

DOI: 10.11779/CJGE20240391

# 基于非线性准则的三维土坡稳定性拟动力分析

朱学亮<sup>1</sup>, 邵帅<sup>2</sup>, 邵生俊<sup>1,3</sup>, 姬羽菲<sup>1</sup>, 禹志平<sup>1</sup>

(1. 西安理工大学岩土工程研究所, 陕西 西安 710048; 2. 西安理工大学建筑与城市规划系, 陕西 西安 710048; 3. 西安理工大学陕西省黄土力学与工程重点实验室, 陕西 西安 710048)

**摘要:** 线性强度准则被广泛应用于描述岩土材料的抗剪强度。但研究表明, 几乎所有岩土材料的强度包络线都具有非线性特性。此外, 边坡失稳往往受不利自然因素的影响, 特别是地震活动频发的区域。因此, 基于极限分析上限法, 提出了一种非线性强度准则下三维土坡抗震稳定性分析方法, 采用多切线法分段逼近幂律强度准则包络线, 以考虑土体强度非线性。同时, 引入一种新的三维多锥破坏机制来适应非线性幂律准则。采用修正拟动力法对地震荷载进行表征, 考虑土体阻尼特性且不违反边坡表面零应力边界条件。根据功能平衡方程, 推导了两种评价边坡稳定性的指标, 并结合遗传算法和序列二次规划算法寻找最优解。通过与已有文献比较, 验证了所提方法的有效性和准确性。进一步参数化研究揭示了土体强度非线性、地震作用和土体三维几何特性对边坡稳定性的影响。

**关键词:** 幂律准则; 广义切线法; 三维土坡; 拟动力法; 极限分析

中图分类号: TU444 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2025)09-1925-11

作者简介: 朱学亮(1996—), 男, 博士研究生, 主要从事黄土力学及边坡稳定性等方面研究。E-mail: andyzxl96@163.com。

## Pseudo-dynamic analysis of three-dimensional soil slope based on nonlinear criterion

ZHU Xueliang<sup>1</sup>, SHAO Shuai<sup>2</sup>, SHAO Shengjun<sup>1,3</sup>, JI Yufei<sup>1</sup>, YU Zhiping<sup>1</sup>

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 2. Department of Architecture and Urban Planning, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China; 3. Shaanxi Key Laboratory of Loess Mechanics and Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** The linear strength criterion is widely used to describe the shear strength of geotechnical materials, however studies have shown that almost all strength envelopes of geotechnical materials have nonlinear characteristics. In addition, slope instability is often influenced by adverse natural factors, especially in areas of frequent seismic activities. Therefore, based on the upper bound method of limit analysis, a seismic stability analysis method of three-dimensional (3D) soil slopes under nonlinear strength criterion is proposed in this paper. The multi-tangent method is used to approximate the envelope of the Power-Law strength criterion to account for the nonlinearity of the soil strength. Meanwhile a new 3D multi-cone failure mechanism is introduced to describe the nonlinear Power-Law criterion. A modified pseudo-dynamic method is used to characterize the seismic load, which does not violate the zero-boundary condition and considers the damping properties of geomaterials. According to the work- energy balance equation, two evaluation indexes for evaluating slope stability are derived, and the optimal solution can be obtained by combining genetic algorithm and sequential quadratic programming algorithm. By comparing with the existing literature, the effectiveness and accuracy of the proposed method are verified. Further parametric studies reveal the influence of soil strength nonlinearity, seismic action and 3D geometric characteristics of soil on slope stability.

**Key words:** power-law criterion; generalized tangent method; three-dimensional soil slope; pseudo-dynamic method; limit analysis

基金项目: 国家自然科学基金项目(52108342); 陕西省自然科学基础研究计划-引汉济渭联合基金项目(2019JLP-21, 2019JLZ-13); 西安理工大学博士启动金项目(107-451122001); 陕西省水利科技计划项目(2021slkj-12) This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 52108342), the Basic Research Program of Natural Science in Shaanxi Province-Han-Wei Joint Found Project (Grant No. 2019JLP-21, 2019JLZ-13), the Doctoral Initial Funding of Xi'an University of Technology (Grant No.107-451122001), and the Shaanxi Water Science and Technology Program Project (Grant No. 2021slkj-12).

收稿日期(Received): 2024-04-21 修回日期(Revised): 2025-03-24 接受日期(Accepted): 2025-03-27 网络出版日期(Online): 2025-03-28

\*通信作者 (E-mail: shaoshuai@xaut.edu.cn)

## 0 引言

边坡稳定性问题是岩土工程领域的经典课题, 特别是地震活动频发区域的抗震稳定性研究。地震荷载所引起的滑坡灾害制约着经济建设的发展, 且严重威胁着人民生命财产安全, 有必要深入研究。现有研究将线性 Mohr-Coulomb (M-C) 强度准则作为描述岩土材料强度特性的常用准则, 并且广泛应用于边坡稳定性分析<sup>[1]</sup>。然而, 大量试验和工程实践表明, 岩土材料的强度非线性特征是普遍存在的, 抗剪强度参数随相关应力状态的变化而变化, 显然以线性强度包络线来表征岩土材料的强度特性并不适用<sup>[2-4]</sup>。因此, 许多学者采用了非线性强度准则来分析边坡稳定性问题并取得了诸多成果, 验证了其更接近于实际情况<sup>[5-8]</sup>。

地震荷载是触发边坡失稳的关键因素, 合理描述地震力对边坡的动力响应是抗震稳定性研究的基础<sup>[9]</sup>。拟静力法将地震荷载处理为惯性力, 以其简单的理论近似方法得到广泛应用<sup>[10-11]</sup>。然而, 过于简化的形式导致其忽略了地震波的动力特性, 使得在边坡抗震稳定性分析时很多地震信息的丢失, 例如地震周期和地震加速度的时空效应<sup>[12]</sup>。为了描述实际地震荷载克服这一局限性, 将地震加速度假设为正弦波, 考虑地震波速、地震周期以及加速度放大效应, 称之为拟动力法<sup>[13-14]</sup>。该方法有效地提高了评估边坡稳定性的精度, 但仍存在一些不足, 例如未考虑岩土材料的阻尼特性以及未满足表面零应力边界条件<sup>[15-16]</sup>。随着研究的进一步深入, 将土体视为黏弹性材料, 由一维运动方程推导地震加速度表达式, 提出了修正后的拟动力法, 该方法有效地克服了上述问题<sup>[17-18]</sup>。

现有研究通常将边坡稳定性问题视为一个二维平面应变问题, 主要因为二维条件下的边坡破坏机制容易构建。但大量统计资料表明<sup>[19-20]</sup>: 实际边坡失稳常伴有明显的三维空间效应, 特别是宽度方向受限和狭窄边坡<sup>[21-22]</sup>。此时, 沿用二维平面应变解来分析边坡稳定性会导致结果过于保守, 而三维条件下的解则更符合实际情况<sup>[23-25]</sup>。因此, 考虑土体强度非线性和三维几何特征对边坡抗震稳定性评价是一个具有重要理论和实际意义的课题。

本文在极限分析框架内提出了一种考虑土体强度非线性的三维边坡地震稳定性分析方法。利用多切线法对非线性包络线近似逼近, 从而避免了单一的线性近似, 同时引入一种新的多锥破坏机制来适应土强度非线性。其中, 地震力采用修正后的拟动力法来表征, 考虑了土体阻尼特性。利用功-能平衡方程推导了用来评价边坡稳定性的指标, 结合一种混合优化算法来获得最优解。最后, 通过参数研究揭示了土体强度非线

性、地震作用和三维几何特征对边坡稳定性和临界滑动面的影响。

## 1 基本理论方法与强度准则

### 1.1 幂律准则

大量试验和工程实践表明<sup>[4]</sup>, 土的抗剪强度与相关应力状态之间的关系是非线性的。幂律准则 (power-law criterion, P-L) 作为描述土体非线性强度特性的非线性强度准则, 已被广泛应用于边坡稳定性分析<sup>[26-29]</sup>。其表达式为

$$\tau_f = c_0 \left( 1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (1)$$

式中:  $\tau_f$  和  $\sigma_n$  分别为剪应力和正应力;  $\sigma_t$  为剪应力  $\tau_f$  等于零时的拉应力, 即土体单轴抗拉强度;  $c_0$  为初始黏聚力;  $m$  为控制强度包络线曲率的非线性系数。当  $m=1.0$  时, 式 (1) 将退化为线性 Mohr-Coulomb 强度准则, 其黏聚力和摩擦角的正切值分别为  $c_0$  和  $c_0/\sigma_t$ 。

针对 P-L 准则的非线性特征, 使用广义切线法可将其近似线性化, 通过在非线性强度包络线任意一点  $P$  处确定一条切线, 如图 1 所示。

$$\tau_f = c_t + \sigma_n \tan \delta_t \quad (2)$$

式中:  $c_t$  和  $\tan \delta_t$  分别为横轴上的截距和切线斜率, 即等效抗剪强度参数。根据几何形状关系可以得到如下关系:

$$c_t = c_0 \left( 1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \right)^{\frac{1-m}{m}} \left[ 1 + \frac{(m-1)\sigma_n}{m\sigma_t} \right] \quad (3)$$

$$\tan \delta_t = \frac{c_0}{m\sigma_t} \left( 1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \right)^{\frac{1-m}{m}} \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3) 可以得到如下关系:

$$c_t = \frac{m-1}{m} c_0 \left[ \frac{m\sigma_t \tan \delta_t}{c_0} \right]^{\frac{1}{1-m}} + \sigma_t \tan \delta_t \quad (5)$$

式 (5) 为等效黏聚力和内摩擦角的关系, 强度包络线处的任意应力状态点均对应一组唯一的抗剪强度参数。

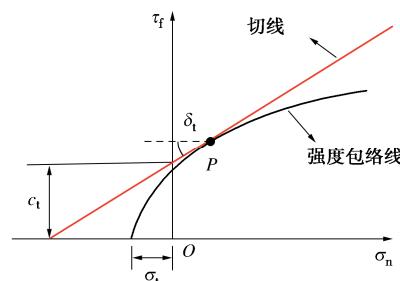


图 1 幂律包络线的线性化: 广义切线法

Fig. 1 Linearization of power-law envelope: generalized tangent method

## 1.2 多切线法

基于极限分析理论, 广义切线法在边坡稳定性问题上的应用已被证明了其可行性, 但是这种单一的线性近似导致评估边坡稳定性解的精度被迫降低, 特别是强度非线性程度高的岩土材料<sup>[5]</sup>。因此, 本文将利用多切线法对非线性强度包络线进行分段近似, 如图2所示。为了能够将其顺利纳入极限分析中, 引入P-L强度准则的参数形式:

$$\tau_f = c_0 \left[ \frac{m\sigma_t \tan \delta_i}{c_0} \right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad (6)$$

$$\sigma_n = \sigma_t \left( \frac{m\sigma_t \tan \delta_i}{c_0} \right)^{\frac{m}{1-m}} - \sigma_t. \quad (7)$$

式中:  $\delta_i$  为非线性 P-L 强度包络线对应的破裂角, 如图3所示。

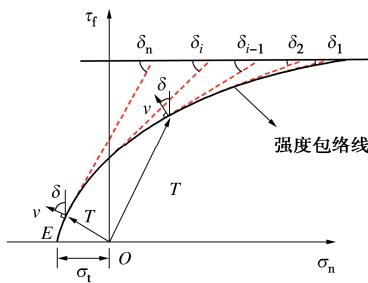


图2 幂律包络线的线性化: 多向切线法

Fig. 2 Linearization of power-law envelope: multi-directional tangent method

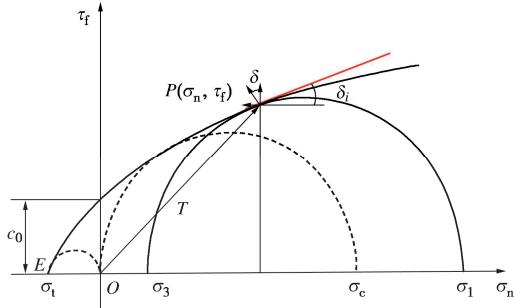


图3 幂律强度包络线和应力矢量

Fig. 3 Power-law strength envelope and stress vector

## 1.3 修正拟动力法

为了弥补传统拟动力法的不足, 将土体视为 Kelvin-Voigt 黏弹性介质, 该介质由一个纯弹性弹簧和一个纯黏性阻尼器并联组成, 实现了黏弹性波在考虑土体阻尼特性下的传播<sup>[30]</sup>。此外, 研究发现水平方向的地震加速度占主导地位, 垂直方向的影响可以忽略不计<sup>[15-16]</sup>, 故本研究只考虑了水平地震作用的影响。假设地震波从坡底传播到坡顶, 用  $z$  方向表示。Kelvin-Voigt 介质中剪切变形的阻力由弹性分量和黏性分量的总和给出, 记为<sup>[14]</sup>

$$\tau = \lambda G + \xi \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \quad (8)$$

式中:  $\xi$  为土体黏度 ( $\xi = 2G\mu/\varpi$ ),  $\mu$  为土体阻尼比,  $\varpi$  为角速度 ( $\varpi = 2\pi/T$ ),  $T$  为振动周期,  $G$  和  $\lambda$  ( $\lambda = \partial u_h / \partial z$ ) 分别为剪切模量和剪切应变, 其中  $u_h$  为水平方向地震所引起的位移。

将剪切波的一维运动方程与式(8)相结合, 得到偏微分方程如下:

$$G \frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2} + \xi \frac{\partial^3 u_h}{\partial z^2 \partial t} = \rho_s \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2}. \quad (9)$$

式中:  $\rho_s$  为土壤密度。对上述微分方程施加边界条件:

① 坡顶 ( $z = H$ ) 处施加零应力约束; ② 假设坡底 ( $z = 0$ ) 处水平位移  $u_t = u_{h0} \cos(\varpi t)$ , 可推导得到地震所引起的水平位移方程<sup>[17-18]</sup>:

$$u_h(z, t) = \frac{u_{h0}}{C_{s1}^2 + S_{s1}^2} [(C_{s1}C_{s2} + S_{s1}S_{s2}) \cos(\varpi t) + (S_{s1}C_{s2} - C_{s1}S_{s2}) \sin(\varpi t)]. \quad (10)$$

式中:

$$C_{s1} = \cosh(z_{s2}) \cos(z_{s1}), \quad (11)$$

$$S_{s1} = -\sinh(z_{s2}) \sin(z_{s1}), \quad (12)$$

$$C_{s2} = \cosh \left[ z_{s2} \left( 1 - \frac{z_i}{H} \right) \right] \cos \left[ z_{s1} \left( 1 - \frac{z_i}{H} \right) \right], \quad (13)$$

$$S_{s2} = -\sinh \left[ z_{s2} \left( 1 - \frac{z_i}{H} \right) \right] \sin \left[ z_{s1} \left( 1 - \frac{z_i}{H} \right) \right], \quad (14)$$

$$z_{s1} = \frac{\varpi H}{v_s} \left[ \frac{\sqrt{1+4\mu^2} + 1}{2(1+4\mu^2)} \right]^{0.5}, \quad (15)$$

$$z_{s2} = -\frac{\varpi H}{v_s} \left[ \frac{\sqrt{1+4\mu^2} - 1}{2(1+4\mu^2)} \right]^{0.5}. \quad (16)$$

式中:  $v_s$  为剪切波速;  $u_{h0}$  为初始水平位移。通过将式(10)对时间  $t$  做两次微分可以得到地震加速度的表达式:

$$a_h(z, t) = \frac{k_h g}{C_{s1}^2 + S_{s1}^2} [(C_{s1}C_{s2} + S_{s1}S_{s2}) \cos(\varpi t) + (S_{s1}C_{s2} - C_{s1}S_{s2}) \sin(\varpi t)]. \quad (17)$$

式中:  $k_h$  为坡底水平地震加速度系数,  $k_h g = -\varpi^2 u_{h0}$ 。

## 2 三维“多锥形”旋转破坏机制

众所周知, 构建合理的边坡破坏机制需满足塑性流动法则的正交性, 即运动允许的速度场与边坡破裂面保持恒定的破裂角 (线性 Mohr-Coulomb 准则  $\delta = \varphi$ )。然而, 在 P-L 强度准则中破裂角是由强度包络线非线性决定的变角。为了适应 P-L 强度包络线的非线性, 本文采用了一种新的三维多锥破坏机制, 该机制由一系列不同破裂角  $\delta_i$  的曲线锥组成,  $H$  为边坡高度,

$\beta$  为坡度, 如图 4 所示。

$$\frac{H}{r_0} = e^{\sum_{j=1}^n (\theta_j - \theta_{j-1}) \tan \delta_j} \sin \theta_n - \sin \theta_0 \quad (18)$$

式中: 边坡破坏块  $A_0 A_1 A_2 A_j A_n (B) C A_0$  由  $n$  个分段组成, 每段破裂角  $\delta_i$  由图 2 定义, 整个破坏块绕轴线相交点  $O$  以角速度  $\omega$  旋转。边坡三维多锥破坏机制第  $j$  段边界的上、下对数螺旋线表示为

$$r(\theta) = r_{j-1} e^{(\theta - \theta_{j-1}) \tan \delta_j} \quad (\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j) \quad (19)$$

$$r'(\theta) = r'_j e^{-(\theta - \theta_{j-1}) \tan \delta_j} \quad (\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j) \quad (20)$$

式中:  $r_{j-1}$  和  $r'_j$  分别为旋转角度  $\theta_{j-1}$  的第  $j-1$  个上、下锥的半径, 如下所示:

$$r_{j-1} = r_0 e^{\sum_{k=1}^{j-1} (\theta_k - \theta_{k-1}) \tan \delta_k} \quad (21)$$

$$r'_j = r'_0 e^{-\sum_{k=1}^{j-1} (\theta_k - \theta_{k-1}) \tan \delta_k} \quad (22)$$

此外, 圆锥截面半径  $R$  和圆锥轴线到旋转点  $O$  的距离  $r_c$  可表示为

$$R(\theta) = \frac{r(\theta) - r'(\theta)}{2} \quad (23)$$

$$r_c(\theta) = \frac{r(\theta) + r'(\theta)}{2} \quad (24)$$

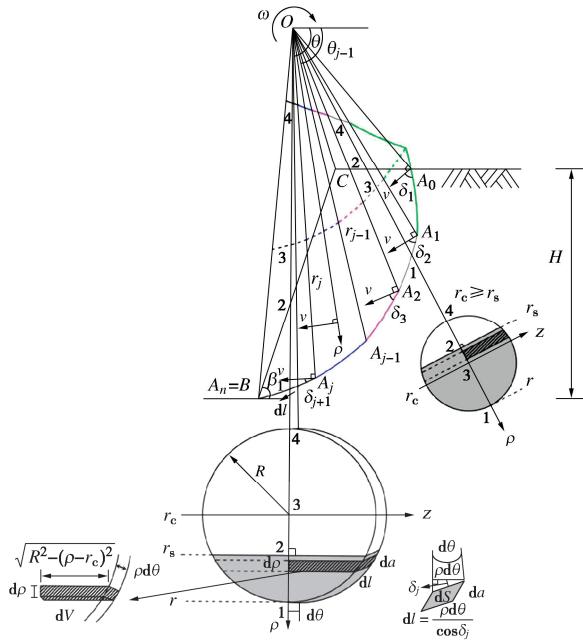


图 4 三维“多锥形”旋转破坏机制

Fig. 4 Three-dimensional “multi-cone” rotational failure mechanism

为了确保在边坡宽度方向受限制时三维特征的完整性, 引入一个中间插入块  $b$  来满足当宽度方向趋于无限大时三维破坏机制退化为二维平面应变机制, 如图 5 所示。

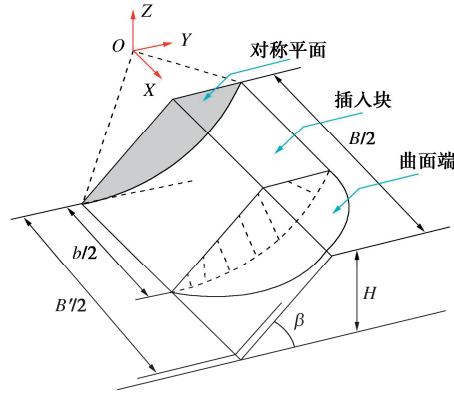


图 5 三维“多锥形”旋转破坏机制中间插入块

Fig. 5 3D “multi-cone” rotational failure mechanism with inferring block

$$\begin{cases} b = B - 2 \max \left[ \sqrt{R^2 - (r_s - r_c)^2} \right] & (r_c < r_s) \\ b = B - 2 \max(R) & (r_c \geq r_s) \end{cases} \quad (25)$$

式中:  $B$  为含插入块的三维多锥破坏机制的总宽度;  $R$ ,  $r_c$  和  $r_s$  分别由式 (23), (24) 和 (26) 计算。

边坡轮廓与旋转中心  $O$  之间的距离  $r_s$  表示为

$$r_s(\theta) = \begin{cases} r_0 \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} & (\theta_0 < \theta < \theta_c) \\ r_h \frac{\sin \theta_h + \cos \theta_h \tan \beta}{\sin \theta + \tan \beta \cos \theta} & (\theta_c < \theta \leq \theta_h) \end{cases} \quad (26)$$

### 3 功-能平衡方程

根据运动学极限分析方法, 功-能平衡方程由总外功率等于内能耗散所建立。在三维边坡抗震稳定分析中, 总外功率包括自重做功功率  $W_\gamma$  和水平地震力做功功率  $W_s$ ; 内能耗散  $D$  由边坡破坏面的黏聚力提供。功-能平衡方程可以表示为

$$W_\gamma + W_s = D \quad (27)$$

#### 3.1 破坏体外力做功功率

由土体自重引起的做功功率  $W_\gamma$  可表示为

$$W_\gamma = \int_V \gamma v \cos \theta dV = \omega \gamma \sum_{j=1}^n \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \int_{r_s}^r \rho^2 \left[ 2\sqrt{R^2 - (\rho - r_c)^2} + b \right] \cos \theta d\rho d\theta \quad (28)$$

式中:  $\gamma$  为土体的重度;  $\omega$  为转动角速度;  $r_s$  由式 (26) 得到。

由于修正后的拟动力法考虑了地震加速度随边坡深度的非线性变化, 而这种高非线性导致地震所做功率难以计算, 为此本文给出一种分层总和法计算地震荷载所做的功率, 分为两个基本步骤: ①将边坡破坏体第  $i$  段水平分为相等的  $n$  层, 计算各层地震荷载做功功率, 如图 6 (a) 所示; ②将各层所得的功率相加得到整个边坡破坏体的地震荷载做功功率。则地震荷

载所做功率可表示为

$$W_s = W_s^{3D} + W_s^{\text{insert}} = \sum_{j=1}^n \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \int_{\theta_i}^{\theta'_i} \frac{\gamma}{g} a_h v_h [l(\theta) + b] dz dx . \quad (29)$$

式中:  $v_h$  为第  $i$  层在极角  $\alpha$  处的水平速度;  $l(\theta)$  为第  $i$  层在极角  $\alpha$  处的三维宽度。几何关系可由图 6 (b) 推导如下:

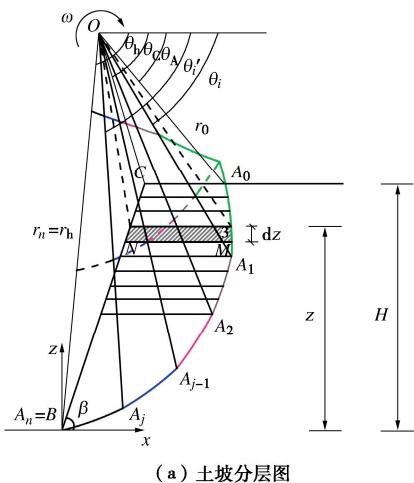
$$v_h = v \sin \theta = \omega r \sin \theta , \quad (30)$$

$$l(\theta) = 2 \sqrt{R^2(\alpha) - \left[ \frac{r \sin \theta}{\sin \alpha} - r_c(\alpha) \right]^2} , \quad (31)$$

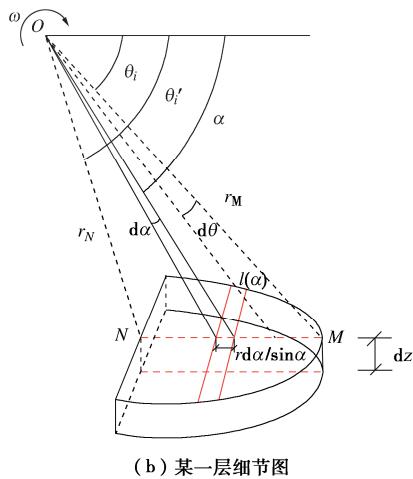
$$dz = \frac{\cos(\theta - \delta_j) r d\theta}{\cos \delta_j} , \quad (32)$$

$$dx = \frac{r \sin \theta d\alpha}{\sin^2 \alpha} , \quad (33)$$

$$z = r_n \sin \theta_n - r \sin \theta . \quad (34)$$



(a) 土坡分层图



(b) 某一层细节图

图 6 计算土坡惯性力功率的分层总和法

Fig. 6 Layered summation method for calculating inertia force

power of soil slope

将式 (30) ~ (34) 代入式 (29), 可得到地震荷

载所做功率:

$$W_s = \frac{\gamma \omega}{g} \sum_{j=1}^n \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \int_{\theta_i}^{\theta'_i} a_h r^3 \sin^2 \theta \frac{\cos(\theta - \delta_j)}{\cos \delta_j \sin^2 \alpha} \left\{ 2 \sqrt{R^2(\alpha) - \left[ \frac{r \sin \theta}{\sin \alpha} - r_c(\alpha) \right]^2} + b \right\} d\alpha d\theta . \quad (35)$$

式中的积分上限可表示为

$$r \sin \theta_i = r_n \frac{\sin(\theta_n + \beta)}{\sin(\theta'_i + \beta)} \sin \theta'_i . \quad (36)$$

### 3.2 破坏体耗能功率

内能耗散  $D$  由边坡破裂面的黏聚力提供, 可表示为

$$D = \omega \sum_{j=1}^n (\tau_j - \sigma_{n_j} \tan \delta_j) \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left[ \int_{r_s}^r \rho^2 \frac{2R}{\sqrt{R^2 - (\rho - r_c)^2}} d\rho + br^2 \right] d\theta . \quad (37)$$

### 3.3 边坡稳定性指标及其优化

根据上述功-能平衡方程式 (27), 代入式 (28), (35) 和 (37), 可以推导得到给定边坡的一个无量纲群组  $\gamma H/c$ , 其临界值表示边坡处于极限状态, 称为稳定系数  $N_f$ :

$$N_f = \left( \frac{\gamma H}{c_0} \right)_{cr} . \quad (38)$$

稳定系数的倒数常用于边坡安全性评估, 因为它能够在非对数坐标系下呈现更大范围的计算结果, 称为稳定数  $N_n$  [22]:

$$N_n = \frac{1}{N_f} = \left( \frac{c_0}{\gamma H} \right)_{cr} . \quad (39)$$

从图 (4) 中可以发现, 构建三维多锥破坏机制所需优化的变量为:  $\theta_0$ ,  $r'_0/r_0$ ,  $n$  个破裂角  $\delta$ ,  $n$  个角度变量  $\eta$ , 共  $2n+2$  个待优化变量。当  $n=1$  时, 广义切线法是多切线法的一个特例。本文选择  $n=10$ , 根据以往研究 [5, 7], 过多的分段数会导致计算成本的提高, 而对计算精度的提高并不大。本文在 MATLAB 框架内开发了一种由遗传算法和序列二次规划算法组合的混合算法, 以确定临界稳定系数和稳定数。首先, 输入待优化变量的初始值, 并满足式 (40) 中规定的约束条件。其次, 利用遗传算法 (GA) 进行全局优化搜索, 并有效识别最优解附近的范围。然后, 继承全局优化得到的范围, 采用序列二次规划算法进行局部优化, 确定最终最优结果 (如图 7 所示)。当连续两次计算的结果之差小于  $10^{-6}$  时, 计算终止。为了确保三维多锥破坏机制的合理性, 程序内的优化变量需要满足以下条件:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \eta_i < \pi, \\ 0 < \theta_i < \pi, \\ \delta_{i-1} \geq \delta_i, i=1,2,\dots,m, \\ \theta_0 < \theta_c < \theta_h < \pi, \\ 0 < t < T. \end{array} \right\} \quad (40)$$

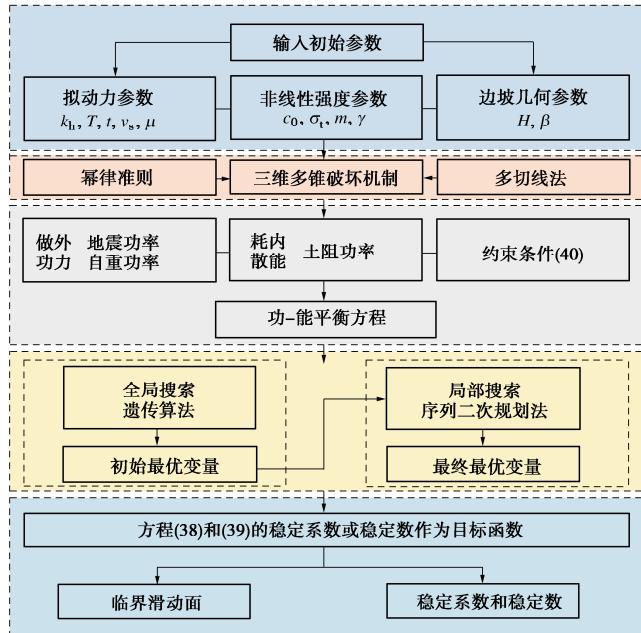


图 7 混合算法流程图

Fig.7 Flow chart of hybrid algorithm

## 4 结果与讨论

### 4.1 与静力条件下已有结果对比

Yang 等<sup>[31]</sup>利用广义切线法研究了非线性准则下的边坡稳定性, 并给出了边坡稳定系数的严格上限解。通过将水平地震系数  $k_h$  设为 0, 其余相关参数与文献[31]一致, 计算了边坡稳定性系数  $N_f$ 。表 1 给出了相应的对比结果, 可以发现本文所提的方法得到了更小的解。根据上限定理, 所获得的上限解越小, 计算边坡稳定系数的效率越高, 表明本文所采用的多切线法给出了更为精确的解, 且三维多锥破坏机制更适用于处理土强度非线性问题。

### 4.2 与地震条件下已有结果对比

为了进一步验证所提方法的有效性, 将 P-L 准则退化为线性 M-C 准则 (非线性系数  $m=1.0$ ), 抗剪强度参数为:  $c=c_0$  和  $\tan \varphi=c_0/\sigma_t$ 。Zhang 等<sup>[16]</sup>采用了修正拟动力法研究了线性 M-C 准则下三维边坡抗震稳定性。基本输入参数与文献[16]一致, 表 2 给出相应的对比结果。从表 2 中可以看出, 两种方法得到的结果非常接近, 但由于优化方法的不同, 最终结果略有不同。总体来说, 本文所提的理论方法是准确且有效的。

表 1 边坡稳定系数  $N_f$  的比较 ( $k_h=0$ ,  $c_0=90$  kPa,  $\sigma_t=247.3$  kPa)

Table 1 Comparison of stability factors  $N_f$  for slopes

$m$	参考值	$\beta$		
		45°	60°	75°
1.2	本文 <sup>a</sup>	12.54	8.95	6.76
	文献[31]	12.61	8.98	6.79
1.4	本文 <sup>a</sup>	10.79	8.13	6.33
	文献[31]	10.87	8.18	6.36
1.6	本文 <sup>a</sup>	9.77	7.60	6.06
	文献[31]	9.84	7.65	6.07
1.8	本文 <sup>a</sup>	9.10	7.24	5.82
	文献[31]	9.17	7.29	5.86
2.0	本文 <sup>a</sup>	8.62	6.97	5.66
	文献[31]	8.69	7.02	5.70

注: 上标 a 表示采用幂律强度准则进行计算 ( $n=10$ )。

表 2 边坡稳定数  $N_n$  的比较 ( $m=1.0$ ,  $B/H=2.0$ ,  $c_0=25$  kPa,  $\sigma_t=93.3$  kPa)

Table 2 Comparison of stability numbers  $N_n$  for slopes

$k_h$	参考值	$\beta$		
		45°	60°	75°
0.0	本文	0.069	0.096	0.124
	文献[16]	0.068	0.095	0.124
0.1	本文	0.087	0.114	0.143
	文献[16]	0.085	0.112	0.141
0.2	本文	0.106	0.133	0.162
	文献[16]	0.105	0.131	0.160
0.3	本文	0.127	0.152	0.182
	文献[16]	0.126	0.151	0.181

## 5 参数分析

根据所提出的三维边坡稳定性分析方法, 本文主要研究了强度非线性参数、地震荷载以及三维几何特征对边坡稳定性的影响, 其中地震条件仅考虑了水平地震加速度系数  $k_h$ , 分别取值为: 0 (静力条件), 0.1, 0.2, 0.3。此外, 所有相关输入参数均在图 8 中给出。

### 5.1 非线性强度参数的影响

图 8 给出了不同非线性系数  $m$  下边坡稳定系数  $N_f$  随初始黏聚力  $c_0$  和单轴抗拉强度  $\sigma_t$  的变化, 从图 8 (a) 可以发现边坡稳定系数随着初始黏聚力  $c_0$  增大而增大, 且随着非线性系数的增大, 这种趋势更为显著。实际上, 边坡稳定性主要与破坏面上黏聚力提供的阻力有关, 随着初始黏聚力的提高使得内能耗散增加, 意味着边坡更为安全。由图 8 (b) 可知, 边坡稳定系数随着单轴抗拉强度  $\sigma_t$  的增大而非线性减小, 且随着非线性系数的减小, 边坡稳定性迅速下降。需要注意的是, 幂律准则中的 3 个参数是通过大量试验数据确定的, 其物理意义并不完全等同于传统定义上的物理参数<sup>[5]</sup>。这就解释了随着单轴抗拉强度的增加, 土的抗剪强度反而降低, 而不是实际意义上的土性质的提

高, 从式(1)中不难看出这一点。

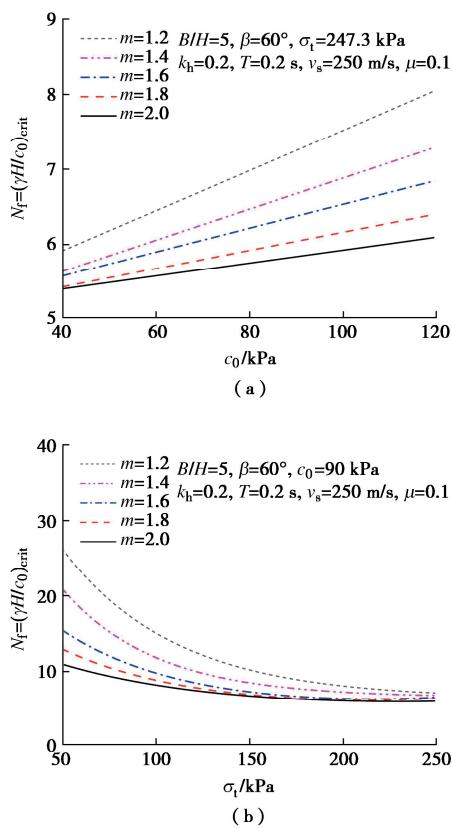


图 8 非线性参数对边坡稳定性的影响

Fig. 8 Influence of nonlinear parameters on slope stability

## 5.2 水平地震加速度系数的影响

图 9 给出了 3 种坡度  $\beta = 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  的边坡稳定性系数随着非线性系数 ( $m = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ ) 与水平地震系数 ( $k_h = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ ) 的变化。与预期结果一致, 边坡稳定系数随着  $k_h$  的增加而减小, 即边坡稳定性随着地震作用的增强而显著降低, 且随着非线性系数的减小, 这一趋势更为显著。当水平地震加速度系数从 0 增加到 0.3 时, 边坡稳定系数的平均减少率为 27.22%。显然, 在考虑地震作用对边坡稳定性的影响时, 有必要考虑岩土材料的强度非线性。

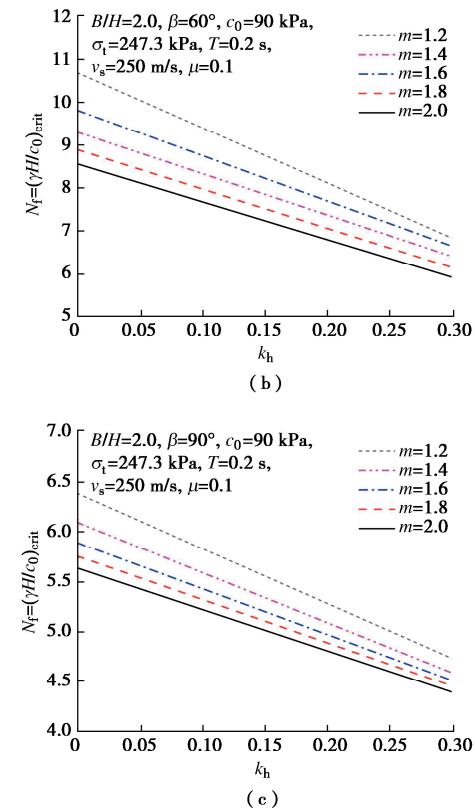
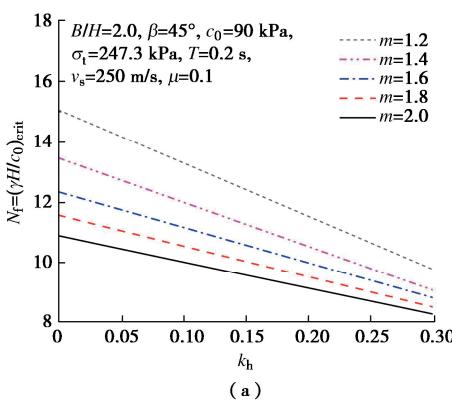
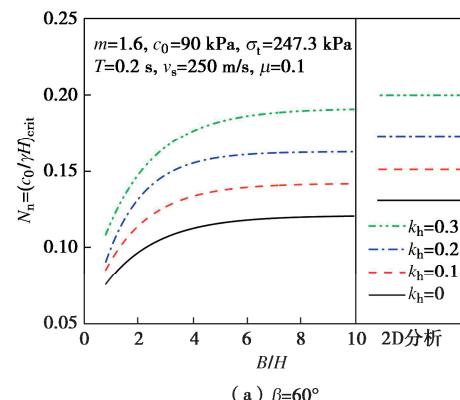


图 9 非线性系数  $m$  和水平地震加速度系数  $k_h$  对边坡稳定性的影响

Fig. 9 Influence of nonlinear coefficient  $m$  and horizontal seismic acceleration coefficient  $k_h$  on slope stability

## 5.3 三维几何特征的影响

图 10 描述了宽高比  $B/H$  对不同  $k_h$  和边坡坡度  $\beta$  下对边坡稳定数  $N_n$  的影响。由图 10 可知, 边坡稳定数随着水平地震加速度系数、边坡坡度和宽高比的增加而增加, 意味着边坡稳定性的降低。值得注意的是, 当  $B/H < 2.0$  时, 这种趋势非常显著, 表明三维效应对边坡稳定性有显著影响, 但当  $B/H > 6.0$  时, 这种效应将会减弱, 并且三维解逐渐退化为二维平面应变解, 三维效应将会导致二维解在分析具有宽度约束的边坡稳定性时过于保守。此外, 地震力同时还影响着三维效应对边坡稳定性的响应。



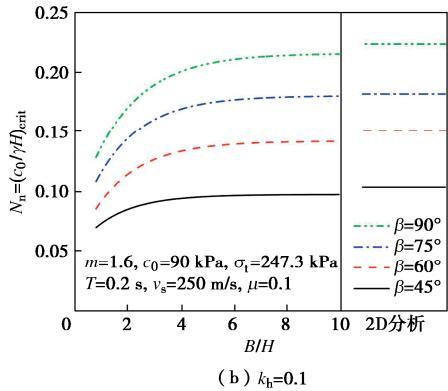


图 10 几何参数对三维边坡稳定性的影响

Fig. 10 Influence of geometric parameters on stability of 3D slope

#### 5.4 拟动力参数的影响

考虑到土体阻尼特性及边坡表面零应力边界条件,本文采用了修正拟动力法对地震加速度进行表征。研究了剪切波速 $v_s$ 、地震周期 $T$ 以及土体阻尼比 $\mu$ 对边坡稳定性的影响,如图 11 所示。

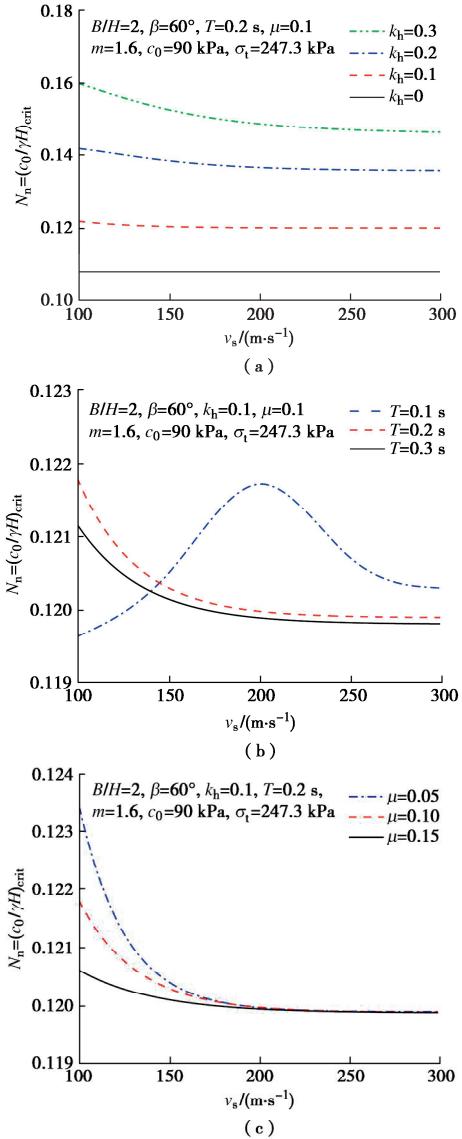


图 11 拟动力参数对三维边坡稳定性的影响  
Fig. 11 Influence of pseudo-dynamic parameters on stability of three-dimensional slope

从图 11 (a) 中可以看出, 静力条件下 ( $k_h = 0$ ) 剪切波速对边坡稳定数没有影响, 式 (17) 中也可以看到这一点。在地震作用下, 边坡稳定数随着剪切波速的增大呈非线性减小的趋势。水平地震系数越高, 边坡稳定性越低。如图 11(b) 所示, 在地震周期  $T = 0.2$  和  $T = 0.3$ , 随着剪切波速的增大, 边坡稳定数是先降低而后逐渐趋于稳定。然而, 地震周期  $T = 0.1$  则表现出完全不同的变化, 当剪切波速  $v_s < 200$  m/s, 边坡稳定数增加, 剪切波速超过 200 m/s 后, 边坡稳定逐渐降低。可见, 地震周期对边坡稳定性具有显著的影响, 不容忽视。图 11 (c) 给出了不同土体阻尼比对边坡稳定性的影响, 不难看出随着阻尼比的增大, 边坡稳定数逐渐降低, 也就是说边坡稳定性提高。当剪切波速  $v_s < 200$  m/s 时, 土体阻尼比对边坡稳定性具有显著的影响, 随着剪切波速不断增大, 土体阻尼比的影响可以忽略不计。

以往的拟动力法通过定义一个恒定的放大因子来反映地震波所引起的地表震动放大效应, 但是这与实际情况并不相符, 且很难合理解释图 11 中的非线性非单调趋势。而修正后的拟动力法通过引入土体阻尼比, 揭示了当地震频率接近土体固有频率时的放大效应, 即共振效应。为了便于解释上述现象, Kramer<sup>[30]</sup>介绍了岩土材料位于刚性地层中受地震波作用的固有频率:

$$\frac{Hf_{n+1}}{v_s} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (41)$$

由于地震波在实际传播过程中通常表现出低频特征, 当地震波在刚性地层中传播时, 波速会变快, 使得  $H/Tv_s$  的值降低, 从而导致共振现象发生。图 12 给出了坡顶表面与坡底水平加速度幅值之比。结果表明: 当地震波的频率接近固有频率时, 加速度幅值将会迅速放大, 将此特征点称为共振点。此外, 阻尼比的降低对共振点附近的加速度幅值有显著影响, 在远离共振点时逐渐减弱, 可见共振效应对地震加速度的变化具有显著影响。不难理解, 图 11 (a) ~ (c) 中的  $T = 0.2$  s,  $v_s = 100$  m/s 和图 11 (b) 中的  $T = 0.1$  s,  $v_s = 200$  m/s 均为共振点, 剪切波速频率等于土体的固有频率, 说明地震加速度被放大了。

#### 5.5 强度包络线与边坡破坏面应力分布

为了能够直观地解释土强度非线性的边坡稳定性, P-L 强度准则可以以破裂角 $\delta$ 为参数的形式表示, 如图 3 所示。通过优化确定的变量利用式 (6), (7) 计算得到作用在边坡破坏面上的应力分量值。图 13 给出了  $\beta = 45^\circ$  和  $\beta = 90^\circ$  两种边坡的 P-L 强度包络线计算应力分布图以及边坡破坏面上的应力分布, 其中实线(蓝色)和虚线(红色)交替表示不同的破坏

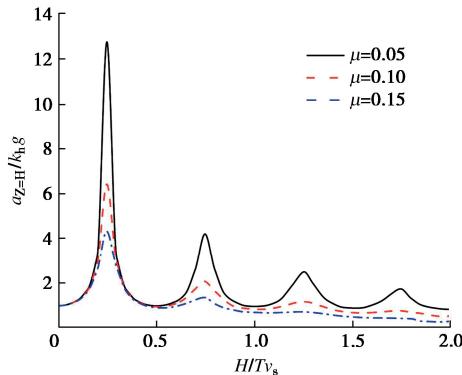


图 12 坡顶与坡底水平加速度幅值之比

Fig. 12 Ratio of horizontal acceleration amplitudes at top and bottom of slope

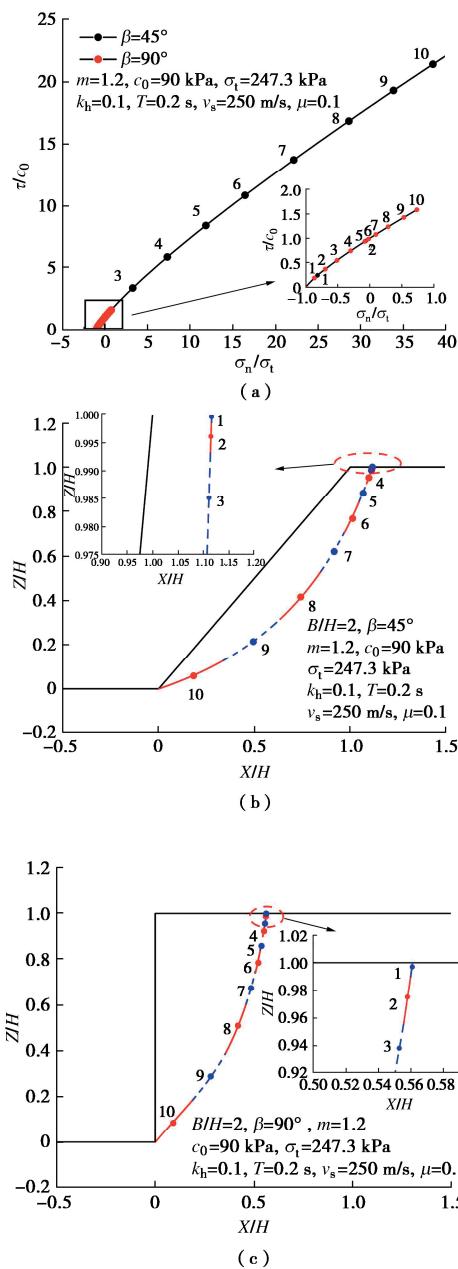


图 13 边坡滑动面与幂律准则包络线应力分布

Fig. 13 Slope sliding surface and stress distribution of power-law criterion envelope

面, 每个边坡的所有分段由 1 到 10 编号。从图 13 中可以发现, 90° 陡坡的应力状态在坡顶处保持较低的应力水平, 跨越了较小压应力区范围, 甚至出现在拉应力区; 45° 缓坡的应力状态跨越了较大压应力区范围, 保持着较高的压缩水平。岩土材料的抗剪强度是存在压力依赖性的, 在承受拉应力时边坡更容易发生失稳, 这是缓坡通常比陡坡更稳定的有力证明。

### 5.6 非线性系数和水平地震作用最危险滑裂面的影响

为了更好地了解非线性系数 ( $m=1.2, 1.6, 2.0$ ) 对最危险滑裂面的影响及破坏机制几何特征, 图 14 给出了不同非线性系数下边坡的临界破坏面。从图 14 中可以观察到, 随着非线性系数的增大, 边坡破坏体体积变大, 最危险滑动面的位置变深, 中间插入块的宽度减小, 边坡稳定系数降低, 说明强度非线性对边坡三维效应的影响同样值得关注。

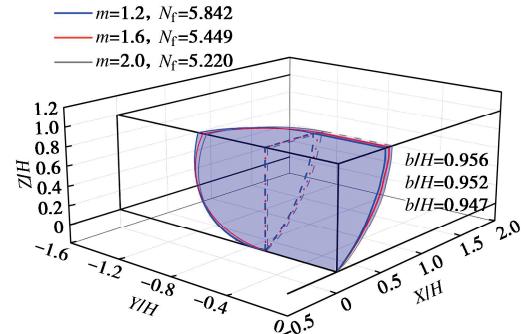
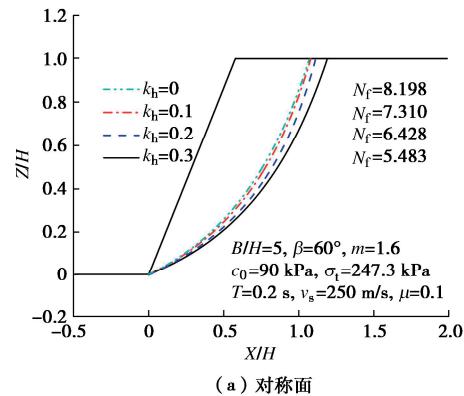


图 14 不同非线性参数三维破坏机制几何特征

Fig. 14 Geometric characteristics of 3D failure mechanism for different nonlinear parameters

图 15 给出了水平地震作用对边坡最危险滑面的影响, 图 15 (a) 为三维边坡对称面处最危险滑面, 图 15 (b) 为三维边坡俯视角度最危险滑面。

由此可观察到, 三维边坡滑裂面随着水平地震系数的增加而逐渐加深, 坡顶上的滑裂面逐渐远离坡肩, 相应边坡破坏体体积加大, 边坡稳定系数降低。说明地震作用对边坡最危险滑面影响显著。



(a) 对称面

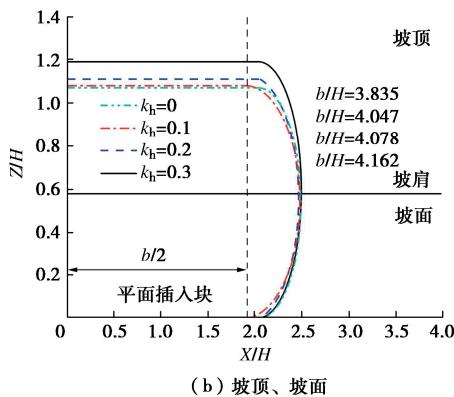


图 15 不同地震强度下三维边坡最危险滑裂面

Fig. 15 Critical surface of 3D slope under different failure sliding seismic intensities

## 6 结 论

本文基于极限分析上限法和修正拟动力法研究了强度非线性土坡的抗震稳定性。采用多切线法将幂律强度准则以参数形式引入到新的三维多锥破坏机制, 推导了评价边坡稳定性的指标。通过参数研究进一步揭示了强度非线性、地震作用和三维效应对边坡稳定性的影响规律, 主要得到以下 3 点结论。

(1) 土体强度非线性对边坡稳定性有显著影响。边坡稳定性随初始黏聚力的降低和单轴抗拉强度的增加而降低, 随着非线性系数的增加这种趋势会减弱。边坡稳定性随着水平地震作用的增大而减小, 对于三维效应明显的边坡, 地震作用对边坡稳定性的影响更为显著。

(2) 地震周期和剪切速度对边坡稳定数的影响具有非线性非单调的趋势。随着土体阻尼比的增大, 边坡稳定性提高, 地震加速度在共振效应下被迅速放大, 是导致边坡失稳的不利因素。在共振点附近, 随着土体阻尼比的增大导致地震加速度幅值明显减小。

(3) 陡坡的应力状态在坡顶处保持较低的应力水平, 甚至出现了张拉状态, 破坏机制上的分段数相对密集; 缓坡的应力状态跨越了较大范围压应力区, 在高应力区非线性特性不明显, 破坏机制分段数相对较少。

**利益冲突声明/Conflict of Interests:** 所有作者声明不存在利益冲突。All authors disclose no relevant conflict of interest.

**作者贡献/Authors' Contributions:** 朱学亮、邵帅、邵生俊提出了理论研究框架及内容, 邵帅和邵生俊提供理论指导, 朱学亮完成了理论推导和结果分析, 朱学亮、姬羽菲、禹志平参与论文的写作和修改。所有作者均阅读并同意最终稿件的提交。The theoretical research framework and content were proposed by ZHU Xueliang, SHAO Shuai and SHAO Shengjun. The theoretical guidance was provided by SHAO Shuai and SHAO Shengjun. The theoretical derivation and result analysis were completed by ZHU Xueliang. The manuscript was drafted and revised by ZHU Xueliang.

JI Yufei and YU Zhiping. All the authors have read the last version of manuscript and consented for submission.

## 参 考 文 献:

- [1] 吴迪, 王钰轲, 陈欣. 考虑地震作用和非线性强度的三维土坡极限分析[J]. 力学学报, 2024, **56**(5): 1426-1438. (WU Di, WANG Yuke, CHEN Xin. Limit analysis of 3d soil slopes considering the earthquake and nonlinear strength[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2024, **56**(5): 1426-1438. (in Chinese))
- [2] MICHALOWSKI R L, PARK D. Stability assessment of slopes in rock governed by the Hoek-Brown strength criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2020, **127**: 104217.
- [3] XU J S, YANG X L. Seismic stability of 3D soil slope reinforced by geosynthetic with nonlinear failure criterion[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2019, **118**: 86-97.
- [4] BAKER R. Nonlinear Mohr envelopes based on triaxial data[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, **130**(5): 498-506.
- [5] LI Y X, YANG Z H, ZHONG J H, et al. Revisiting the face stability of circular tunnels driven in strength nonlinearity soils[J]. Computers and Geotechnics, 2024, **165**: 105856.
- [6] XU J S, DU X L, YANG X L. Stability analysis of 3D geosynthetic-reinforced earth structures composed of nonhomogeneous cohesive backfills[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2019, **126**: 105768.
- [7] XU J S, WANG X R, DU X L. Seismic active earth pressure for 3D earth retaining structure following a nonlinear failure criterion[J]. Computers and Geotechnics, 2024, **165**: 105902.
- [8] ZHONG J H, YANG X L. Seismic stability of three-dimensional slopes considering the nonlinearity of soils[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2021, **140**: 106334.
- [9] 王龙, 陈国兴, 胡伟, 等. 三维非饱和土边坡拟动力稳定性分析初探[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(9): 1859-1867. (WANG Long, CHEN Guoxing, HU Wei, et al. Three-dimensional seismic stability of unsaturated soil slopes using pseudo-dynamic approach[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(9): 1859-1867. (in Chinese))
- [10] 张飞, 林立曜, 舒爽, 等. 转弯凸型边坡静动力稳定性分析及空间效应研究[J]. 岩土工程学报, 2022, **44**(8): 1558-1566. (ZHANG Fei, LIN Liyao, SHU Shuang, et al. 3D effects on static and dynamic stability of convex curved slopes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, **44**(8): 1558-1566. (in Chinese))
- [11] KHORSANDIARDEBILI N, GHAZAVI M. Internal stability

- analysis of geocell-reinforced slopes subjected to seismic loading based on pseudo-static approach[J]. *Geotextiles and Geomembranes*, 2022, **50**(3): 393-407.
- [12] HOU C T, ZHAO S H, ZHONG J H, et al. Seismic stability analysis of 3D tunnel faces in unsaturated soils[J]. *Computers and Geotechnics*, 2023, **161**: 105536.
- [13] ZHANG Z L, YANG X L. Pseudodynamic analysis of three-dimensional fissured slopes reinforced with piles[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2023, **23**(3): 04022315.
- [14] 李雨浓, 刘 畅, 王立伟. 地震效应下三维非均质土坡稳定性极限分析[J]. 岩土力学, 2022, **43**(6): 1493-1502. (LI Yunong, LIU Chang, WANG Liwei. Three-dimensional seismic stability of inhomogeneous soil slopes using limit analysis method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2022, **43**(6): 1493-1502. (in Chinese))
- [15] 李雨浓, 赵 巍, 刘 畅, 等. 基于修正拟动力法的抗滑桩加固边坡三维地震稳定性分析[J]. 中国公路学报, 2024, **37**(1): 44-54. (LI Yunong, ZHAO Wei, LIU Chang, et al. 3D seismic stability analysis of slopes reinforced with stabilizing piles based on a modified pseudo-dynamic method[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2024, **37**(1): 44-54. (in Chinese))
- [16] ZHANG Z L, WU Y M. A general kinematic approach to the seismic stability assessment of slopes[J]. *Computers and Geotechnics*, 2023, **160**: 105519.
- [17] BELLEZZA I. A new pseudo-dynamic approach for seismic active soil thrust[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2014, **32**(2): 561-576.
- [18] QIN C B, CHIAN S C. Kinematic analysis of seismic slope stability with a discretisation technique and pseudo-dynamic approach: a new perspective[J]. *Géotechnique*, 2018, **68**(6): 492-503.
- [19] 卢坤林. 基于极限平衡理论的土质边坡空间效应研究及应用[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2013. (LU Kunlin. Research on the 3D Effect of Homogeneous Slope Stability Analysis Based on the Limit Equilibrium Method and Its Application to Engineering[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2013. (in Chinese))
- [20] 汪小刚, 林兴超. 基于刚性块体离散的边坡稳定极限分析法[J]. 岩土工程学报, 2022, **44**(9): 1587-1597. (WANG Xiaogang, LIN Xingchao. Limit analysis method for slope stability based on discretization of rigid blocks[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2022, **44**(9): 1587-1597. (in Chinese))
- [21] MICHALOWSKI R L, DRESCHER A. Three-dimensional stability of slopes and excavations[J]. *Géotechnique*, 2009, **59**(10): 839-850.
- [22] MICHALOWSKI R L, PARK D. Three-dimensional ridge collapse mechanism for narrow soil slopes[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2021, **45**(13): 1972-1987.
- [23] GAO Y F, ZHANG F, LEI G H, et al. An extended limit analysis of three-dimensional slope stability[J]. *Géotechnique*, 2013, **63**(6): 518-524.
- [24] 郑 宏. 严格三维极限平衡法[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(8): 1529-1537. (ZHENG Hong. A rigorous three-dimensional limit equilibrium method[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, **26**(8): 1529-1537. (in Chinese))
- [25] 郑 宏, 周创兵. 三维边坡稳定性的整体分析法及其工程应用[J]. 中国科学(E辑: 技术科学), 2009, **39**(1): 23-28. (ZHENG Hong, ZHOU Chuangbing. Integral analysis method of three-dimensional slope stability and its engineering application[J]. *Science in China (Series E (Technological Sciences))*, 2009, **39**(1): 23-28. (in Chinese))
- [26] LI Y X, YANG X L. Stability analysis of crack slope considering nonlinearity and water pressure[J]. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 2016, **20**(6): 2289-2296.
- [27] ZHAO L H, YANG F, ZHANG Y B, et al. Effects of shear strength reduction strategies on safety factor of homogeneous slope based on a general nonlinear failure criterion[J]. *Computers and Geotechnics*, 2015, **63**: 215-228.
- [28] 侯超群, 邓 欣, 孙志彬, 等. 非线性准则下三维加筋边坡稳定性的上限分析[J]. 中国公路学报, 2018, **31**(2): 124-132. (HOU Chaoqun, DENG Xin, SUN Zhibin, et al. Upper bound analysis of stability of three-dimensional reinforced slopes based on nonlinear failure criterion[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2018, **31**(2): 124-132. (in Chinese))
- [29] 李得建, 赵炼恒, 李 亮, 等. 地震效应下非线性抗剪强度参数对裂缝边坡稳定性影响的上限解析[J]. 岩土力学, 2015, **36**(5): 1313-1321, 1327. (LI Dejian, ZHAO Lianheng, LI Liang, et al. Influence of nonlinear shear strength parameters on stability of slopes with cracks subjected to seismic effects based on upper bound limit analysis[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, **36**(5): 1313-1321, 1327. (in Chinese))
- [30] KRAMER S L. *Geotechnical Earthquake Engineering*[M]. India: Pearson Education, 1996.
- [31] YANG X L, YIN J H. Slope stability analysis with nonlinear failure criterion[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2004, **130**(3): 267-273.