以此进行迭代计算, 直至相邻两次计算的  $v_0$  相对误差绝对值小于  $10^{-5}$ ; 得到  $v_0$  值, 并由式(9)计算出沿滑面切向极限位移  $\delta_i$ 、水平向极限位移  $\omega_i$ 。具体计算流程见图 4。

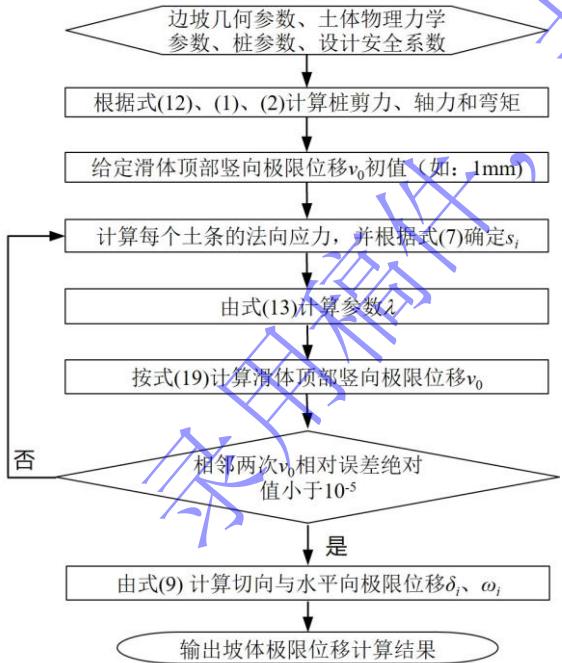


图 4 本文方法的计算流程

Fig. 4 Calculation flowchart of the proposed method

此外, 按照前文所述原理, 若基于传递系数法的基本假设<sup>[8]</sup>, 即只考虑两个方向力的平衡条件, 则可推导出滑体顶部竖向极限位移  $v_0$  的表达式为:

$$v_0 = \frac{T_n + \sum_{i=1}^{n-1} T_i \prod_{j=i+1}^n A_j}{U_n + \sum_{i=1}^{n-1} U_i \prod_{j=i+1}^n A_j} \quad (20)$$

式中, 中间变量  $A_j$ 、 $T_i$ 、 $U_i$  的表达式分别为:

$$A_j = \cos(\alpha_j - \alpha_{j+1}) \quad (20a)$$

$$-v_0 \sin(\alpha_j - \alpha_{j+1}) \tan \varphi / \chi_{j+1}$$

$$T_i = (W_i + q_i) \sin \alpha_i - N_p \sin \alpha_i - Q_p \cos \alpha_i \quad (20b)$$

$$U_i = \left[ ((W_i + q_i) \cos \alpha_i - N_p \cos \alpha_i + Q_p \sin \alpha_i) \tan \varphi + c b_i \sec \alpha_i \right] / \chi_i \quad (20c)$$

这样, 可称式(19)、式(20)分别为联系位移的 MP 法、传递系数法的坡体极限位移基本表达式。

## 2 模型试验验证

云南地区某基岩层上覆堆积体边坡前缘填筑的公路路基工程, 采用抗滑桩加固堆积体-路基边坡系统。以此为基本原型, 选择了两个典型断面, 进行了两组静力模型试验(图 5)。每组试验边坡模型共包含 5 个土层, 相应于原型由下而上依次为基岩层、软弱土层 3、卵石土层 2、粗砂土层 1、路基填土层。通过在坡体后缘施加侧向推力加载模拟边坡系统滑动。基岩层采用砖块混合砾石模拟, 路基填土层采用砾石模拟; 对边坡系统滑动变形有重要影响的土层 3、土层 2、土层 1 分别采用软黏土、砾石、细砂模拟; 通过直剪试验确定砾石、细砂和软黏土的黏聚力分别为 1.22、2.15 和 8.68 kPa, 内摩擦角分别为  $39.80^\circ$ 、 $31.74^\circ$  和  $15.08^\circ$ ; 相应的三个模型土层的重度分别为 20.5、19.0 和 17.5 kN/m<sup>3</sup>。根据缩尺相似比换算, 对于试验组一, 模型边坡长度为 400 cm, 宽度为 150 cm, 高度约为 123 cm; 单排抗滑桩布设在距路基左侧坡脚约 12 cm 的堆积体中, 桩间距 15 cm; 对于试验组二, 模型边坡长 300 cm、宽 150 cm、高 118 cm; 单排抗滑桩布设在距路基左侧坡脚约 14 cm 的堆积体中, 桩间距为 15 cm。

在模型路基顶面布设位移传感器以监测加载过程中的位移响应。位移监测点位于模型箱宽度方向的中轴线上。两组试验均沿路基顶面和边坡面均匀设置 5 个位移监测点。每个位移监测点处布置两个位移传感器, 分别测试水平向和竖向的位移。为保证理论分析与试验的坡体状态(极限状态)可比性, 试验中的坡体极限位移是试验最大推力荷载(判断方法见下一段)工况下(坡体接近极限状态)的坡体位移测试值。试验测得路基坡脚的水平极限位移如图 6 所示, 图中同时给出了本文理论方法计算结果以及采用 FLAC3D<sup>[25]</sup>数值模拟得到的结果。其中, 相应的 FLAC3D 数值模型见图 7, 土层均采用理想弹塑性模型, 且服从摩尔库伦强度准则与非关

联流动法则, 砂石层、细砂层、软黏土层的弹性模量分别为 15、10 和 6 MPa, 泊松比分别为 0.30、0.35 和 0.42。在采用 FLAC3D 强度折减法计算边坡稳定性时, 所采取的失稳判据为: 塑性区贯通 (以最大剪应变增量表征) 以及体系不平衡力与典型内力的比率 (简称不平衡力比率) 小于  $10^{-3}$  且相邻两计算时步的不平衡力比率的差值小于 10%。

由图 6 可见, 对于这两组试验模型, 理论分析 (MP 法) 与数值模拟均呈现坡脚水平极限位移随后缘推力的增加而非线性减小的特征, 且二者数值大小也较为接近。对于试验组一, 理论算法与模型试验、数值模拟得到的坡体极限位移的相对偏差分别约为 15.5% 和 21.4%; 对于试验组二, 相应的相对偏差分别约为 14.7%、9.4%。理论与试验、数值模拟结果存在偏差的可能原因在于, 一方面, 试验与数值模型的左侧边界为应力边界 (由试验加载条件所限制), 在此条件下理论方法搜索的坡体滑面位置与数值模拟 (强度折减) 结果存在偏差; 另一方面, 试验中加载至最大值是一种基于位移增量或位移速率 (位移增量达到前一级的 5 倍或位移速率 24 小时内未达到相对稳定标准<sup>[26]</sup>) 的近似判断方法, 这与理论上的极限状态可能存在偏差。

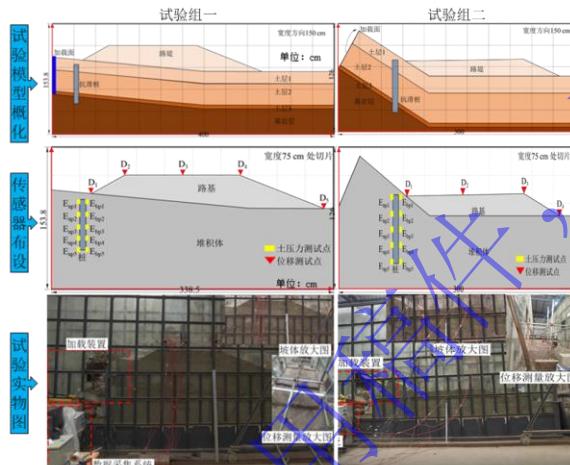
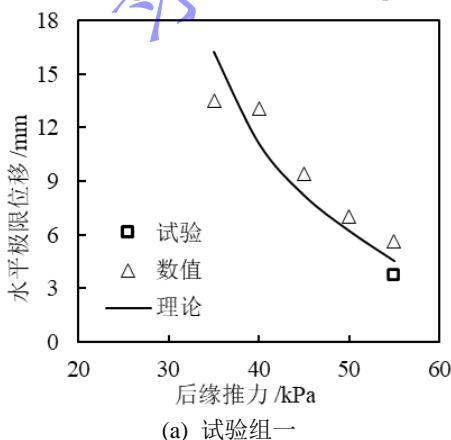


图 5 某抗滑桩加固边坡静力模型试验示意图

Fig. 5 Sketch map of static model test of a piled slope



(a) 试验组一

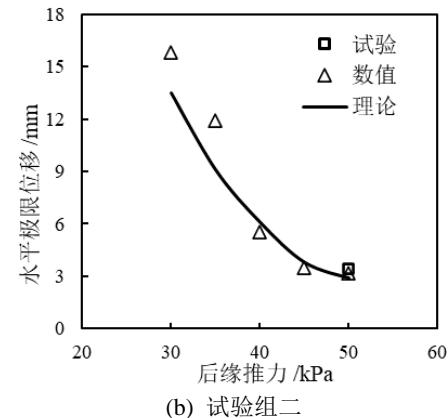
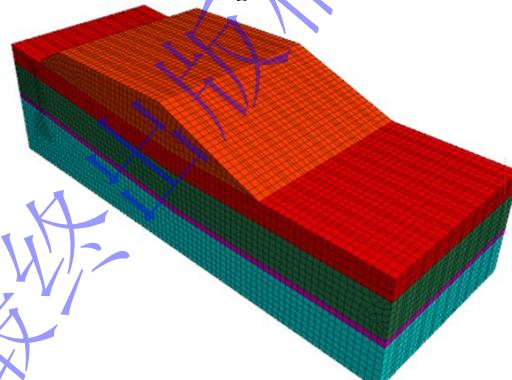
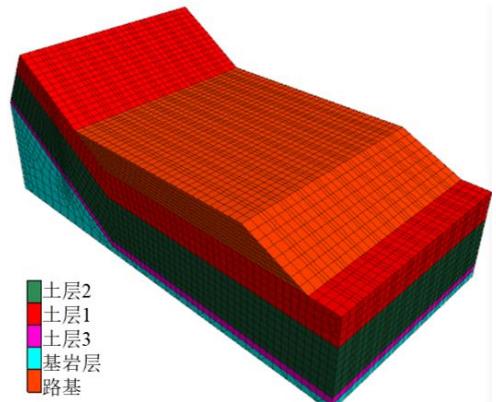


图 6 不同方法得到的路基坡脚的水平极限位移

Fig. 6 Horizontal limit displacement at the embankment toe obtained using different methods



(a) 试验组一



(b) 试验组二

图 7 试验模型边坡的 FLAC3D 数值模型

Fig. 7 Numerical model via FLAC3D for the physically modelled slope

### 3 实例分析和参数讨论

#### 3.1 实例分析

某土质边坡的横断面图如图 8 所示, 坡高 10 m、坡度为 30°, 通过试验确定, 土体重度、黏聚力和内摩擦角分别为 20 kN/m<sup>3</sup>、16 kPa 和 12°, 且  $m=2$ 、 $\rho=-0.7$ 。采用 MP 法搜索得到其潜在最危险滑面见图 8 中所示, 相应的稳定系数为 1.14, 未达到稳定性设计安全系数 1.25 的要求, 拟在距离坡脚 10m 处对其采用边长为 1.5m 的单排抗滑桩加固, 桩体

有关参数为:  $\gamma_p=25\text{kN/m}^3$ 、 $A_p=2.25\text{m}^2$ 、 $S_p=6\text{m}$ 、 $\mu=0.3$ 、 $x_p/(H\cot\beta)=0.58$ 。

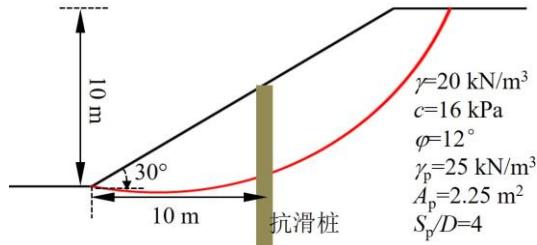


图 8 实例抗滑桩加固边坡横断面图

Fig. 8 Diagram of cross section of a piled slope example

对图 8 中所述的潜在滑体以均匀宽度划分为 20 个土条。根据本文两种方法计算得到坡体水平、竖向以及沿滑面切向的极限位移分布见图 9。可见, 坡体竖向和沿滑面切向的极限位移均随着距坡脚水平距离的增大而非线性增大, 坡体水平极限位移则随之略有减小。联系位移的传递系数法比 MP 法的计算结果约大 4.53%, 二者结果相近, 说明有时也可采用不考虑力矩平衡但操作相对简单的联系位移的传递系数法, 以简化计算分析。

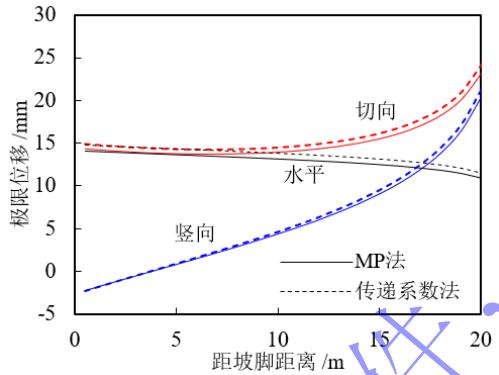


图 9 坡体极限位移的计算结果

Fig. 9 Analysis results of limit displacement of the piled slope

进一步地, 采用前述的 FLAC3D 数值模拟方法, 得到该实例坡体水平与竖向极限位移的计算结果如图 10 所示, 图中同时给出了前述的基于 MP 法的理论计算结果。可见, 理论计算的坡体极限位移与数值模拟结果总体分布规律较为一致, 二者之间的最大偏差(理论相对于数值模拟)分别为 11.5% (水平)、13.8% (竖向)。如前所述, 其可能原因仍在于理论方法与数值模拟所确定的滑面位置存在偏差, 前者是基于极限平衡的 MP 法, 搜索滑面时不考虑土体变形且得到的是一个无厚度的面, 后者是基于强度折减法, 计算过程中考虑土体变形且得到的是有厚度的滑带(最大剪应变增量分布带)。但总体而言, 二者偏差属于工程实践中可以接受的范围, 意味着本理论方法具有较好的实际参考性。

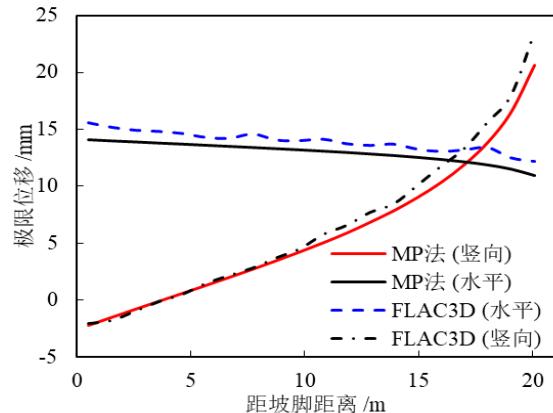


图 10 本理论方法与 FLAC3D 的坡体极限位移对比

Fig. 10 Comparison of the slope limit displacements between the proposed theoretical method and FLAC3D

### 3.2 参数讨论

由前述分析可见, 设桩位置、桩径、桩距、坡顶分布荷载以及坡体稳定性设计安全系数均对抗滑桩加固坡体的极限位移有重要影响, 下面依托图 8 所示的实例, 基于控制变量法(每次讨论只针对一个参数的变化), 具体采用联系位移的 MP 法讨论这 5 个参数的影响。

#### (1) 设桩位置

以无量纲数  $x_p/(H\cot\beta)$  表示桩位, 其增大表示布桩位置向坡顶靠近。图 11 给出了不同设桩位置下坡顶极限位移(包括坡体水平、竖向以及沿滑面切向)的变化曲线。可见, 坡顶极限位移随着桩位系数的增大而逐渐增大, 呈明显的非线性正相关性。极限位移随桩位系数的变化趋势表明最不利桩位(极限位移相对较小)靠近坡脚, 这与以往通过稳定系数变化特征<sup>[27]</sup>分析最不利桩位所得的结果一致。

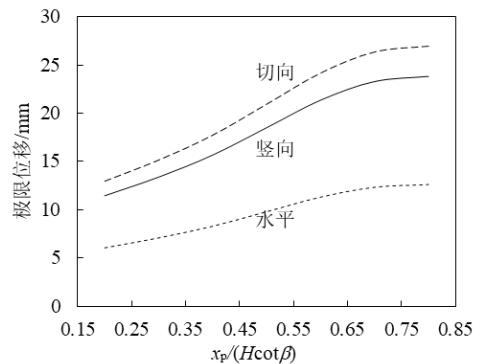


图 11 桩位对坡顶极限位移的影响

Fig. 11 Influence of pile position on limit displacement at the slide mass top

#### (2) 桩径

坡顶极限位移随桩径的变化曲线见图 12。可见, 随桩径由 1.2m 增加到 1.8 m, 坡顶极限位移也逐渐增大, 二者间具有弱非线性特征。可解释地, 随着桩径增大, 桩体抗力有所增加, 坡体稳定性增强, 其可滑动变形性得以提高, 因而坡体极限位移

增大。

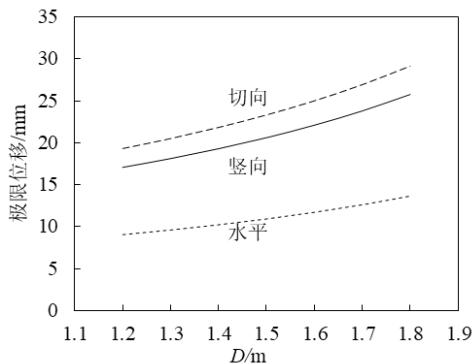


图 12 桩径对坡顶极限位移的影响

Fig. 12 Effect of pile diameter on limit displacement at the slide mass top

### (3) 桩间距

图 13 给出了坡顶极限位移随桩间距的变化曲线。可见, 随着桩间距由 3 倍桩径增大至 5 倍桩径, 坡顶极限位移呈非线性减小。这是因为, 随着桩间距增大, 坡体稳定性降低, 因而极限位移减小。

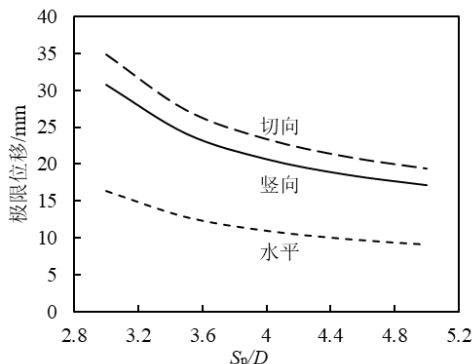


图 13 桩间距对坡顶极限位移的影响

Fig. 13 Influence of pile spacing on limit displacement at the slide mass top

### (4) 坡顶分布荷载

图 14 给出了不同坡顶荷载作用下坡顶极限位移的变化曲线。可见, 随着坡顶荷载由 0 增大至 30 kPa, 坡顶极限位移呈线性减小。

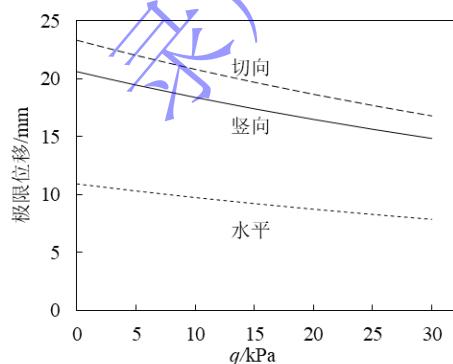


图 14 坡顶分布荷载对坡顶极限位移的影响

Fig. 14 Influence of surcharge on limit displacement at the slide mass top

### (5) 坡体稳定性设计安全系数

图 15 展示了坡体稳定性设计安全系数对坡顶

极限位移的影响。可见, 坡顶极限位移随着坡体稳定性设计安全系数的增大而有所减小, 二者间近似呈线性关系。

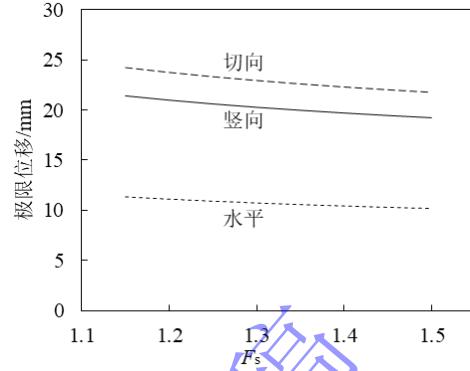


图 15 坡体稳定性设计安全系数对坡顶极限位移的影响

Fig. 15 Influence of design safety factor on limit displacement at the slide mass top

## 4 结论

针对抗滑桩加固土质边坡的极限位移问题, 考虑滑面处桩身轴力、剪力和弯矩作用, 且引入滑面土体剪应力-剪切位移的非线性关系, 以及滑体各条块的静力平衡及其间位移协调, 建立了联系位移的稳定性控制方程, 推导了在给定稳定性设计安全系数下坡体极限位移的解析解, 形成了两种具体算法, 即联系位移的 MP 法和传递系数法。得到主要结论如下:

(1) 坡体竖向和沿滑面切向的极限位移均随着距坡脚水平距离的增大而非线性增大, 坡体水平极限位移则随之略有减小。

(2) 联系位移的传递系数法得到的极限位移约比联系位移的 MP 法约大 4.53%, 二者计算结果基本一致。本文理论算法所得到的坡体极限位移相对于试验得到的坡体极限位移的最大偏差约为 15.5%。

(3) 抗滑桩加固坡体的极限位移与设桩位置、桩径、桩距、坡顶分布荷载以及坡体稳定性设计安全系数密切相关。随桩位由坡脚靠近坡顶, 坡顶极限位移呈非线性增大; 坡顶极限位移随桩径和桩距的增大分别呈非线性增大与非线性减小, 而随坡顶分布荷载和坡体稳定性设计安全系数增大均呈近似线性减小。

## 参考文献:

- [1] 王恭先. 滑坡防治方案的选择与优化[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(Supp.2): 3867-3873. (Wang Gongxian. Choice and optimization of landslide control plan [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(Supp.2): 3867-3873.)
- [2] Duncan JM. State of the art: limit equilibrium and

- finite-element analysis of slopes [J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1996, 122(7): 577–596.
- [3] Chen WF. *Limit analysis in soil mechanics* [M]. Elsevier, 1975.
- [4] Griffiths DV, Lane PA. Slope stability analysis by finite elements [J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387–403.
- [5] 卢坤林, 朱大勇, 杨扬. 边坡滑面正应力构成及分布模式选择[J]. 岩土力学, 2012, 33(12): 3741-3746. (Lu Kunlin, Zhu Dayong, Yang Yang. Selection of constitution and distribution model of normal stresses over slip surface of slope [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2012, 33(12): 3741-3746.)
- [6] Bishop AW. The use of the slip circle in the stability analysis of earth slopes. *Geotechnique*, 1955, 5(1): 7-17.
- [7] Morgenstern NR, Price VE. The analysis of the stability of general slip surfaces [J]. *Geotechnique*, 1965, 15: 79-93.
- [8] 时卫民, 郑颖人, 唐伯明. 滑坡稳定性评价方法的探讨 [J]. 岩土力学, 2003, 24(4): 545-548. (Shi Weimin, Zheng Yingren, Tang Boming. Discussion on evaluation method of landslide stability [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2003, 24(4): 545-548.)
- [9] Bell JM. General slope stability analysis [J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1968, 94(SM6): 1253-1270.
- [10] 李迪, 张漫, 李亦明, 等. 堆积体滑坡稳定性的实时定量评价法[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(10): 2146-2152. (Li Di, Zhang Man, Li Yiming, et al. Real-time quantitative assessment method of stability for talus landslide [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, 27(10): 2146-2152.)
- [11] Xiao Shiguo. An evaluation method for displacement-dependent slope stability [C]. *Proceedings of 16th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Taipei, Oct. 14-18, 2019.
- [12] Zou Z, Yan J, Tang H, et al. A shear constitutive model for describing the full process of the deformation and failure of slip zone soil [J]. *Engineering Geology*, 2020, 105766.
- [13] Zou Z, Luo T, Zhang S, et al. A novel method to evaluate the time-dependent stability of reservoir landslides: exemplified by Outang landslide in the Three Gorges Reservoir [J]. *Landslides*, 2023, 20:1731–1746.
- [14] Huang CC. Developing a new slice method for slope displacement analyses [J]. *Engineering Geology*, 2013, 157: 39–47.
- [15] Lee CY, Hull TS, Poulos HG. Simplified pile-slope stability analysis [J]. *Computers and Geotechnics*, 1995, 17(1): 1–16.
- [16] Ausilio E, Conte E, Dente G. Stability analysis of slopes reinforced with piles [J]. *Computers and Geotechnics*, 2001, 28(8): 591–611.
- [17] Li XP, Su LJ, He SM, et al. Limit equilibrium analysis of seismic stability of slopes reinforced with a row of piles [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2016, 40(8): 1241–1250.
- [18] Nian TK, Chen GQ, Luan MT, et al. Limit analysis of the stability of slopes reinforced with piles against landslide in nonhomogeneous and anisotropic soils [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2008, 45(8): 1092-1103.
- [19] Xiao SG. Improved limit analysis method of piled slopes considering the pile axial forces [J]. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Geotechnical Engineering* 2020, 174: 75-82.
- [20] Duncan JM, Chang CY. Nonlinear analysis of stress and strain in soils [J]. *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, Proc. ASCE*, 1970, 96(SM5): 1629-1653.
- [21] Lu YF. Deformation and failure mechanism of slope in three dimensions [J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2015, 7: 109–119.
- [22] 干飞, 叶晓明, 郑刚, 等. 一种新型剪应力模型—双曲力学模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2021, 40(Supp.2): 3253-3260. (Gan Fei, Ye Xiaoming, Zheng Gang, et al. A new type of shear stress model-hyperbolic mechanical model [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2021, 40(Supp.2): 3253-3260.)
- [23] Ito T, Matsui T. Methods to estimate lateral force acting on stability piles [J]. *Soils and Foundations*, 1975, 15(4): 43–59.
- [24] Ito T, Hong WP. Design method for stabilizing piles against landslide—one row of piles [J]. *Soils and Foundations*, 1981, 21(1): 21-37.
- [25] Itasca Consulting Group, Inc. *FLAC3D 5.0 manual*. Minneapolis: Itasca Consulting Group inc., 2012.
- [26] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑地基检测技术规范(JGJ340-2015) [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2015. (Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Technical code for testing of building foundation soils (JGJ340-2015) [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2015.)
- [27] Li ZY, Xiao SG. Seismic stability analysis of two-stage slopes reinforced with one row of piles [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2022, 153: 107079.