

DOI: 10.11779/CJGE20240387

# 非线性弹性岩石割线模量与最大最小主应力关系模型

高 祥<sup>1, 2</sup>, 张庆贺<sup>\*2, 3</sup>, 殷志强<sup>1</sup>, 李井国<sup>4</sup>

(1. 安徽理工大学矿业工程学院, 安徽 淮南 232000; 2. 安徽理工大学安徽省煤炭安全精准开采工程实验室, 安徽 淮南 232000;  
3. 安徽理工大学土木建筑学院, 安徽 淮南 232000; 4. 中铁四局集团有限公司, 安徽 合肥 230031)

**摘 要:** 假设岩石为各向同性的非线性弹性体, 通过将岩石应变分解为线性的弹性应变和非线性的孔隙应变, 建立和验证单轴压缩下岩石压密-线弹性阶段应力  $\sigma$ -应变  $\varepsilon$  关系的双曲线和负指数模型, 推导岩石割线模量  $E_g$  与  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  关系模型, 以计算深埋直墙拱形隧洞围岩应力。结果表明: ①岩石  $\sigma$ - $\varepsilon$  双曲线、负指数模型计算与实测数据的相关系数均在 0.999 以上, 相关性较高; ② $E_g$  与  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  关系的模型参数, 包括初始模量、极限模量和极限孔隙应变, 可由单轴试验确定; ③隧洞围岩拉应力集中条带的形状和位置与试验中板裂裂纹的基本一致, 结果对认识深部围岩板裂机理具有一定启示。

**关键词:** 板裂; 岩石弹性模量应力相关性; 深部岩石力学; 岩爆

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2025)11-2325-09

**作者简介:** 高 祥(1990—), 男, 博士, 讲师, 主要从事深部岩石力学及板裂防控方面的研究工作。E-mail: gaoxiang1606@163.com。

## Relationship models between secant modulus and maximum and minimum principal stresses of nonlinear elastic rocks

GAO Xiang<sup>1, 2</sup>, ZHANG Qinghe<sup>\*2, 3</sup>, YIN Zhiqiang<sup>1</sup>, LI Jingguo<sup>4</sup>

(1. School of Mining Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232000, China; 2. Engineering Laboratory for Safe and Precise Coal Mining of Anhui Province, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232000, China; 3. College of Civil Architecture, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232000, China; 4. China Railway No. 4 Engineering Group Co., Ltd., Hefei 230031, China)

**Abstract:** Stress-dependent elastic modulus (SDEM) of rocks is an important factor affecting the stress distribution of deep surrounding rocks. To quantitatively describe the rock SDEM, assuming rock as an isotropic nonlinear elastic body, its strain is decomposed into linear elastic strain and nonlinear pore strain. A hyperbolic model and a negative exponential model of the stress( $\sigma$ )-strain( $\varepsilon$ ) relationship during the compaction-elastic stage under uniaxial compression are established and verified. The model of the rock secant modulus ( $E_g$ ) and  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  is derived and used to calculate the stress of the surrounding rock of deeply buried straight wall arch tunnel. The results show that the correlation coefficients between the calculated values of the hyperbolic and negative exponential models and the measured data are all above 0.999, indicating a level of high correlation. The parameters of the models, including initial modulus, limiting modulus, and limiting pore strain, can be determined by uniaxial tests. And the shapes and positions of the tensile stress concentration bands in the surrounding rock of the tunnel are basically consistent with those of the slabbing observed in the tests, which is enlightening for understanding the mechanism of slabbing in deep surrounding rock.

**Key words:** slabbing; stress-dependent elastic moduli of rocks; deep rock mechanics; rock burst

## 0 引 言

岩石弹性模量应力相关性(stress-dependent elastic

**基金项目:** 安徽省高等学校科学研究项目(2022AH050824); 安徽省煤炭安全精准开采工程实验室开放项目(ESCMP202303); 安徽省高校协同创新项目(GXXT-2022-020); 安徽理工大学引进人才基金项目(13210153) This work was supported by Natural Science Research Project of Anhui Educational Committee (Grant No. 2022AH050824), Anhui Province Coal Safety and Precision Mining Engineering Laboratory Open Project (Grant No. ESCMP202303), Anhui Province University Collaborative Innovation Program(Grant No. GXXT-2022-020), and the Scientific Research Fund for the Introduction of Talents of Anhui University of Science and Technology (Grant No. 13210153).

收稿日期(Received): 2024-04-21 修回日期(Revised): 2025-02-03 接受日期(Accepted): 2025-02-11 网络出版日期(Online): 2025-02-12

\*通信作者(E-mail: zhangqhsdu@163.com)

moduli, SDEM) 是岩石弹性模量 (简称弹模) 随应力变化的性质<sup>[1-4]</sup>。Kulhawy<sup>[5]</sup>对岩石弹模与围压的关系开展研究, 提出了幂函数模型, 即  $E = E_0 \sigma_3^m$ ,  $E_0$  为单轴条件下岩石线弹性阶段的切线模量,  $m$  介于 0~1。Brown 等<sup>[1]</sup>通过砂岩三轴压缩试验测得 0~80 MPa 内不同围压下试件的应力-应变曲线, 以峰值强度 50% 处的切线模量  $E_{50}$  为岩石弹模  $E$ , 建立了  $E$  与  $\sigma_3$  修正的幂函数关系模型, 即  $E = E_1(1+B\sigma_3^C)$ , 其中,  $E_1$  为  $\sigma_3 = 0$  时的岩石  $E_{50}$ ,  $C$  介于 0~1。在模型中,  $E$  随  $\sigma_3$  无限增加的特征与实际不符。随后, Santarelli 等<sup>[6]</sup>提出了一种  $E$  与  $\sigma_3$  的负指数模型, 即  $E = E_\infty - (E_\infty - E_1)e^{-A\sigma_3}$ , 式中,  $E_\infty$  为当  $\sigma_3 \rightarrow \infty$  时的  $E_{50}$ , 解决了在  $\sigma_3 \rightarrow \infty$  过程中,  $E$  随  $\sigma_3$  无限增加问题, 模型较为合理。

SDEM 是深部围岩应力分布的重要影响因素<sup>[7-8]</sup>。受 SDEM 影响, 围岩应力空间递变性必然引起围岩弹模的空间递变<sup>[9]</sup>, 进而影响应力分布<sup>[10]</sup>。岩石弹模与主应力的关系模型是对岩石 SDEM 的量化描述, 也是开展考虑 SDEM 的深部围岩应力理论计算与数值模拟分析的关键基础。岩石有切线模量  $E_t$ 、割线模量  $E_g$ 、初始模量  $E_s$ , 选定弹模是建立弹模与主应力模型的必要前提。过去峰值强度 50% 处的切线模量多被选用<sup>[1, 11]</sup>。由于压密阶段的存在, 在相同应变下, 利用  $E_t$  计算出的应力往往比实际偏大, 而  $E_g$  则不同, 它可将不同应力下的岩石等效为一系列满足实际应力-应变关系的线弹性体, 使应力计算结果更加准确。如果选择  $E_t$ ,  $E_t$  与  $\sigma_3$  相关, 几乎不受  $\sigma_1$  的影响, 建立它与  $\sigma_3$  的量化关系是可行的; 而  $E_g$  同时受  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  影响, 建立它们之间关系十分必要。

因此, 本文尝试建立一种岩石  $E_g$  与  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  的关系模型, 结果对开展考虑 SDEM 的深部围岩应力理论计算与数值模拟分析具有理论意义。

# 1 岩石单轴压缩非线性弹性应力-应变模型

## 1.1 模型假设

岩石普遍具有孔隙性, 受压后孔隙被压缩, 压力越大, 孔隙被压密程度越高<sup>[12]</sup>。为了便于建模, 进行以下 5 点假设。

### (1) 非线性弹性体假设

假设岩石可被视为非线性弹性体。它的变形只包含压密和线弹性阶段, 且可完全恢复, 属于弹性变形。它的强度无限大, 当应力无限大时, 不会产生新的裂隙。

### (2) 渐变过程假设

岩石受压后, 随着应力增加, 孔隙逐渐被压缩, 孔隙率的减小是一个渐变过程, 仅当应力无穷大时, 孔隙被完全压密, 孔隙率为 0。

### (3) 线性关系假设

岩石的应变  $\varepsilon$  来源于两部分, 即由弹性介质变形所产生的线性弹性应变  $\varepsilon_e$  (称为弹性体应变) 和孔隙变形产生的非线性应变  $\varepsilon_p$  (称为孔隙应变)。其中,  $\varepsilon_e$  服从胡克定律<sup>[13]</sup>。三者近似服从线性关系, 可表示为<sup>[14]</sup>

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (1)$$

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0} \quad (2)$$

### (4) 物理指标假设

当  $\sigma = 0$  时, 弹模为初始模量  $E_s$ ; 当  $\sigma \rightarrow \infty$  时, 岩石的孔隙应变为  $\varepsilon_0$  (不妨称为极限孔隙应变) 岩石中弹性介质的弹模为  $E_0$  (极限弹模)。岩石  $E_0$  普遍大于其切线模量  $E_t$ 。为便于理解, 对指标图示说明, 见图 1。

### (5) 函数关系假设

式 (1) 中  $\varepsilon_p$  未知, 但有以下特征:  $\sigma = 0$  时,  $\varepsilon_p = 0$ ; 当  $\sigma \rightarrow \infty$  时,  $\varepsilon_p = \varepsilon_0$ ; 在  $0 \sim \infty$  内,  $\varepsilon_p$  随  $\sigma$  的增加而增加, 并不断趋近于  $\varepsilon_0$ , 即  $\varepsilon_p$  与  $\sigma$  的函数曲线存在水平渐近线。在常见的函数中, 双曲线和负指数函数满足此特征<sup>[1, 15]</sup>。不妨假设  $\varepsilon_p$  与  $\sigma$  服从双曲线或负指数函数。

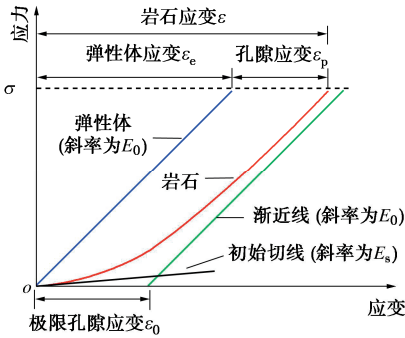


图 1 岩石物理指标图

Fig. 1 Illustration of petrophysical indicators

## 1.2 模型建立

设  $\varepsilon_p$  与  $\sigma$  服从双曲线函数, 建立应力-应变双曲线模型为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + a_1 \left( 1 - \frac{1}{b_1 \sigma + 1} \right) \quad (3)$$

式中:  $a_1$ ,  $b_1$  为待定系数, 其对应的渐进线为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + a_1 \quad (4)$$

根据物理指标假设, 求解出待定系数得:

$$a_1 = \varepsilon_0 \quad (5)$$

表 1 试件应力-应变模型与试验数据对比表  
Table 1 Comparison table between the stress-strain models and the test data of the specimens

试件编号	双曲线模型					负指数模型				
	$E_t/\text{MPa}$	$E_0/\text{MPa}$	$\varepsilon_0$	$E_s/\text{MPa}$	$R$	$E_t/\text{MPa}$	$E_0/\text{MPa}$	$\varepsilon_0$	$E_s/\text{MPa}$	$R$
H-1	26622	27750	0.0042	2778	0.9999	27069	24946	0.0032	3634	0.9994
H-2	30417	32775	0.0035	3159	1.0000	30743	29338	0.0027	4126	0.9997
D-1	31483	35170	0.0019	3679	0.9999	31251	30204	0.0014	4565	0.9997
D-2	30451	35491	0.0022	3687	0.9999	30006	29175	0.0015	4427	0.9998
QS-1	8829	12236	0.0084	941	1.0000	9008	8570	0.0055	1088	0.9998
QS-2	5880	7687	0.0086	581	0.9999	6015	5633	0.0058	681	0.9997

注:  $E_t$  为线弹性阶段的切线模量;  $E_0$  为岩石极限模量;  $R$  为模型计算出的应变与实测应变的相关系数。

$$b_1 = \frac{E_0 - E_s}{E_0 E_s \varepsilon_0} \quad (6)$$

将式 (5), (6) 代入式 (3) 得应力-应变双曲线模型:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{1}{K\sigma + 1} \right) \quad (7)$$

式中:  $K = \frac{E_0 - E_s}{E_0 E_s \varepsilon_0}$ 。

同样地, 设  $\varepsilon_p$  与  $\sigma$  服从负指数函数, 建立应力-应变负指数模型:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \varepsilon_0 (1 - e^{-K\sigma}) \quad (8)$$

式中:  $K = \frac{E_0 - E_s}{E_0 E_s \varepsilon_0}$ 。

双曲线模型 (7) 和负指数模型 (8) 均有  $E_s$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $E_0$  3 个参数, 模型参数物理意义明确。

1.3 试验验证

为验证上述模型并确定其参数, 取花岗岩、大理石、青砂岩加工成直径  $\phi=50\text{ mm}$ , 高  $h=100\text{ mm}$  的标准圆柱形试件, 数量为 6 块, 分别编号为 H-1, H-2, D-1, D-2, QS-1, QS-2。采用 RMT 压力机加载, 速率定为  $1\text{ kN/s}$ , 对各个试件单轴加载至破坏, 获得试件应力-应变曲线。取应力介于  $0\sim 0.8\sigma_c$  ( $\sigma_c$  为试件的单轴抗压强度) 范围内的应力-应变数据点, 用于模型验证。

为便于清楚展示, 以 D-1, H-1 和 QS-1 为例, 绘制试件应力-应变模型计算与试验数据对比如图 2 所示。从图 2 可以看出, 双曲线模型能较好的地拟合试验数据, 二者高度相关。负指数模型亦是如此。试件 D-2, H-2 和 QS-2 的模型计算与实测数据对比结果也是类似的, 这里不再赘述。

模型评价的重要指标是相关系数  $R$ , 即模型计算出的应变与相同应力下实测应变数据的相关系数。另外一个重要标准是线弹性阶段的切线模量要小于极限

模量  $E_0$ 。理由见前文物理指标假设。表 1 为试件应力-应变模型与试验数据对比表。由表 1 可以看出, 双曲线模型的相关系数普遍在 0.9999 以上, 相对较高; 极限模量普遍大于切线模量, 较为理想。而负指数模型的双曲线模型的相关系数小于 0.9998, 相对低些, 而且极限模量普遍小于切线模量, 这与物理指标假设不相符。试验验证结果表明, 应力-应变双曲线模型与实测数据的相关系数较高, 满足切线模量小于极限模量  $E_0$  的要求, 更为合理。但负指数模型求导和积分运算方便, 在理论分析时应用或可简化计算。

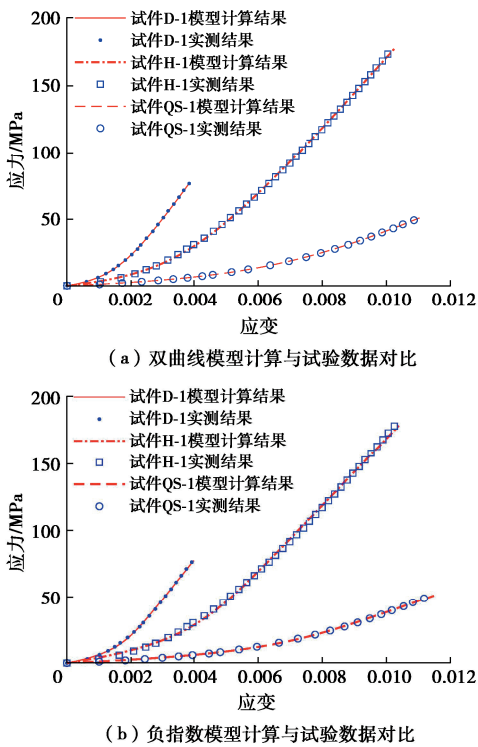


图 2 试件应力-应变模型与试验数据对比

Fig. 2 Comparison of stress-strain models with test data

2 弹模与最大和最小主应力关系模型

2.1 岩石割线模量

经典岩石力学, 以弹性力学为基础, 通常将岩石简化为理想弹性体, 取线弹性变形阶段的切线模量  $E_t$

为岩石弹模。而实际上,岩石并非理想弹性体,是一种天然的含孔隙材料。利用 $E_t$ 代表岩石的弹模可简化计算,但也有不合理之处,表现在以 $E_t$ 为弹模,计算出的应力要比实际的偏大。图3是 $E_g$ 与 $E_t$ 对比示意图。在图3中 $O-C$ 代表岩石应力-应变曲线上的4个点。从图3可以看出,对于 $C$ 点,在相同应变条件下,利用胡克定律,计算出的弹性体(弹模与 $E_t$ 相同)应力大于实际应力;而计算出的弹性体(弹模与 $OC$ 的斜率 $E_g$ 相同)应力等于岩石实际应力,其它点亦是如此。另外, $E_g$ 随应力增加而增加,而非单一常数。由此可知, $E_g$ 可将非线性弹性类岩石等效为一系列的线弹性体(每个应力对应一个线弹性体),在相同应变条件下,使岩石应力与等效弹性体所产生的应力保持相同,能更准确地反映岩石的应力应变关系。因此,选择割线模量作为岩石弹模。

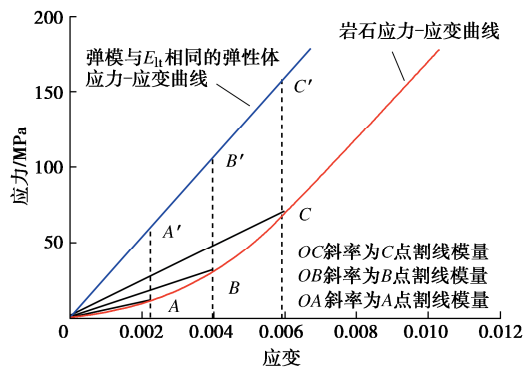


图3 割线模量与线弹性阶段切线模量对比示意图

Fig. 3 Schematic diagram of comparison between secant modulus and tangent modulus in linear elastic stage

## 2.2 弹模-最大主应力关系模型

由式(7)计算出一维压应力下岩石割线模量 $E_g$ - $\sigma$ 双曲线模型:

$$E_g = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{E_0(K\sigma + 1)}{(K\sigma + 1) + \varepsilon_0 E_0 K} \quad (9)$$

为了更清楚地反映 $E_g$ 与 $\sigma$ 的双曲线关系,对式(9)变形得到:

$$E_g(\sigma) = E_0 \left( 1 - \frac{1}{a\sigma + b} \right) \quad (10)$$

式中:  $a = \frac{1}{E_0 \varepsilon_0}$ ;  $b = \frac{E_0}{E_0 - E_s}$ 。

另外,下文会用到 $E_t$ - $\sigma$ 关系式,由式(7)推导结果为

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E_0(K\sigma + 1)^2}{(K\sigma + 1)^2 + \varepsilon_0 E_0 K} \quad (11)$$

图4为割线模量模型计算与试验结果对比图。由图4可以看出, $E_g$ - $\sigma$ 双曲线模型计算与试验数据点高

度相关,相关系数可达0.9963以上。

## 2.3 弹模-最大、最小主应力关系模型

式(10)是一维应力条件下岩石 $E_g$ - $\sigma$ 的关系模型,下文将以此为基础,推导出二维的关系模型。

问题描述:在隧洞开挖后,径向卸荷围岩 $\sigma_3$ 减小,导致切向应力增加, $\sigma_1$ 增加。当径向应力完成调整,保持稳定后,切向应力才能保持稳定,围岩才能进入静力平衡状态。静力平衡状态下,考虑SDEM,不考虑 $\sigma_2$ 的影响,推导 $E_g$ 与 $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ 的关系式。

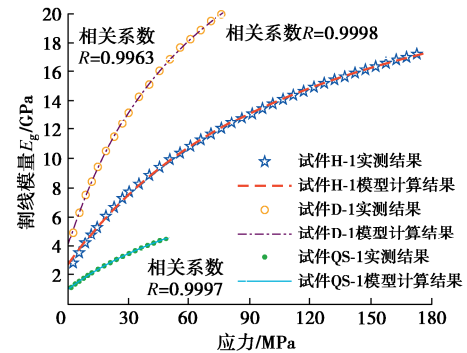


图4 割线模量计算与试验结果对比图

Fig. 4 Comparison of secant modulus calculation and test results

模型假设:①应力路径假设。由问题描述可知,径向应力和 $\sigma_3$ 的变化是导致应力调整的主导因素。不妨忽略围岩应力调整过程细节,假设应力调整过程可简化为“ $\sigma_3$ 调整— $\sigma_3$ 保持— $\sigma_1$ 调整”的应力路径。在试验中,该路径即为先加 $\sigma_3$ 并保持,然后再加 $\sigma_1$ 。在该应力路径下, $\sigma_3$ 增加,将引起岩石的极限孔隙应变 $\varepsilon_0$ 减小,初始模量 $E_s$ 增加。当 $\sigma_3$ 稳定后,岩石极限孔隙应变、初始模量分别记作 $\varepsilon'_0$ ,  $E'_s$ 。②各向同性假设。实际上,当围压为 $\sigma_3$ 时,很难准确确定 $\sigma_1$ 方向的岩石初始模量 $E'_s$ 。为了近似得到 $\varepsilon'_0$ ,  $E'_s$ 与 $\sigma_3$ 关系,假设岩石受压前后始终保持各向同性。

模型建立:通过构建 $\varepsilon'_0$ ,  $E'_s$ 与 $\sigma_3$ 的函数关系,改造模型(10),建立 $E$ 与 $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ 的关系模型:

$$E_g(\sigma_1, \sigma_3) = E_0 \left[ 1 - \frac{1}{\frac{1}{E_0 \varepsilon'_0(\sigma_3)} \sigma_1 + \frac{E_0}{E_0 - E'_s(\sigma_3)}} \right] \quad (12)$$

模型参数确定:在各向同性前提下,当 $\sigma_1$ 为0时,岩石 $\sigma_1$ 方向的初始模量 $E'_s$ 等于 $\sigma_3$ 方向的切线模量 $E_t(\sigma_3)$ ,即 $E'_s$ 为一维应力下应力为 $\sigma_3$ 时的切线模量。岩石极限孔隙应变 $\varepsilon'_0$ 即为 $\varepsilon_0$ 减去一维应力下当应力为 $\sigma_3$ 时所产生的孔隙应变 $\varepsilon_p$ ,即

$$E'_s(\sigma_3) = \frac{E_0(K\sigma_3 + 1)^2}{(K\sigma_3 + 1)^2 + KE_0 \varepsilon_0} \quad (13)$$

$$\varepsilon'_0(\sigma_3) = \frac{\varepsilon_0}{K\sigma_3 + 1} \quad (14)$$



式中:  $K = \frac{E_0 - E_s}{E_0 E_s \varepsilon_0}$ 。

将式 (13), (14) 代入式 (12), 即可得到割线模量  $E_g$  与  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  的关系模型。

## 2.4 模型验证

围岩板裂是深部工程岩体典型的破坏形式, 表现为完整脆性岩体被平行的裂隙切割, 形成多层近似平行于开挖面的岩板<sup>[16]</sup>, 严重威胁着深部工程施工安全, 认识深部围岩板裂化机理对保障现场施工安全意义重大<sup>[17]</sup>。围岩应力分布是认识围岩板裂破坏现象的基础。许多学者开展了深埋隧洞围岩板裂的模拟试验<sup>[18-20]</sup>, 以文献[21]中试验所用的红砂岩直墙拱形隧洞为例, 来验证模型 (12), 具体模拟条件:

(1) 几何模型、边界条件与模型物理参数。建立几何模型如图5所示。直墙拱形隧道模型的宽度  $a=40$  mm、墙高  $h_1=25$  mm、总高  $h_2=45$  mm, 拱顶为半径 20 mm 的半圆形。对模型施加垂直应力 40.5 MPa, 侧压系数取为 0.5。位移边界条件: 对模型左侧面、底面分别进行水平和竖直位移约束。模型泊松比  $\mu=0.25$ ; 根据表1 砂岩QS-1试件, 取极限模量  $E_0=9$  GPa, 初始模量  $E_s=1$  GPa、极限孔隙应变  $\varepsilon_0=0.55\%$ 。

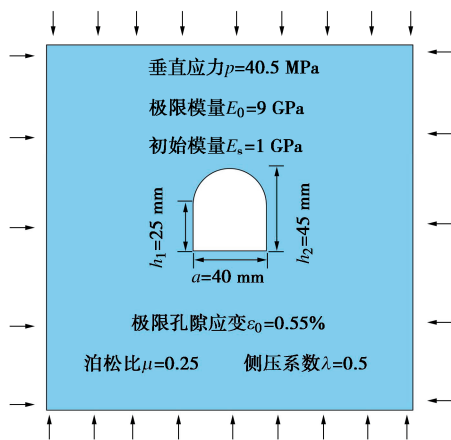


图5 直墙拱形隧道几何模型

Fig. 5 Geometry of straight-walled arched tunnel

(2) 数值模拟方法, 采用基于 MATLAB 平台自主编写的考虑 SDEM 的围岩弹性应力模拟程序。该模拟方法的开发涉及到的关键问题, 是确定围岩不同位置弹模, 即围岩弹模分布。模型 (12) 和迭代法可用于解决这一难题, 具体的方法细节及验证过程已投稿别的论文, 大致思路阐述如下: ① 首先将围岩视为弹性体计算初始围岩应力分布  $\sigma(x, y)$ ; ② 其次将前步所得应力带入模型 (12) 得到围岩弹模分布  $E_T(x, y)$ , 并将其带入应力模拟程序得到围岩应力  $\sigma_T(x, y)$ ; ③ 然后, 将  $\sigma_T(x, y)$  带入模型 (12) 得到围岩弹模分布  $E_{T+1}(x, y)$ , 并将其带入应力模拟程序得到围岩应力

$\sigma_{T+1}(x, y)$ ; ④ 最后, 重复步骤②、③, 如果相邻两次计算的围岩考察点的应力差值小于允许误差  $\delta$ , 则停止迭代, 对应的  $E_{T+1}(x, y)$ ,  $\sigma_{T+1}(x, y)$  即为围岩的弹模和应力分布。

(3) 强度准则采用格里菲强度准则:

$$\sigma_t = \begin{cases} -\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{8(\sigma_1 + \sigma_3)} & (\sigma_1 + 3\sigma_3 \leq 0) \\ \sigma_t = \sigma_3 & (\sigma_1 + 3\sigma_3 > 0) \end{cases} \quad (15)$$

式中:  $\sigma_t$  为岩石的拉应力。符号规定正为拉应力, 负为压应力。板裂如果发生, 其起裂的条件为拉应力大于等于抗拉强度, 即  $\sigma_t \geq \sigma_{ts}$ , 式中,  $\sigma_{ts}$  为岩石的抗拉强度。根据式 (15) 计算围岩拉应力, 拉应力集中区拉裂易于起裂, 可用于预判破坏的位置。

分别基于模型 (12)、常规的切线模量与最小主应力关系模型<sup>[6]</sup>, 绘制考虑 SDEM 的直墙拱形隧洞围岩拉应力云图如图 6 (a), (b) 所示。由图 6 (a) 可知, 围岩拉应力集中区呈条带状分布, 左右对称分布在到侧壁一定距离的围岩内部; 在拱肩、拱脚处拉应力最为集中。据此做出以下预测: 在拱肩、拱脚处拉应力最为集中, 容易先产生裂隙; 拱脚产生裂纹后, 向上扩展, 存在与拱肩贯通的趋势; 贯通后, 容易形成上下薄中间、厚的岩板。图 7 为直墙拱形试件加载过程板裂试验照片。由图 7 可以看出, 试件受压过程中, 先在右侧拱肩和左侧拱脚处先发生了破坏 (图 7 (a)), 对应于拉应力集中区; 随着应力增加, 拱脚产生裂纹, 并向上扩展, 与拱肩贯通, 贯通后裂纹形态呈弧形, 与拉应力集中带的位置和形状较为接近, 所形成岩板呈现为上下薄、中间厚的特征 (图 7 (b)), 与预测结果一致。对比图 6 (b) 与图 7 可知, 基于常规切线模量与最小主应力关系模型所计算的围压拉应力分布图, 难以解释图 7 (a) 中拱肩先发生拉张破坏的特征。

通过对比分析可知: 模型 (12) 可用于考虑 SDEM 的深埋隧洞围岩应力计算, 计算结果比常规的切线模量与最小主应力关系模型的更加合理, 对认识围岩板裂化机理具有启示意义。

## 3 讨 论

### 3.1 模型特点分析

模型 (12) 的优点: ① 自变量是最大、最小主应力; 因变量是割线模量。与以往切线模量与最小主应力关系模型相比, 所选弹模更加合理, 考虑的影响因素较为全面。② 物理参数可根据单轴加载试验确定, 见表 1, 应用更加方便; 而以往模型参数的确定则需要常规三轴试验。

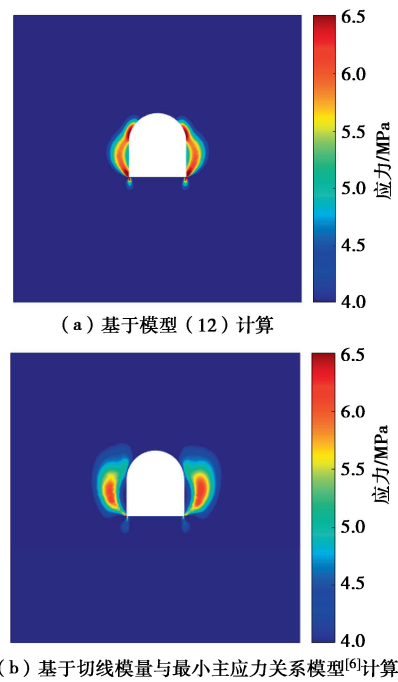


图 6 考虑 SDEM 的直墙拱形隧洞围岩拉应力云图

Fig. 6 Tensile stress contour of surrounding rocks of straight-walled arched tunnel considering SDEM (unit: MPa)

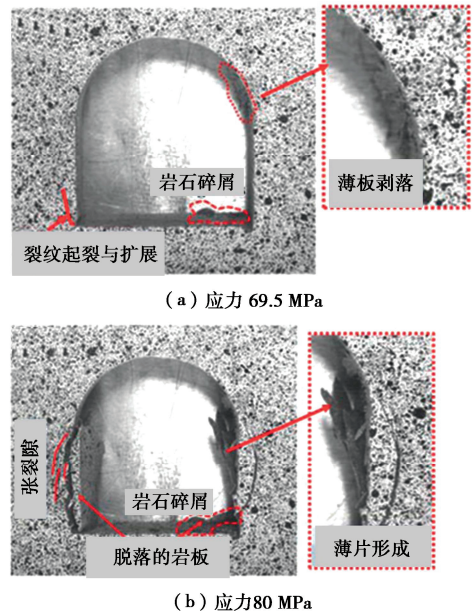


图 7 直墙拱形试件加载过程板裂试验照片<sup>[21]</sup>

Fig. 7 Slabbing test photograph of straight wall arch specimen<sup>[21]</sup>

模型缺点：①以往的  $E = E_{\infty} - (E_{\infty} - E_1) e^{-A\sigma_3}$  模型和本文的模型 (12) 均是在压缩条件下得到的。它们共同的缺点是当  $\sigma_3$  为拉应力时，受限于岩石横向拉张纵向压缩试验的技术瓶颈，目前只能通过压应力模型的外推来计算弹模。在实际地下工程中  $\sigma_1$  常常为压应力，虽然  $\sigma_3$  可能为拉应力或压应力，但是当  $\sigma_3$  为拉应力时，一般小于岩石抗拉强度，岩石抗拉强度较小，

比如某红砂岩的抗拉强度约 4 MPa，相对于约 60 MPa 抗压强度，模型在拉应力小范围的外推，一定程度上是合理的。直墙拱形隧洞模拟与试验结果较为一致，也验证了这一点。②反映的是岩石弹性变形过程割线模量的变化特征。严格意义上仅适用于含孔隙和微裂隙的岩石及无较大贯通节理的岩体或围岩弹性应力的近似计算，预判岩体的起裂<sup>[22]</sup>特征，难以用于计算裂纹扩展、贯通过程的局部应力。

3.2 建模过程问题分析

本文利用弹性力学理论来求解非线性弹性、非均匀的围岩应力问题，对建模过程的相关问题分析如下：

(1) 隧洞开挖卸荷与模型加载的关系

高应力地下工程在开挖前，岩体经过了万年级的压缩，其内部孔隙已最小化了。岩石压缩试验中非线性压密段并不是原位岩体的行为。地下洞室开挖是典型的卸荷过程，本文模型的推导是基于加载过程开展的，存在是否合适的问题。

万年级的压缩过程太过于复杂，很难模拟。不少学者通过含预制孔洞试件的加载试验来模拟板裂，直接把岩体万年级的压缩简化为等速率加载过程。地下洞室开挖是典型的卸荷过程，但卸荷作用的直接后果是围岩应力的重新分布。假设围岩为弹性体，在卸荷围岩达到静力平衡时，圆形巷道围岩应力分布服从吉尔希解，“先挖孔后加载”和“先加载后挖孔”一定程度上是等效的。而且以往试验验证了两种试验方法均能在实验室再现板裂现象。这说明，开挖卸荷可能不是导致板裂的必要条件，板裂可能是开挖后结构性应力调整造成的。所以，从这个角度来讲，“先挖孔后加载”的试验思路是合理的，通过建立加载过程应力-应变函数，计算加载后孔洞周边应力分布，来研究深部围岩板裂机理的思路也具有一定合理性。

(2) 忽略中间主应力  $\sigma_2$  的原因分析

模型 (12) 未考虑中间主应力  $\sigma_2$  的影响。原因是岩体中各个方向的原始裂隙随机分布，但是开挖后，径向卸荷，在洞壁附近围岩中近似平行于开挖界面的孔隙易于张开，其张开程度主要受与它近乎垂直的  $\sigma_3$  大小的影响，其次受  $\sigma_1$  的影响，而开挖前后变化不大的  $\sigma_2$ （洞轴方向）对裂隙张开状态变化的影响较小，故忽略不计。

关于建立弹模与平均主应力以及主应力偏差模型的问题，分析如下：①平均应力为  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  平均值，即  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ ，主应力的偏差为  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 。按照本文的方法，建立  $E$  与  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  的关系模型是困难的，因为  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  对  $E$  的影响机制尚不清楚。②根据各向同性假设，不能以  $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  来代替一维模



型中的 $\sigma_1$ 来建立 $E$ 与 $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ 的关系模型。因为根据前段分析,  $\sigma_2$ 对裂隙张开状态的变化影响较小, 如果用 $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ 来代替一维模型中的 $\sigma_1$ , 就是默认 $\sigma_2$ 对围岩孔隙压密状态的影响与 $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ 相同, 这是矛盾的。③用 $(\sigma_1 + \sigma_3)$ 来代替一维模型中的 $\sigma_1$ 的思路也不行, 因为它反映的是与加载路径无关的。而实际上, 岩石的破坏是受应力路径影响的。④模型(12)不考虑 $\sigma_2$ 的影响并先给定加载路径, 有利于兼顾围岩的各向异性和加载路径相关性, 相对合理。

### (3) 仅考虑压密-弹性阶段建模的原因分析

只考虑压密-弹性阶段是因为岩石的原始孔隙是造成压密阶段产生的原因, 决定了模型参数 $\varepsilon_0$ 和 $E_s$ 的大小。当变形进入塑性阶段, 新产生的裂隙将影响模型参数 $\varepsilon_0$ 和 $E_s$ , 从而使试验确定的模型参数不准确。所以, 只能根据压密-弹性阶段建模。

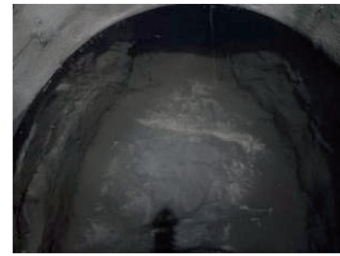
关于结合所建模型如何利用塑性阶段的问题, 分析如下: 经历塑性阶段的岩石试件产生了新的微裂隙, 不妨将其称为“损伤试件”。而在实际工程岩体中, 常常有非贯通节理。利用损伤试件实测出的模型参数 $\varepsilon_0$ 和 $E_s$ 可能更接近实际岩体的。以下试验值得尝试, 主要步骤: ①先将试件放在刚性压力机上加载, 加载到接近峰值应力时卸载, 得到损伤试件; ②对损伤试件重新加载, 获得压密-线弹性阶段的应力-应变曲线, 利用模型算出损伤岩石试件的模型参数。基于这些模型参数的数值计算结果也许会更加准确。

### 3.3 工程案例

中国西南某三心拱铁路隧洞, 围岩为Ⅲ级花岗岩岩体。现场以水平构造应力场为主, 与洞轴近似垂直的水平地应力 55.1 MPa, 竖直地应力为 30 MPa。开挖后拱顶发生板裂, 形成板片状碎屑垂直掉落, 弹射特征不明显, 且不定期掉落能持续数小时, 对在掌子面施工设备和工人安全造成了严重威胁。最后在拱顶形成凹坑(看不到炮痕), 如图 8(a)所示。为抑制拱顶的分层破坏, 现场开展了拱顶围岩两侧超前爆破切缝卸压试验, 采取措施后拱顶破坏照片如图 8(b)所示。对比图 8 可以看出, 在切缝后拱顶围岩破坏更加严重。



(a) 拱顶板裂后形成凹坑

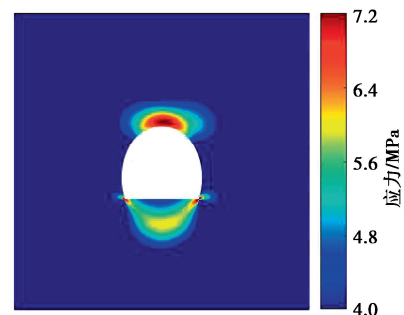


(b) 切缝后拱顶围岩破坏照片

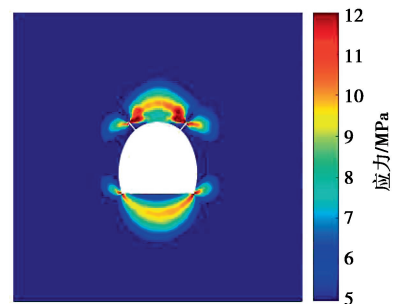
图 8 三心拱隧洞切缝前后拱顶破坏现场照片

Fig. 8 Photos of three-centered arch tunnel before and after cutting joints

为了分析其原因, 根据模型(12)计算三心拱切缝前后围岩拉应力, 结果如图 9 所示。图 9(a)显示, 拱顶轮廓线附近的围岩内部存在拉应力集中条带, 容易发生板裂破坏。图 9(b)显示, 在拱顶两侧切缝后, 缝的根部应力较为集中, 存在贯通的拉应力集中条带, 这预示着在切缝后, 拱顶破坏不仅不会消除, 而且更容易形成更深的凹坑。数值模拟和现场试验结果都表明, 拱顶两侧切缝卸压来防治拱顶板裂的方法不可行。



(a) 无切缝围岩拉应力分布图



(b) 切缝后围岩拉应力分布图

图 9 三心拱隧洞切缝前后拉应力云图

Fig. 9 Tensile stress distributions of three-centered arch tunnel before and after cutting joints

### 3.4 深部围岩板裂影响因素分析

高应力下硬岩板裂原因与其初始地应力方向、岩石脆性特征、开挖爆破损伤都密切相关, 其模量的应力依赖性是否是主控因素的问题分析如下: 随着应力的增加, 围岩注定是要发生破坏的, 主控因素决定了围岩是发生拉张破坏还是剪切破坏。根据文献[10]埋深对考虑 SDEM 的围岩应力理论计算结果可知, 随着

埋深增加, 围岩中最大拉应力增加, 而围岩抗拉强度不变。这说明, 随着埋深增加, 围岩更容易发生拉张破坏。根据莫尔-库仑准则, 抗剪强度是关于围压的函数。随着埋深的增加, 围岩中  $\sigma_1$  增加的同时,  $\sigma_3$  在增加, 岩体抗剪强度也在增加。因此, 未必是埋深越大, 就越容易发生剪切破坏。但是洞壁除外, 因为洞壁上最小主应力为 0, 也是随着埋深增加容易发生剪切破坏的地方。根据图 8 (a), 拉应力集中条带在围岩内部, 如果试验能确定围岩起裂是开始于洞壁, 还是围岩内部, 则可判断板裂在起裂阶段是张性还是剪性。

## 4 结 论

(1) 建立了单轴压缩下岩石压密-线弹性阶段应力-应变关系双曲线和负指数模型。模型计算与实测数据的相关系数均在 0.999 以上, 相关性较高。模型参数包括初始模量、极限模量和极限孔隙应变, 可由单轴试验确定。

(2) 构建了非线性弹性岩石割线模量与最大、最小主应力关系模型, 用它计算的直墙拱形隧洞围岩拉应力集中条带的形状和位置与试验中板裂裂纹的基本一致。结果对认识深部围岩板裂机理具有一定启示。

**利益冲突声明/Conflict of Interests:** 所有作者声明不存在利益冲突。All authors disclose no relevant conflict of interest.

**作者贡献/Authors' Contributions:** 高祥提出研究理念和设计研究, 撰写文章; 张庆贺获取、分析解释室内试验研究数据, 对最终提交版本进行确认; 殷志强对重要文章内容进行关键性修改; 李井国负责完成工程现场试验, 获取试验数据。GAO Xiang conceived the research ideas, designed the study, and drafted the manuscript. ZHANG Qinghe collected, processed, and interpreted the data from laboratory experiments, and reviewed and approved the final submitted version. YIN Zhiqiang contributed critical revisions to key sections of the article. LI Jingguo performed the field experiments at the engineering site and acquired the corresponding experimental data.

## 参考文献:

- [1] BROWN E T, BRAY J W, SANTARELLI F J. Influence of stress-dependent elastic moduli on stresses and strains around axisymmetric boreholes[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 1989, **22**(3): 189-203.
- [2] CHEN D H, CHEN H E, ZHANG W, et al. An analytical solution of equivalent elastic modulus considering confining stress and its variables sensitivity analysis for fractured rock masses[J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical*

*Engineering*, 2022, **14**(3): 825-836.

- [3] 黄润秋, 黄 达. 卸荷条件下花岗岩力学特性试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2008, **27**(11): 2205-2213. (HUANG Runqiu, HUANG Da. Experimental research on mechanical properties of granites under unloading condition[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2008, **27**(11): 2205-2213. (in Chinese))
- [4] 张 超, 曹文贵, 赵 衡, 等. 考虑围压效应和强度脆性跌落的岩石全应力-应变曲线统计损伤模拟方法[J]. *岩土工程学报*, 2022, **44**(5): 936-944. (ZHANG Chao, CAO Wengui, ZHAO Heng, et al. Statistical damage simulation method for complete stress-strain path of rocks considering confining pressure effect and strength brittle drop[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2022, **44**(5): 936-944. (in Chinese))
- [5] KULHAWY F H. Stress deformation properties of rock and rock discontinuities[J]. *Engineering Geology*, 1975, **9**(4): 327-350.
- [6] SANTARELLI F J, BROWN E T, MAURY V. Analysis of Borehole stresses using pressure-dependent, linear elasticity[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1986, **23**(6): 445-449.
- [7] LIONÇO A, ASSIS A. Behaviour of deep shafts in rock considering nonlinear elastic models[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2000, **15**(4): 445-451.
- [8] WU X Z, JIANG Y J, GUAN Z C, et al. Influence of confining pressure-dependent Young's modulus on the convergence of underground excavation[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2019, **83**: 135-144.
- [9] ZHANG C G, ZHAO J H, ZHANG Q H, et al. A new closed-form solution for circular openings modeled by the Unified Strength Theory and radius-dependent Young's modulus[J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, **42**: 118-128.
- [10] 高 祥, 杨 根, 张庆贺, 等. 考虑弹性模量与应力相关的厚壁筒应力半解析解微分方程法[J/OL]. *工程力学*, 2024: 1-18. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.o3.20241021.0949.006.html>. (GAO Xiang, YANG Gen, ZHANG Qinghe, et al. Semi-analytical differential equation method for thick-walled cylinder stress considering the correlation between elastic modulus and stress[J/OL]. *Engineering Mechanics*, 2024: 1-18. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.o3.20241021.0949.006.html>. (in Chinese))
- [11] CUI L, ZHENG J J, ZHANG R J, et al. Elasto-plastic analysis



- of a circular opening in rock mass with confining stress-dependent strain-softening behaviour[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2015, **50**: 94-108.
- [12] 张 超, 陈秋南, 杨期君, 等. 考虑初始空隙闭合及其影响的脆性岩石变形破坏全过程模拟[J]. *煤炭学报*, 2020, **45**(3): 1044-1052. (ZHANG Chao, CHEN Qiunan, YANG Qijun, et al. Whole process simulation method of brittle rocks deformation and failure considering initial voids closure and its influence[J]. *Journal of China Coal Society*, 2020, **45**(3): 1044-1052. (in Chinese))
- [13] 曹文贵, 张 超, 贺 敏, 等. 考虑空隙压密阶段特征的岩石应变软化统计损伤模拟方法[J]. *岩土工程学报*, 2016, **38**(10): 1754-1761. (CAO Wengui, ZHANG Chao, HE Min, et al. Statistical damage simulation method of strain softening deformation process for rocks considering characteristics of void compaction stage[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, **38**(10): 1754-1761. (in Chinese))
- [14] 李修磊, 陈洪凯, 张金浩. 考虑初始空隙压密的岩石变形全过程本构模型[J]. *西南交通大学学报*, 2022, **57**(2): 314-321. (LI Xiulei, CHEN Hongkai, ZHANG Jinhao. Statistical damage model for whole deformation and failure process of rock considering initial void closure[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2022, **57**(2): 314-321. (in Chinese))
- [15] 郝宪杰, 袁 亮, 卢志国, 等. 考虑煤体非线性弹性力学行为的弹塑性本构模型[J]. *煤炭学报*, 2017, **42**(4): 896-901. (HAO Xianjie, YUAN Liang, LU Zhiguo, et al. An elastic-plastic-soften constitutive model of coal considering its nonlinear elastic mechanical behavior[J]. *Journal of China Coal Society*, 2017, **42**(4): 896-901. (in Chinese))
- [16] 高 祥, 杨 科. 考虑梯度应力的深部围岩板裂化模拟初步试验研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2022, **41**(9): 1858-1873. (GAO Xiang, YANG Ke. Preliminary tests for simulating deep surrounding rock slabbing considering gradient stress[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2022, **41**(9): 1858-1873. (in Chinese))
- [17] 金爱兵, 陈 龙, 吴顺川, 等. 加载速率影响下板裂化脆性岩石失稳破坏试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2024, **46**(6): 1215-1225. (JIN Aibing, CHEN Long, WU Shunchuan, et al. Experimental study on instability destruction of slab-failure brittle rock under influences of loading rates[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2024, **46**(6): 1215-1225. (in Chinese))
- [18] 宫凤强, 罗 勇, 刘冬桥. 深部直墙拱形隧洞围岩板裂破坏的模拟试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2019, **41**(6): 1091-1100. (GONG Fengqiang, LUO Yong, LIU Dongqiao. Simulation tests on spalling failure in deep straight-wall-top-arch tunnels[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2019, **41**(6): 1091-1100. (in Chinese))
- [19] 胡小川, 苏国韶, 陈冠言, 等. 深埋隧洞硬岩板裂化过程试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2020, **42**(12): 2271-2280. (HU Xiaochuan, SU Guoshao, CHEN Guanyan, et al. Experimental study on slabbing process of hard rock in deep tunnels[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2020, **42**(12): 2271-2280. (in Chinese))
- [20] LING K, WANG Y, LIU D Q, et al. Experimental study on rockburst and spalling failure in circular openings for deep underground engineering[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2023, **56**(4): 2607-2631.
- [21] PAN P Z, MIAO S T, WU Z H, et al. Laboratory observation of spalling process induced by tangential stress concentration in hard rock tunnel[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2020, **20**(3): 04020011.
- [22] 孔 洋, 阮怀宁, 张桂荣, 等. 玄武岩脆性相似材料的起裂和损伤强度特征试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2023, **45**(增刊 1): 153-157. (KONG Yang, RUAN Huaining, ZHANG Guirong, et al. Experimental study on crack initiation and damage strength characteristics of basalt brittle similar materials[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2023, **45**(S1): 153-157. (in Chinese))