

# 一种隐式稳定节点光滑有限元分解 ALE 法及其在大变形分析中的应用

陈曦<sup>1</sup>, 吕彦楠<sup>1</sup>, 于玉贞<sup>2</sup>, 崔柳生<sup>1</sup>, 许哲<sup>1</sup>, 郭菁<sup>1</sup>

(1. 北京交通大学, 城市地下工程教育部重点实验室, 北京 100044; 2. 清华大学, 清华大学水利水电工程系, 北京 100084)

**摘要:** 岩土工程常涉及土体大变形问题, 采用基于小变形假设的有限元法对其进行分析会产生较大计算误差或因网格畸变而导致计算中断。分解任意拉格朗日-欧拉 (ALE) 法将网格变形与材料变形分离, 分别执行更新拉格朗日 (UL) 步与欧拉步以便克服网格畸变引起的计算精度降低或计算终止问题。将稳定节点光滑有限元 (NsFEMstab) 法与 ALE 法相结合, 提出一种新的 NsFEMstab-ALE 法, 并提出一种用于网格自适应调整策略的动态布点法。以刚性基础地基大变形问题为例, 对 NsFEMstab-ALE 进行检验, 数值结果表明: (1) 基于网格自适应调整策略的动态布点法能够有效解决大变形引起的网格畸变问题, 实现网格疏密平滑过渡, 确保大变形模拟过程中整个网格单元具有良好质量; (2) 应用 NsFEMstab-ALE 法时, 能够获得与参考文献相符荷载-位移响应曲线以及合理的等效塑性应变云图和网格变形图。

**关键词:** 土体大变形; 稳定节点光滑有限元法; 隐式有限元框架; 自适应网格重划分; 任意拉格朗日-欧拉法

中图分类号: TU411 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2022)11-1959-09

作者简介: 陈曦(1977—), 男, 博士, 教授, 主要从事计算岩土力学、岩土工程的信息化和智能化等方面的研究工作。

E-mail: xichen.geo@gmail.com.

## A decoupled ALE method of implicit stabilized node-based smoothed finite element and its applications to large deformation analysis

CHEN Xi<sup>1</sup>, LYU Yannan<sup>1</sup>, YU Yuzhen<sup>2</sup>, CUI Liusheng<sup>1</sup>, XU Zhe<sup>1</sup>, GUO Jing<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Urban Underground Engineering of Ministry of Education, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2.

Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Large deformation of soil mass has been often encountered in geotechnical analysis. When the small deformation assumption-based finite element method is applied to such large deformation analysis, the computational errors can be accumulated or the computational process may be terminated due to mesh distortion. In the decoupled arbitrary Lagrangian-Euler (ALE) method with separated mesh deformation and material deformation, the updated Lagrangian (UL) step is implemented followed by the Euler step to overcome the reduced computational accuracy or the computational termination caused by mesh distortion. By combining the stabilized node-based smoothed finite element method (NsFEMstab) with the ALE method, a novel NsFEMstab-ALE method is proposed, and furthermore a dynamic placement approach of nodes for the adaptive remeshing strategy is developed. Based on a rigid footing resting on ground involving large deformation, the method of NsFEMstab-ALE is examined, and numerical results show that: (1) by applying the dynamic placement method of nodes, the mesh distortion caused by large deformation can be effectively resolved, the smooth mesh transition from fine-mesh area to coarse-mesh area can be realized, and the good element quality in the whole mesh during the entire deformation process can be guaranteed. (2) the load-displacement curves predicted by the NsFEMstab-ALE method agree well with those in the literatures, and the equivalent plastic strain contours and deformed meshes calculated by the NsFEMstab-ALE method are rational.

**Key words:** large deformation of soil mass; stabilized node-based smoothed finite element method; implicit finite element framework; adaptive remeshing; arbitrary Lagrangian-Eulerian

## 0 引言

土体接近破坏或软土承受较大外荷载时会呈现大

变形特征。采用基于小变形假设和拉格朗日描述的常

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (52178309)

收稿日期: 202x-xx-xx

规有限元法计算这类大变形问题时不仅会产生较大误差, 还可能因网格畸变导致计算中断。拉格朗日有限元法采用随物体运动的参考系, 即跟随某一个物质点运动, 观察该点状态随时间的变化<sup>[1-3]</sup>。欧拉有限元法则采用固定不动的参考系, 即观察某一时刻各空间点处连续介质的状态, 随着时间的推移, 研究这些点处介质的物理力学量的变化。但欧拉描述不关注物质点的轨迹, 计算网格与物质独立, 难以捕捉物体边界和材料界面。将拉格朗日有限元法和欧拉有限元法的优势相结合可以获得耦合欧拉-拉格朗日 (Coupled Eulerian-Lagrangian, CEL) 法和任意拉格朗日欧拉 (Arbitrary Lagrangian-Eulerian, ALE) 法。1989 年, Benson<sup>[4]</sup>提出分解 ALE 法, 该方法因其计算成本较低, 成为较为流行的大变形计算方法。分解 ALE 法通过区分网格位移和物质点位移来克服网格畸变, 通过分离网格和物质点位移以使网格与物质点的连接是任意的。该方法包括拉格朗日步和欧拉步: 结点坐标通过拉格朗日步计算的增量位移进行更新; 在欧拉步中, 针对扭曲网格进行网格重划分, 将所有状态变量从旧网格重新映射到新网格。

近年来, ALE 法已成功应用于岩土体大变形分析。例如, 刘开富<sup>[5]</sup>通过 ALE 法分析了基坑放坡开挖大变形破坏性状, 为实际工程提供了指导。Nazem 等<sup>[6]</sup>将分解 ALE 法应用于单桩打入等一些经典大变形岩土工程问题, 验证了该方法的有效性。王腾等<sup>[7]</sup>采用 ABAQUS 内置的 ALE 法模拟了深水井口导管的贯入过程和导管-土体黏性接触面的摩擦疲劳效应, 分析了摩擦疲劳对导管贯入阻力的影响。刘顺<sup>[8]</sup>在研究地基液化大变形和地铁车站地震液化上浮响应问题时应用了分解 ALE 法, 验证了该方法的适用性。

采用常规有限元法(Finite Element Method, FEM)开展岩土体受力变形分析时, 通常采用二次单元类型来保证计算精度, 近年来提出的节点光滑有限元法 (Node-Based Smoothed Finite Element Method, NsFEM)<sup>[9]</sup>则采用低阶线性单元, 并能保证较好的计算精度。NsFEM 利用单元节点作为光滑域的积分点, 除了位移变量外, 应力和应变变量也存储在节点上。由于独特的优点, NsFEM 已应用于求解一些岩土工程问题。例如, Meng<sup>[10]</sup>等研究了多重接触约束, 并模拟了带拉伸切割的黏性界面, 用于分析埋在黏土中的管道承载力。然而研究表明, NsFEM 组装的整体刚度偏软引起“时间不稳定”<sup>[11]</sup>或整体刚度不均匀<sup>[12]</sup>。为解决 NsFEM 中与节点积分相关的数值不稳定, 一些学者提出了改进稳定性和数值精度的稳定 NsFEM (记为 NsFEMstab), 并将其应用于不同问题<sup>[13]</sup>, 但已提出的 NsFEMstab 大多基于显式有限元框架。

本文采用泰勒级数展开与割线剪切模量相结合, 在隐式有限元框架内建立一种 NsFEMstab<sup>[14]</sup>, 进而提出一种计算成本较低的 NsFEMstab 分解 ALE 法 (NsFEMstab-ALE) 并将其应用于岩土体大变形分析。为了解决网格畸变问题, 提出一种网格调整策略, 使其能够实现网格疏密的平滑过渡。以刚性基础地基大变形沉降问题为例, 将基于三节点三角形 (T3) 单元类型的 NsFEMstab-ALE 与目前常用的基于 6 节点二次三角形单元(T6)类型的 FEM-ALE(T6)进行对比, 验证了所提方法的有效性。

## 1 分解 ALE 法概述

### 1.1 基本理论

基于算子分离技术的分解 ALE 方法将复杂的控制方程分解为简单的步骤, 可使大变形分析成本降低两倍, 而精度不会有明显损失, 提高 ALE 法的灵活性和适用性, 处理复杂的岩土工程问题。分解 ALE 法中, 材料位移和网格位移独立求解, 涉及更新拉格朗日 (UL) 步和欧拉步两个步骤。

在 UL 步中, 忽略对流项, 通过如下平衡方程求解材料位移, 并忽略网格位移项, 即

$$\mathbf{K}^p \Delta \mathbf{u}^p = \Delta \mathbf{F}^{ext} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{K}^p$  为与材料位移  $\Delta \mathbf{u}^p$  相关的刚度矩阵, 而  $\Delta \mathbf{F}^{ext}$  为增量外荷载。UL 步完成后, 进行有限元网格畸变判断, 若需要进行网格重划分, 可使用网格自适应技术使新网格满足质量要求。之后, 将场变量从旧网格映射到新网格, 对映射后的应力进行屈服准则检查, 并检查和修正节点处的力平衡。

### 1.2 更新拉格朗日格式

基于拉格朗日增量分析, 采用虚位移(功)原理来描述物体在  $t+\Delta t$  时刻的平衡条件, 则有

$$\int_{t+\Delta t \Omega}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{t+\Delta t \Omega}^{t+\Delta t} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{t+\Delta t \Gamma}^{t+\Delta t} p_i \delta u_i d\Gamma \quad (2)$$

式中, 带有左上标  $t+\Delta t$  的量表示  $t+\Delta t$  时刻的变量(或物理量), 例如,  $t+\Delta t \sigma_{ij}$  和  $t+\Delta t \varepsilon_{ij}$  分别为  $t+\Delta t$  时刻柯西应力张量和对应虚位移的应变张量;  $t+\Delta t \Omega$ 、 $t+\Delta t \Gamma$ 、 $t+\Delta t b_i$  和  $t+\Delta t p_i$  分别表示  $t+\Delta t$  时刻的体积、面力作用的表面积、体力分量和面力分量;  $\delta u_i$  为虚位移向量分量。式(2)等号左侧表示虚内能, 等号右侧表示外部虚功, 体现了物体在  $t+\Delta t$  时刻的平衡或能量守恒。

在小变形假设下, 假定体系构型保持不变。然而, 大变形分析中, 虚功方程包含了未知位移增量的复杂非线性函数, 难以直接求解  $t+\Delta t$  时刻的构型。因此, 需要在已知平衡构形基础上对相应方程进行线性化处理, 可得到一个近似解, 然后通过迭代来提高其求解精度。理论上, 可以采用任何已知的平衡构形, 但在

UL 格式中, 有限元网格随着结构变形而更新。因此, 求解  $t+\Delta t$  时刻的位移时, 选择其前一步  $t$  时刻对应的变量作为参考构形进行计算。如上所述, 左上标表示变量所在(时刻)的构形, 左下标表示变量相对于参考(时刻)构型进行度量。UL 格式的基本方程为

$$\int_{t+\Delta t} \Omega {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} {}_t \varepsilon_{ij} d\Omega = {}^{t+\Delta t} W \quad (3)$$

式中,  ${}^{t+\Delta t} W$  为  $t+\Delta t$  时刻的外部虚功,  ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$  为  $t+\Delta t$  时刻的第二 Piola-Kirchhoff 应力张量相对于  $t$  时刻的增量, 且有

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + {}_t S_{ij} \quad \text{with} \quad {}^t \sigma_{ij} = {}^t S_{ij} \quad (4)$$

式中,  ${}^t \sigma_{ij}$  和  ${}_t S_{ij}$  分别为  $t$  时刻的柯西应力张量和第二 Piola-Kirchhoff 应力增量。应变增量  ${}^{t+\Delta t} {}_t \varepsilon_{ij}$  可分解为

$${}^{t+\Delta t} {}_t \varepsilon_{ij} = {}_t e_{ij} + {}_t \eta_{ij} \quad (5)$$

式中,  ${}_t e_{ij}$  和  ${}_t \eta_{ij}$  分别为  $t$  时刻的线性应变和非线性应变, 分别定义为

$${}_t e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial {}^t x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial {}^t x_i} \right), \quad {}_t \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial {}^t x_i} \frac{\partial u_k}{\partial {}^t x_j} \right) \quad (6)$$

将式(4)和式(5)代入式(3), 可得

$$\int_{\Omega} {}_t S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} {}_t \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} {}^t \sigma_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} d\Omega = {}^{t+\Delta t} W - \int_{\Omega} {}^t \sigma_{ij} \delta {}_t e_{ij} d\Omega \quad (7)$$

将本构关系  ${}_t S_{ij} = {}_t D_{ijkl} {}^{t+\Delta t} {}_t \varepsilon_{kl}$  近似为  ${}_t S_{ij} = {}_t D_{ijkl} {}_t e_{kl}$  并代入上式, 可得

$$\int_{\Omega} {}_t D_{ijkl} {}_t e_{kl} \delta {}^{t+\Delta t} {}_t \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} {}^t \sigma_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} d\Omega = {}^{t+\Delta t} W - \int_{\Omega} {}^t \sigma_{ij} \delta {}_t e_{ij} d\Omega \quad (8)$$

式中,  ${}_t D_{ijkl}$  为  $t$  时刻的本构矩阵。对上述方程中包含未知位移增量的项进行线性化近似处理, 则有

$$\delta {}^{t+\Delta t} {}_t \varepsilon_{ij} = \delta {}_t e_{ij} \quad (9)$$

将其代入式(8), 可得 UL 格式的线性化方程为

$$\int_{\Omega} {}_t D_{ijkl} {}_t e_{kl} \delta {}_t e_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} {}^t \sigma_{ij} \delta {}_t \eta_{ij} d\Omega = {}^{t+\Delta t} W - \int_{\Omega} {}^t \sigma_{ij} \delta {}_t e_{ij} d\Omega \quad (10)$$

式中, 柯西应力张量  ${}^t \sigma_{ij}$  由  ${}^t \sigma_{ij} = {}^t D_{ijkl} {}^t \varepsilon_{kl}$  计算获得, 其中  ${}^t \varepsilon_{kl}$  为 Almansi 应变, 其定义为

$${}^t \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^t u_k}{\partial {}^t x_l} + \frac{\partial {}^t u_l}{\partial {}^t x_k} - \frac{\partial {}^t u_j}{\partial {}^t x_k} \frac{\partial {}^t u_j}{\partial {}^t x_l} \right) \quad (11)$$

经有限元离散后, NsFEMstab 在 UL 格式下的矩阵方程可写为

$$({}^t \hat{\mathbf{K}}^L + {}^t \hat{\mathbf{K}}^{\text{NL}}) \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{\text{ext}} - {}^t \hat{\mathbf{F}}^{\text{int}} \quad (12)$$

式中,  ${}^t \hat{\mathbf{K}}^L$  为 NsFEMstab 在  $t$  时刻的线性应变刚度矩阵, 可表示为

$$\begin{aligned} {}^t \hat{\mathbf{K}}^L &= \sum_{j=1}^{mn} {}^t \hat{\mathbf{K}}_j^L = \sum_{j=1}^{mn} \left( {}^t \tilde{\mathbf{B}}_j^L \right)^T {}^t \mathbf{D} {}^t \tilde{\mathbf{B}}_j^L {}^t A_j^s \\ &\quad + \sum_{j=1}^{mn} \left( \frac{{}^t A_j^s {}^t r_j^2}{4} \sum_{h \in \{x, y\}} {}^t \tilde{\mathbf{B}}_{j,h}^L {}^t \mathbf{D}_s {}^t \tilde{\mathbf{B}}_{j,h}^L \right) \end{aligned} \quad (13)$$

式中,  ${}^t \tilde{\mathbf{B}}_{j,h}^L = \partial {}^t \tilde{\mathbf{B}}_j^L / \partial h$  ( $h \in \{x, y\}$ ) 是第  $j$  个节点沿  $h$  方向的光滑应变-位移矩阵梯度。 ${}^t \hat{\mathbf{K}}^{\text{NL}}$  为 NsFEMstab 在

$t$  时刻的非线性应变刚度矩阵, 定义为

$${}^t \hat{\mathbf{K}}^{\text{NL}} = \sum_{j=1}^{mn} {}^t \hat{\mathbf{K}}_j^{\text{NL}} = \sum_{j=1}^{mn} \int_{\Omega_e} \left( {}^t \tilde{\mathbf{B}}_j^{\text{NL}} \right)^T {}^t \hat{\boldsymbol{\sigma}} {}^t \tilde{\mathbf{B}}_j^{\text{NL}} d\Omega \quad (14)$$

节点力向量矩阵  ${}^t \hat{\mathbf{F}}^{\text{int}}$  可表示为

$$\begin{aligned} {}^t \hat{\mathbf{F}}^{\text{int}} &= \sum_{j=1}^{mn} {}^t \hat{\mathbf{F}}_j^{\text{int}} = \sum_{j=1}^{mn} \left( {}^t \tilde{\mathbf{B}}_j^L \right)^T {}^t \hat{\boldsymbol{\sigma}} {}^t A_j^s \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{mn} \left( \frac{{}^t A_j^s {}^t r_j^2}{4} \sum_{h \in \{x, y\}} {}^t \tilde{\mathbf{B}}_{j,h}^L {}^t \hat{\boldsymbol{\sigma}} {}_{jh} \right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

## 2 网格自适应调整与分解 ALE 实施流程

将 NsFEMstab 方法与分解 ALE 法相结合, 可降低分解 ALE 法计算成本, 有助于改善有限元分解 ALE 法不同网变量格映射的精度和计算效率。

### 2.1 网格单元质量评估

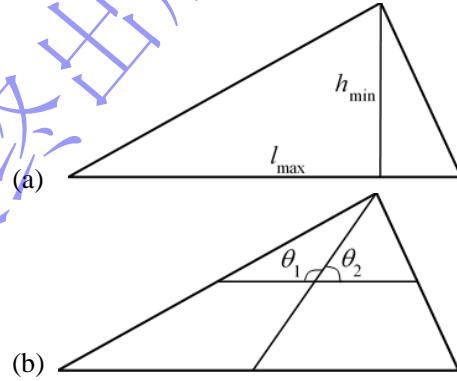


Fig.1 Parameters for mesh quality assessment: (a) aspect ratio; (b) skewness

在 UL 步计算完成后, 可通过计算变形网格长细比和斜度等度量指标对网格质量进行评估。三角形单元长细比可定义为单元最长边  $l_{\max}$  除以其最小高度  $h_{\min}$ , 如图 1(a)所示, 可定义第  $e$  个单元长细比  $A_r$  为

$$A_r^{(e)} = \frac{l_{\max}^{(e)}}{h_{\min}^{(e)}}, \quad e \in [1, Nels] \quad (16)$$

式中, 上标( $e$ )表示第  $e$  个单元。一般而言, 当长细比  $A_r^{(e)} \in [1, 3]$  时, 可视为网格单元的质量良好。斜度是一种相对于理想单元(即等边三角形)的角度度量, 其计算采用三角形单元的最小角度  $\theta_{\min}$  与  $90^\circ$  之差来表示, 即

$$s_k^{(e)} = \frac{\pi}{2} - \theta_{\min}^{(e)}, \quad e \in [1, Nels] \quad (17)$$

式中,  $\theta_{\min}^{(e)} = \min[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6]$  表示单元  $e$  内每个节点与其对边中点连线同连接其他两侧中点的线段之间的夹角的最小值。图 1(b)仅展示了  $\theta_1$  和  $\theta_2$  角度, 其他角度类似。通常, 当  $s_k^{(e)} \in [0, 0.25]$  时, 该网格单元质量较好。

若变形网格满足以下条件之一, 采用  $h$  自适应网

格重划分（即保持单元类型不变而改变网格密度的）技术进行网格调整：

(1) 网格畸变率大于其允许值：定义网格畸变率( $R_d$ )为单元长细比 $A_r > 3.0$ 或斜度 $S_k > 0.7$ 的单元数除以总单元数，网格畸变率允许值可设为 $R_{d\_allowed} = 0.2\%$ 。

(2) 个别单元出现较大畸变：即变形网格中出现单元长细比 $A_r > 7.0$ 或斜度 $S_k > 0.8$ 。

## 2.2 动态布点法

针对无网格离散的可变密度节点布局，Fornberg 和 Flyer<sup>[15]</sup>提出了一种快速布点方案。该算法从几何区域内的节点布置出发，能够在特征点周围迅速实现节点的布置，避免了对节点位置进行迭代求解。因此该算法具有算法简便、计算高效、生成的节点分布质量高等优点。然而通过上述快速布点方案进行 Delaunay 三角化来生成有限元网格时，可能导致边界处三角形网格质量较差。鉴于此，提出一种改进快速布点方案或称为动态布点法，并将其用于分解 ALE 法中的网格动态调整。

动态布点法作为一种前进型算法，其流程如下：

(1) 首先，沿着区域底边相对密集地随机布置一系列潜在点位置(pdp)；然后，按以下步骤(2)~(5)执行，直至 pdp 的最低点位于区域顶边之上。

(2) 确定 pdp 中的最低点(若最低点有多个 pdp，可任选一个)，标记为 low\_pdp，并将该点作为新的放置点，如图 2(a)。

(3) 以步骤(2)标记的 low\_pdp 点为中心，绘制一个半径为  $r_{low}$  的圆，该圆半径应与所需的节点间距相匹配，这里定义为  $r_{low} = 0.1 + hbdy * dis\_ctps\_p$ ， $hbdy$  为网格密度控制参数， $dis\_ctps\_p$  为 low\_pdp 点到加密特征点的距离，如图 2(b)。

(4) 保留圆心点 low\_pdp，移除该圆内的所有其他 pdp；将图中圆外剩余 pdp 标记为 old\_pdp，如图 2(c)。

(5) 确定 low\_pdp 点与圆两侧最近 old\_pdp 点的连线，两个连线在圆上截取一段圆弧；在该圆弧上均匀放置 5 个新的 new\_pdp(实心圆点)，然后将 old\_pdp 与 new\_pdp 更新为 pdp，如图 2(d)。

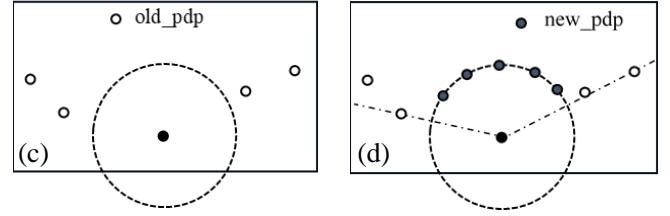
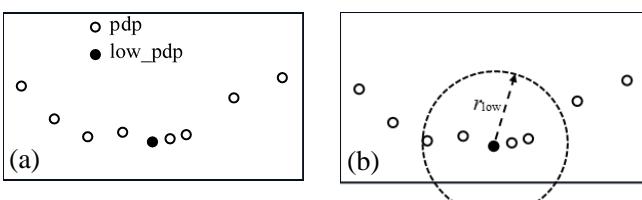


图 2 动态布点法示意图

Fig.2 Schematic diagram for dynamic placement of nodes

基于上述动态布点法仅能获取区域内部的点，对于边界的布点，根据需要可采用如下两种方案：

(1) **均匀布点**：适用于距离加密特征点较远的边界。采用这种方案可均匀布置边界上的节点，确保远域边界有相对均匀的节点分布。

(2) **渐变加密布点**：适用于距离加密特征点较近的边界。该方案按等比数列(或近似等比数列)方式逐步增加节点密度，采用这种方案可使边界节点密度逐渐变化，更好地适应密网格和粗网格之间的过渡需要。

选择两种方案中哪一种取决于边界至加密特征点的距离，以确保在整个计算区域内得到与内部点分布较为接近的节点密度。获得区域内部和边界上的节点后，还需要对已有边界节点进行动态调整以改善边界单元质量。

## 2.3 变量映射

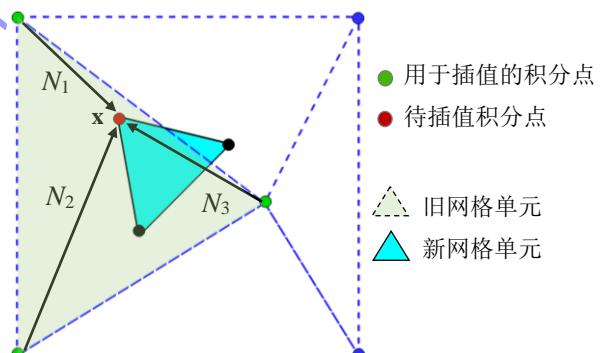


图 3 NsFEMstab 变量插值示意图

Fig.3 Schematic diagram for variable mapping in NsFEMstab

分解 ALE 法的欧拉步中，网格重划分后会形成一个更高质量的新网格，并需要将应力、应变和位移等变量从旧网格映射到新网格。新网格单元积分点上的变量值(目标场)需要从旧网格单元积分点上的已知变量值(参考场)插值获得。如图 3 所示，NsFEMstab 的应力和应变均存储在单元节点上，在对其进行不同网格之间变量映射时，与位移插值类似。例如，对于新网格任一点  $\mathbf{x}$ ，该点某应力分量可表示为

$$\sigma^{\text{new}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 N_j(\mathbf{x}) \sigma_j^{\text{old}} \quad (18)$$

式中,  $N_j$  为 T3 单元节点  $j$  的形函数,  $\sigma_j^{\text{old}}$  为  $\mathbf{x}$  点所处的旧网格单元的节点  $j$  的某应力分量。

## 2.4 分解 ALE 法实施流程

分解 ALE 法可在常规弹塑性有限元程序基础上扩展实现, 并同时考虑材料和几何非线性。采用增量有限元法时, 每个荷载增量步可应用如 Newton-Raphson (NR) 等非线性迭代法进行求解。分解 ALE 法的实现具体如图 4 所示。

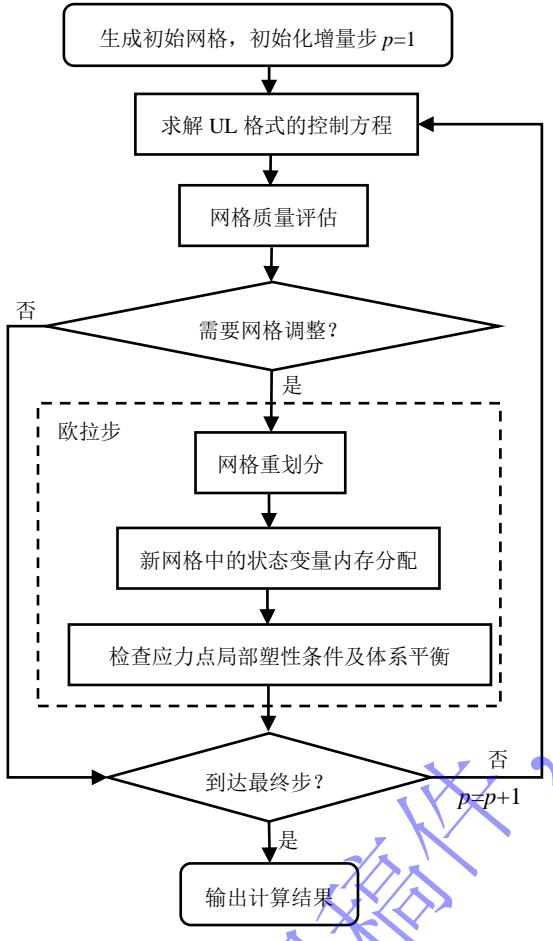


图 4 分解 ALE 法流程图

Fig.4 Flowchart of the decoupled ALE method

在每个荷载增量步中, 首先求解 UL 格式的非线性控制方程, 计算获得位移增量和相应的应变增量, 然后根据应力点积分算法计算应力增量, 并进行体系平衡检查。体系平衡后对有限元网格质量进行评估, 若网格畸变明显且满足前述网格调整准则, 需进行网格调整加密。重新生成网格后, 需将变量和状态参数从旧网格映射到新网格。由于新网格拓扑信息(包括网格单元总数、节点数及其坐标等)与旧网格不同, 程序实现时需重新定义存储数组的维度。

需要强调的是, 对于弹塑性材料, 重新映射的变量可能会违反应力点屈服条件和新网格体系平衡。若新旧网格间变量映射后发现应力点位于屈服面之外, 采用应力修正算法<sup>[16]</sup>将其修正回屈服面。除了进行应

力修正使其满足屈服条件外, 还需要进行 NR 迭代使整个体系满足受力平衡。

## 3 数值算例

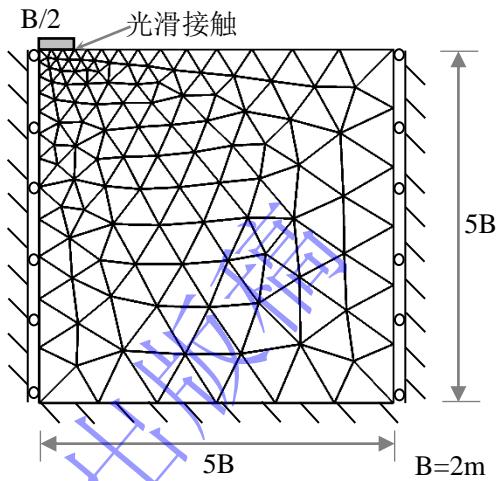


图 5 刚性基础下的均质土地基几何尺寸 ( $Nels=208$ )

Fig.5 Geometry of a rigid smooth strip footing resting on homogeneous ground ( $Nels=208$ )

以图 5 中不排水均质土地基上刚性条形基础为例, 基底与地基之间为光滑接触, 地基土采用理想弹塑性摩尔库伦 (Mohr-Coulomb, MC) 模型模拟, 该模型有限元网格单元总数为  $Nels=208$ 。不排水条件下, 土的弹性模量和泊松比分别为  $E_u=100$  kPa 和  $\nu_u=0.495$ , 黏聚力和内摩擦角分别为  $c_u=1$  kPa 和  $\phi_u=0^\circ$ 。地基边界采用标准约束条件(即左右边界上任何点只能发生竖向位移, 而底边界上任何点两个方向位移均被约束), 刚性基础总的竖向位移为  $0.5B$  (或  $1.0\text{m}$ )。采用六种方法对该问题进行模拟分析, 包括基于小变形假设的 FEM(T6)和 NsFEMstab、考虑几何非线性的 FEM-UL(T6)和 NsFEMstab-UL 以及具有网格自适应调整功能的 FEM-ALE(T6)和 NsFEMstab-ALE。需要强调的是, 上述六种方法中, 若名称中包含(T6)表明该方法采用 T6 单元类型, 否则采用的是 T3 单元类型。该地基初始有限元网格包含 208 个三角形单元, 采用 T6 单元类型时网格包含 455 个节点, 采用 T3 单元类型时网格包含 124 个节点。前四种方法不具备网格自适应调整功能, 在整个加载过程中不进行网格重划分; 加载过程中, 若网格畸变明显并满足前述网格调整准则时, 具有网格自适应调整功能的 FEM-ALE(T6)和 NsFEMstab-ALE 可根据动态布点法进行网格自适应调整。针对本算例, 加载结束时, FEM-ALE(T6)对应的网格包括 826 个单元和 1737 个节点, NsFEMstab-ALE 对应的网格包括 812 个单元和 451 个

节点。

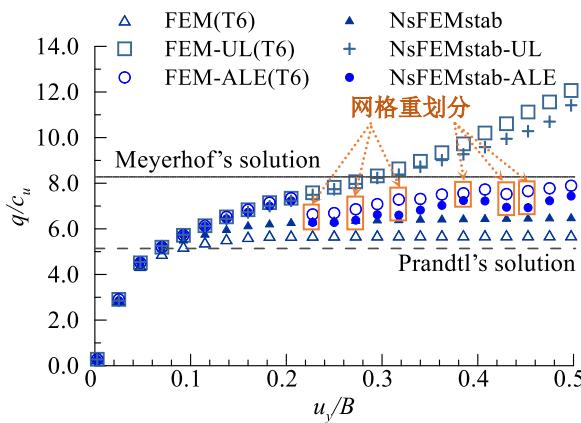


图 6 由 FEM(T6)、FEM-UL(T6)、FEM-ALE(T6)、NsFEMstab、NsFEMstab-UL 和 NsFEMstab-ALE 计算获得的荷载-位移曲线

Fig.6 Load-displacement curves calculated by FEM(T6), FEM-UL(T6), FEM-ALE(T6), NsFEMstab, NsFEMstab-UL and NsFEMstab-ALE

图 6 给出 FEM(T6)、FEM-UL(T6)、NsFEMstab、NsFEMstab-UL、FEM-ALE(T6)和 NsFEMstab-ALE 计算获得的荷载-位移曲线，其中横坐标表示无量纲承载力  $q/c_u$ ，纵坐标为归一化位移加载  $u_y/B$ 。图中也给出 Prandtl 与 Meyerhof 理论解，分别为  $5.14c_u$  和  $8.28c_u$ 。在给定网格密度条件下，基于小变形假设的 NsFEMstab 和 FEM(T6)计算的承载力均高于 Prandtl 理论解，但又均低于 Meyerhof 理论解，且 NsFEMstab 计算的承载力略高于 FEM(T6)。考虑几何非线性的 FEM-UL(T6)和 NsFEMstab-UL 计算的承载力明显更高，且约在  $u_y/B=0.3$  后，两种方法计算的曲线均高于 Meyerhof 理论解，表明大变形导致的网格畸变已显著影响承载力计算结果。引入网格自适应调整技术后，网格畸变导致的计算误差显著降低，FEM-ALE(T6)和 NsFEMstab-ALE 计算结果均介于 Prandtl 理论解和 Meyerhof 理论解之间，展示了分解 ALE 法的应用效果。需要强调的是，与一些采用 h 自适应网格技术的文献（如[17]）观察一致：每次网格自适应调整时，受网格重划分和变量映射影响，计算获得的荷载-位移曲线对应点会呈现一定程度的波动。例如，图 6 中，FEM-ALE(T6)计算过程中网格重划分共计 13 次，分别对应基底位移为  $u_y=0.41m$ 、 $0.42m$ 、 $0.43m$ 、 $0.46m$ 、 $0.47m$ 、 $0.48m$ 、 $0.58m$ 、 $0.67m$ 、 $0.76m$ 、 $0.83m$ 、 $0.84m$ 、 $0.88m$  和  $0.89m$ ；而 NsFEMstab-ALE 网格重划分共 14 次，分别对应基底位移为  $u_y=0.42m$ 、 $0.43m$ 、 $0.44m$ 、 $0.47m$ 、 $0.48m$ 、 $0.49m$ 、 $0.53m$ 、 $0.63m$ 、 $0.64m$ 、 $0.79m$ 、 $0.84m$ 、 $0.85m$ 、 $0.89m$  和  $0.9m$ 。为进一步验证分解 ALE 法的有效性，将其计算结果与参考文献数值结果进行对比，如图 7 所示。本文 FEM-ALE(T6)的计算结

果与 Kardani 等<sup>[17]</sup>的 FEM-ALE(T6)计算结果较为接近，两者差别主要由网格密度及网格调整方案差异造成。粒子有限元法 PFEM(T3)<sup>[18]</sup>和节点光滑粒子有限元法 SNS-PFEM(T3)<sup>[19]</sup>计算的曲线结果在地基近破坏阶段比较接近，但在基底压密阶段 PFEM(T3)与其他方法结果偏差较大。NsFEMstab-ALE 计算的曲线结果则比 Kardani 等<sup>[17]</sup>和 PFEM(T3)<sup>[18]</sup>的曲线结果略大，而比 FEM-ALE(T6)的曲线结果略小。上述方法计算的曲线均位于 Prandtl 理论解和 Meyerhof 理论解之间，验证了本文数值方法的可靠性。

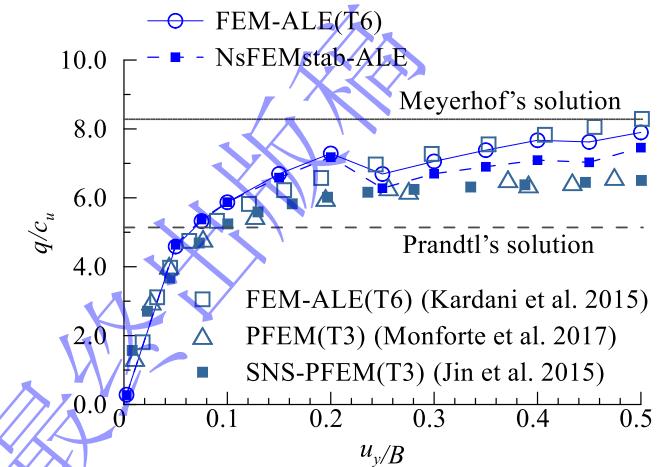


图 7 由 FEM-ALE(T6)、NsFEMstab-ALE 和其他数值方法计算获得的荷载-位移曲线

Fig.7 Load-displacement curves calculated by FEM-ALE(T6), NsFEMstab-ALE and other numerical methods

表 1 FEM-ALE(T6)与 NsFEMstab-ALE 的网格自适应调整对比

Table 1 Comparison of adaptive remeshing of FEM-ALE(T6) and NsFEMstab-ALE

| 计算方法          | 单元数量 |     | 节点数量 |      | 积分点数量 |      |
|---------------|------|-----|------|------|-------|------|
|               | 初始步  | 最终步 | 初始步  | 最终步  | 初始步   | 最终步  |
|               |      |     |      |      |       |      |
| FEM-ALE(T6)   | 208  | 826 | 455  | 1737 | 624   | 2478 |
| NsFEMstab-ALE | 208  | 812 | 124  | 451  | 124   | 451  |

表 1 给出 FEM-ALE(T6)和 NsFEMstab-ALE 两种方法网格自适应调整对比。在加载最终步，两者的网格单元数相差不大，但整个加载计算过程中 FEM-ALE(T6)的节点数约为 NsFEMstab-ALE 的 3.67~3.85 倍，FEM-ALE(T6)的积分点数量约为 NsFEMstab-ALE 的 5.03~5.49 倍。因为有限元计算的自由度数量与节点数密切相关，在加载和网格自适应调整过程中，采用 T3 单元类型的 NsFEMstab-ALE 相比 FEM-ALE(T6)具有更少的自由度数与积分点数，因此 NsFEMstab-ALE 计算成本更低。

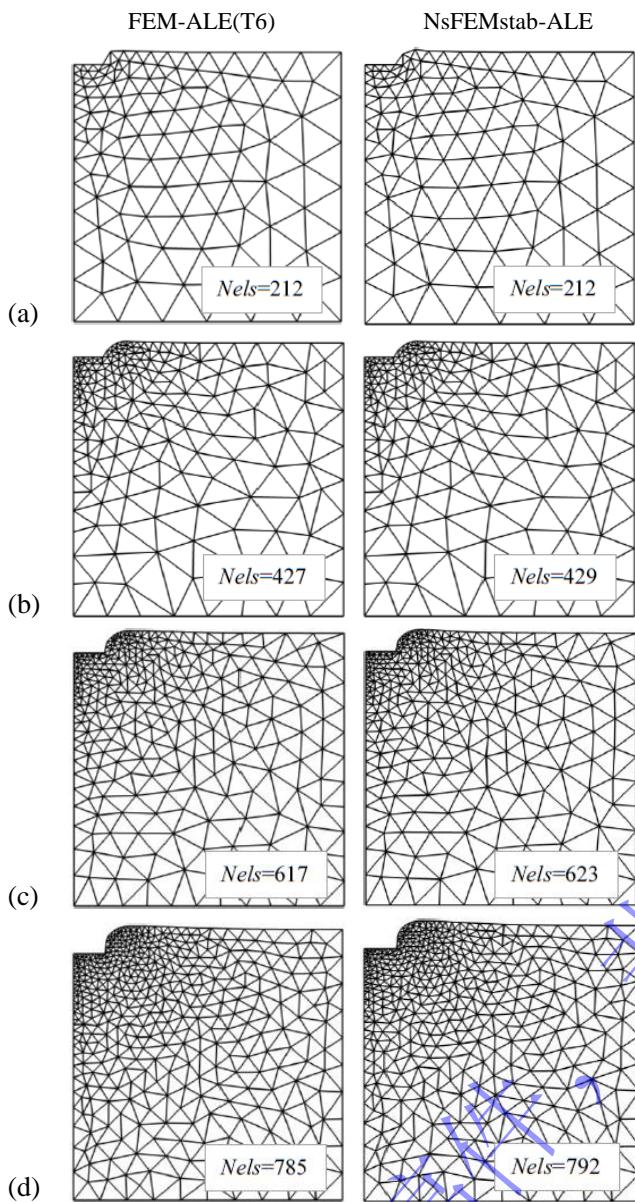


图 8 自适应网格方案中的动态布点和网格加密演变: (a) 1 次重划分后; (b) 5 次重划分后; (c) 8 次重划分后; (d) 10 次重划分后

Fig.8 Dynamic placement of nodes and mesh refining in the adaptive remeshing scheme: (a) after remeshing one time; (b) after remeshing 5 times; (c) remeshing 8 times; (d) after remeshing 10 times.

表 2 给出了不同方法在最终步结束后网格质量对比, 包括网格畸变率( $R_d$ ), 最大单元长细比  $\max_A_r = \max(A_r^{(e)})$  ( $e \in [1, Nels]$ ) 和最大斜度  $\max_s_d = \max(s_d^{(e)})$  ( $e \in [1, Nels]$ )。图 8 展示了 FEM-ALE(T6) 和 NsFEMstab-ALE 在自适应网格方案中的动态布点和网格加密演变, 分别为网格重划分 1 次、5 次、8 次和 10 次后的有限元网格。随着基底约束位移的增加, 初始网格中原本质量较好的单元开始扭曲, 当满足网格调整准则时, 启动布点加密和边界网格平滑处

理。结合表 2 的网格质量度量指标和图 8 中各方法的网格重划分可以看出, 最终步结束后, FEM-ALE(T6) 获得的指标分别为  $R_d=0.12$ 、 $\max_A_r=3.78$  和  $\max_s_d=0.67$ , 而 NsFEMstab-ALE 获得的指标分别为  $R_d=0.25$ 、 $\max_A_r=3.31$  和  $\max_s_d=0.61$ , 相比其他方法, 两种方法的三个网格质量度量指标明显更接近指标最优值(即  $R_d=0.0$ 、 $A_r=2/\sqrt{3}$  和  $s_k=0.0$ )。因此, 本文提出的网格自适应技术能够在确保单元质量条件下实现网格自动加密, 确保土体局部发生大变形时, 数值计算仍能满足精度要求。

表 2 不同方法在最终步结束后网格质量对比

Table 2 Comparison of mesh quality in different calculation methods after the final calculation step

| 计算方法          | $R_d$ | $\max_A_r$ | $\max_s_d$ |
|---------------|-------|------------|------------|
| FEM(T6)       | 9.62  | 37.74      | 0.97       |
| NsFEMstab     | 8.65  | 246.7      | 0.99       |
| FEM-UL(T6)    | 6.25  | 41.66      | 0.97       |
| NsFEMstab-UL  | 10.10 | 18.39      | 0.94       |
| FEM-ALE(T6)   | 0.12  | 3.78       | 0.67       |
| NsFEMstab-ALE | 0.25  | 3.31       | 0.61       |

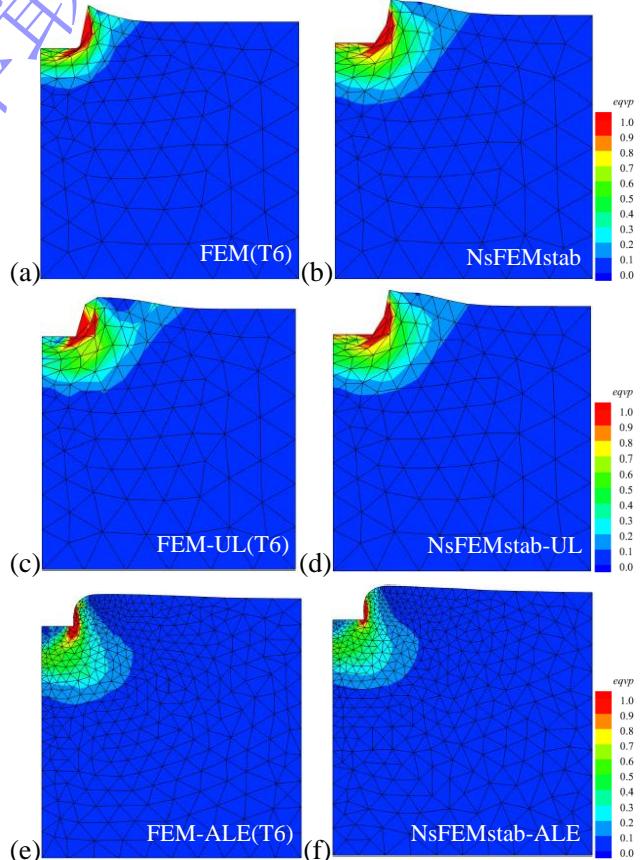


图 9 不同方法计算获得的等效塑性应变云图

Fig.9 Contours of the equivalent deviatoric plastic strain calculated by different methods

图 9 所示为六种方法对应的加载最终步后等效塑性应变云图, 各种方法得到的等效塑性应变全场值均在合理范围内。FEM(T6)与 NsFEMstab 的云图分布及其展示的地基破坏形态相似, 两种方法存在的差异主要与地基接近破坏时网格畸变带来数值误差相关, 如图 9(a-b)所示加载边界附近单元畸变严重甚至发生了交叉重叠, 表明基于小变形假设的数值方法不再适用于该类大变形问题。如图 9(c-d)所示, 相比 FEM(T6)和 NsFEMstab, FEM-UL(T6)和 NsFEMstab-UL 计算的网格变形(包括竖向位移分布)有所改善, 表明在进行大变形分析时考虑几何非线性是必要的, 然而, 网格畸变仍旧存在, 仍会导致 FEM-UL(T6) 和 NsFEMstab-UL 出现较大计算误差。采用分解 ALE 法后, 通过网格自适应调整能够解决大变形网格畸变问题, 使大变形问题计算精度得到明显改善。从图 9(e-f)可以看出, 由 FEM-ALE(T6)和 NsFEMstab-ALE 计算获得的等效塑性应变云图和网格变形图能够给出合理的等效塑性应变和地基沉降变形数值结果。

## 4 小结

将 NsFEMstab 与分解 ALE 法相结合, 提出适用于大变形分析的 NsFEMstab-ALE 法, 该方法涉及 UL 格式推导、网格自适应调整策略和新旧网格之间的变量映射方案。将 NsFEMstab-ALE 法应用于刚性基础地基大变形问题, 获得如下主要结论:

(1) NsFEMstab-ALE 法中采用 NsFEMstab 是因为该方法采用三节点三角形 (T3) 单元类型, 且位移、应力和应变等变量均存储在单元节点上, 该类型有限元法在保证数值精度的同时, 也有助于提高 ALE 计算过程中新旧网格之间的变量映射效率。

(2) 针对大变形网格畸变情况, 提出一种用于网格自适应调整的动态布点法, 能够实现网格疏密区的平滑过渡, 确保大变形模拟过程中每次重划分网格均具有良好的网格单元质量。

(3) 以刚性条形基础地基极限承载力问题为例, 对所提出 NsFEMstab-ALE 法进行验证, 并与 FEM-ALE(T6)法进行对比分析。结果表明, 将 NsFEMstab-ALE 法(或 FEM-ALE(T6)法)与自适应网格重划分技术相结合, 能够获得与参考文献相符的荷载-位移响应曲线, 并获得合理的等效塑性应变云图和网格变形图。

## 参考文献:

- [1] 陈曦, 刘春杰. 有限元强度折减法中安全系数的搜索算法[J]. 岩土工程学报, 2010, 28(9):1443–1447. (CHEN Xi, LIU

Chunjie. Search algorithms for safety factor in finite element shear strength reduction method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 28(9):1443–1447. (in Chinese))

- [2] CHEN X, WU Y, YU Y, et al. A two-grid search scheme for large-scale 3-D finite element analyses of slope stability[J]. Computers and Geotechnics, 2014, 62: 203–215.
- [3] CHEN X, TANG J B, CUI L S, et al. Stability and failure pattern analysis of bimslope with Mohr-Coulomb matrix soil: from a perspective of micropolar continuum theory. Journal of Central South University, 2023, 30(10): 3450–3466.
- [4] BENSON D J. An efficient, accurate, simple ale method for nonlinear finite element programs[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1989, 72(3): 305–350.
- [5] 刘开富, 陈阶亮, 谢新宇, 等. 基坑放坡开挖破坏性状大变形有限元分析[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(增刊 1):1406-1410. (LIU Kaifu, CHEN Jieliang, XIE Xinyu, et al. Finite element analysis of large deformation in destructive condition of foundation pit slope excavation[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(S1):1406-1410. (in Chinese))
- [6] NAZEM M, SHENG D, CARTER J P. Stress integration and mesh refinement for large deformation in geomechanics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010, 65(7):1002-1027.
- [7] 王腾, 何家龙, 刘锦昆. 管土界面摩擦疲劳效应对深水井口导管贯入阻力的影响[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(8): 1532-1539. (WANG Teng, HE Jialong, LIU Jinkun. Influence of friction fatigue effect at pipe-soil interface on penetration resistance of conduit in deepwater wellhead[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(8): 1532-1539. (in Chinese))
- [8] 刘顺. 基于 ALE 方法的地震液化大变形数值方法研究与应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2021. (LIU Shun. Research and application of numerical method for seismic liquefaction and large deformation based on ALE method[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2021. (in Chinese))
- [9] LIU G R, NGUYEN-THOI T, NGUYEN-XUAN H, et al. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems[J]. Computers and Structures, 2009, 87(1-2): 14-26.
- [10] MENG J, ZHANG X, HUANG J, et al. A smoothed finite element method using second-order cone programming[J]. Computers and Geotechnics, 2020, 123: 103547.
- [11] LI Y, LIU G R. A novel node-based smoothed finite element

- method with linear strain fields for static, free and forced vibration analyses of solids[J]. Applied mathematics and computation, 2019, **352**(1): 30-58.
- [12] LYU Y N, CHEN X, TANG J B, et al. Application assessment of hybrid smoothed finite element method for geotechnical deformation and stability analysis. Journal of Central South University, 2023, **30**: 919-933.
- [13] CHAI Y B, LI W, LI T Y, et al. Analysis of underwater acoustic scattering problems using stable node-based smoothed finite element method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2016, **72**: 27-41.
- [14] LYU Y N, CHEN X, TANG J B, et al. An implicit stabilized node-based smoothed finite element method for ultimate bearing capacity analysis of strip footing. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2024, **160**: 52-64.
- [15] FORNBERG B, FLYER N. Fast generation of 2-D node distributions for mesh-free PDE discretizations. Computers & Mathematics with Applications, 2015, **69**(7): 531-544.
- [16] KARDANI M, NAZEM M, SHENG D, et al. Large deformation analysis of geomechanics problems by a combined rh-adaptive finite element method[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **49**: 90-99.
- [17] KARDANI M, NAZEM M, CARTER J P, et al. Efficiency of high-order elements in large-deformation problems of Geomechanics[J]. International Journal of Geomechanics, 2015, **15**(6): 04014101.
- [18] MONFORTE L, ARROYO M, CARBONELL J M, et al. Numerical simulation of undrained insertion problems in geotechnical engineering with the particle finite element method (PFEM)[J]. Computers and Geotechnics, 2017, **82**: 144-156.
- [19] JIN Y F, YIN Z Y, ZHOU X W, et al. A stable node-based smoothed PFEM for solving geotechnical large deformation 2D problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, **387**: 114179.