

# 粘弹性土中横截面异形桩竖向动力响应理论分析

周航<sup>\*1,2</sup>, 汪义圣<sup>1,2</sup>, 李运舟<sup>1,2</sup>

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400450; 2. 重庆大学山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400450)

**摘要:** 横截面异形桩在工程应用中日益广泛, 该方面理论研究却较少。基于 Hamilton 原理和变分运算在直角坐标系下导出异形桩-粘弹性土模型的控制方程。采用 COMSOL 建立带异形边界的二维土体模型, 求解土体的控制方程, 该方法克服了异形边界带来的土体位移函数求解困难的问题。运用 MATLAB 中的边值计算方法求解桩的控制方程, 最后在 MATLAB 中编写迭代程序进行上述方程的耦合计算。建立了一套分析异形桩竖向动力响应的理论模型。将该理论模型的半解析解与现有解析解进行对比验证, 验证了该方法的可靠性。最后, 讨论了异形桩的横截面参数、桩-土模量比、桩的长细比等对桩顶复阻抗的影响。结果表明: 随着外荷载频率增大, 桩的横截面形状对桩顶阻抗的影响也逐渐增大, 其中 H 形桩的异形效应相较于 X 形桩和矩形桩更为明显。

**关键词:** 粘弹性土; 横截面异形桩; Hamilton 原理; 异形效应; 复杂边界条件; 动力阻抗

**中图分类号:** TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2017)01-0062-09

**作者简介:** 周航(1987 - ), 男, 教授, 博士, 主要从事结构-土相互作用等方面的教学和科研。E-mail: zh4412517@163.com。

## Theoretical Analysis of Dynamic Response of Irregular-Shaped Piles under Vertical Dynamic Loading

ZHOU Hang<sup>1,2</sup>, WANG Yi-sheng<sup>1,2</sup>, LI YUN-zhou<sup>1,2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China; 2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Chongqing University, Chongqing, 400045, China)

**Abstract:** The cross-sectional irregular-shaped piles are increasingly prevalent in engineering applications, yet the theoretical research in this area remains relatively scarce. In response to the current state of research, this study employs Hamilton's principle and variational calculus to derive the governing equations for the model of irregular-shaped pile-viscoelastic soil interaction in Cartesian coordinates. Utilizing COMSOL, a two-dimensional soil model with irregular boundaries is established to solve the governing equations for the soil, overcoming the challenge of solving the soil displacement function caused by irregular boundaries. MATLAB is employed to solve the control equations for the pile using boundary value calculation methods, and subsequently, an iterative program is developed in MATLAB to perform coupled calculations of the aforementioned equations. A theoretical model for analyzing the vertical dynamic response of irregular-shaped piles is established. The semi-analytical solution of this theoretical model is compared with existing analytical solutions to validate the reliability of the method. Finally, the impacts of the cross-sectional parameters of irregular-shaped piles, the pile-to-soil modulus ratio, and the slenderness ratio of the pile on the pile head impedance are discussed. The results indicate that as the external load frequency increases, the influence of the pile's cross-sectional shape on the pile head impedance gradually increases, with the irregular effect of an H-shaped pile being more pronounced compared to X-shaped and rectangular piles.

**Key words:** viscoelastic soil; cross-sectional irregular pile; Hamilton's principle; irregularity effect; complex boundary conditions; dynamic impedance

## 0 引言

城市建设中, 天然地基的承载能力远不能满足建筑物和构筑物的要求, 需要进行地基处理。桩基础由

**基金项目:** 国家自然科学基金面上项目 (52278330, 52027812), 重庆市杰出青年科学基金-cstc2021jcyj-jqX0017, 国家重点研发计划 (2022YFB2601903)

**收稿日期:** 2024-##-##

**\*通讯作者** (E-mail: zh4412517@163.com)

于其承载稳定性和经济效益被广泛运用于实际工程中。根据实际工程需求,研究了不同频率动荷载对桩顶动力响应的影响,用阻抗函数对这种动力影响进行了评估量化,阻抗函数的实部量化了桩顶轴向刚度,虚部量化了桩顶阻尼和土体阻尼产生的能量消散。自2008年以来,现浇X形混凝土桩被逐步研发并使用,张敏霞等<sup>[2]</sup>进行足尺实验研究表明其极限承载力及桩身单位体积混凝土极限承载力均为等截面圆形桩的1.32倍。X形桩目前已经被多个高速公路软基加固使用,如南京长江第四大桥北接线软基加固工程、南京江山大街桥头过渡段软基加固工程、312国道拼宽段地基加固工程等。以南京长江第四大桥项目南接线工程S1标段为例,通过现场实测沉降数据和数值模拟对比,分析了X形桩相较于等截面积圆桩在减少竖向沉降和侧向位移方面更具有优势,由于异形截面效应,X形桩的桩身轴力和桩侧摩阻力比等截面圆桩大,此工况下比圆形桩多承担46.6%的上部荷载<sup>[3]</sup>。马来西亚吉隆坡的双子塔修建于软土地基之上,基础采用了矩形壁板桩的方案,较好地控制了软土地基的沉降和变形,确保了双子塔的稳定和安全<sup>[4]</sup>。此外,广西隆安某项目为四层框架结构,通过地基勘测在设计阶段准备选择H形、矩形(壁板桩)、圆形三种截面桩,在保证承载力的前提下,使用H形桩使基础造价降低15%左右<sup>[4]</sup>。

横截面异形桩(以下简称异形桩)主要是指在不增加建筑材料的用量上,通过改变横截面的形状,提高竖向承载能力的一种优质桩。由于异形桩复杂的边界条件导致土体位移函数没有解析解,使得异形桩的竖向动力响应理论研究更加困难。因此许多学者从数值模拟、理论研究、模型试验等方面开展了研究。数值模拟方面,吕亚茹等<sup>[6]</sup>基于ABAQUS有限元模拟研究了X形桩侧摩阻力分布特点和极限承载能力,结果表明两种特性均优于等截面积的圆形桩;理论研究方面,李胤橙等<sup>[1]</sup>基于变分原理和虚功原理推导了桩-土控制方程,用保角变换技术求解控制方程,获得了静力荷载下的异形桩的半解析解;周航等<sup>[7]</sup>在上述基础上考虑了桩周土体竖向和水平位移,运用差分求解的方法获得了土体竖向、水平向位移和桩身位移的弹性变分解。根据现阶段的理论研究成果,目前已经开展了异形桩在各个领域的研究工作,如用X形桩复合地基加宽高速公路<sup>[13]</sup>,使用X形桩地基进行厂房软土地基处理<sup>[14]</sup>,无砟轨道采用异形桩筏基础<sup>[15]</sup>,海洋工程里面的珊瑚沙异形桩复合地基<sup>[16]</sup>等。

本文在近似连续体的基础上,提出了一种异形桩竖向动力响应的分析方法,运用广义Hamilton's原理

来分析桩-土的耦合作用,并用变分法导出桩-土控制方程。由于两个微分方程是耦合的,本文用迭代算法进行求解。对于异形桩的复杂边界条件问题,Cao等<sup>[9]</sup>用分离变量的方法求解了矩形截面桩的问题,但是该方法只适用于矩形截面,具有局限性。Zhou等<sup>[12]</sup>运用最小二乘原理给出了X形桩和矩形桩保角变换公式中 $c_0, c_{2n}$ 的算法公式,提出了一种捕捉任意横截面桩周围土体变形机制的方法。Li等<sup>[10]</sup>在周航提出的保角变换系数计算公式的基础上研究了静力竖向荷载下异形桩的桩顶位移和极限承载力。

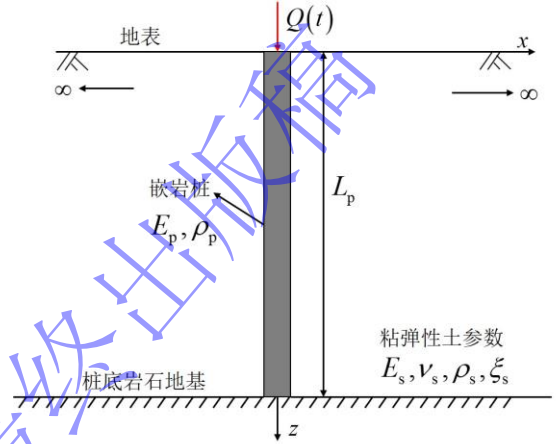


图1: 粘弹性土中竖向动力荷载下横截面异形桩力学模型  
Fig 1: Mechanical model of irregular section pile under vertical dynamic load in viscoelastic soil

## 1 异形桩-粘弹性土模型

如图1所示,考虑一个埋置在粘弹性土中的横截面异形单桩,异形桩的横截面形状如图2所示,表1给出了异形桩的截面参数。桩顶部受到竖向动荷载 $Q(t) = Q_0 e^{i\Omega t}$ ,其中, $\Omega$ 表示圆频率, $Q_0$ 为外荷载振幅。土层考虑为均质、各向同性的线性粘弹性体,土体的密度为 $\rho_s$ ,弹性模量为 $E_s$ ,土体泊松比为 $\nu_s$ ,土体的剪切模量为 $G_s = E_s / 2(1 + \nu_s)$ ,拉梅常数为 $\lambda_s = E_s \nu_s / (1 + \nu_s) / (1 - 2\nu_s)$ ,复数形式的剪切模量和弹性模量为 $G_s^* = G_s(1 + 2j\xi_s)$ , $E_s^* = E_s(1 + 2j\xi_s)$ 。 $\xi_s$ 为粘弹性土的阻尼比, $j$ 是虚数单位, $j = \sqrt{-1}$ 。假设桩为弹性体,长度为 $L_p$ ,弹性模量为 $E_p$ ,桩的横截面形式可以是圆形、矩形、X形和H形等。基于以上参数,对桩-土体系的分析建立在笛卡尔坐标系 $(x, y, z)$ 下, $z$ 轴与桩轴线重合, $z$ 轴正方向向下,坐标原点与桩顶横截面的形心重合。

模型基本假设为:

(1) 异形桩为弹性体,桩顶自由,由于桩的刚度远大于土体的刚度,在分析过程中,忽略桩的侧向变形。

(2) 假设土体为均质、各向同性的粘弹性单层

土，桩为弹性体嵌岩桩。桩和桩周土的接触为连续接触，接触面在受外力作用后不产生相对滑移。

(3) 在竖向荷载作用下，桩周土的水平位移相对于竖向位移对桩-土相互作用影响很小，在计算过程中可以暂时忽略。

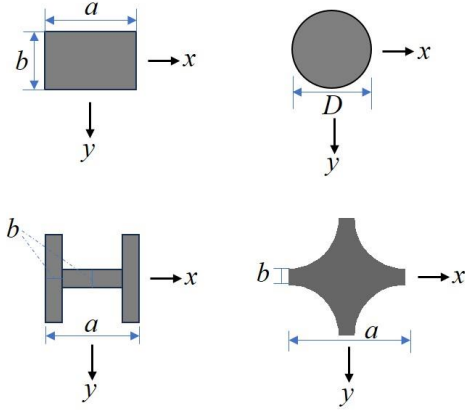


图 2: 横截面异形桩的截面形式

Fig 2: Several cross-sectional forms of irregular pile

表 1: 异形桩横截面参数

Table 1: Cross-sectional parameters of special-shaped piles

形状	横截面积	等效直径
圆形桩 ( $A_p$ )	$\pi D^2/4$	$D$
矩形桩 ( $A_{pR}$ )	$ab$	$(4A_{pR}/\pi)^{1/2}$
H 形桩 ( $A_{pH}$ )	$a^2 - (a-2b)(a-b)$	$(4A_{pH}/\pi)^{1/2}$
X 形桩 ( $A_{pX}$ )	$a^2 - \pi(a-b)^2/4$	$(4A_{pX}/\pi)^{1/2}$

## 2 桩-土体系控制方程的推导

### 2.1 桩-土体系势能与动能函数形式

由于忽略桩周土的水平位移，桩顶受到竖向动荷载时，桩周土水平位移  $u_x = u_y = 0$ ，竖向位移为：

$$u_z(x, y, z, t) = w(z, t)\phi(x, y) \quad (1)$$

式中： $w(z, t)$  为桩身位移函数； $\phi(x, y)$  为关于  $x, y$  的无量纲位移函数。为了保证桩-土接触面处的连续性，在接触面处  $\phi(x, y) = 1$ ，又因为桩身位移引起的土体位移场在无穷远处为零，所以在无穷远处位移函数  $\phi(x, y) = 0$ 。

因为假设土体为线性粘弹性材料，其应力-应变关系满足广义胡克定律，应力张量可以表示为：

$$\sigma_{ij} = \lambda_s^* \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G_s^* \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

式中： $\varepsilon_{ij}$  表示应变张量； $\sigma_{ij}$  为应力张量； $\delta_{ij}$  为克罗内克函数。

将 (1) 式带入粘弹性土应力-应变关系可得土体中一点的应变分量为：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \phi(x, y) \\ 0 \\ \frac{1}{2} w \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \\ \frac{1}{2} w \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

桩周土应变能密度为：

$$\Lambda_s = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \lambda_s^* (tr \varepsilon)^2 + G_s^* tr \varepsilon^2 \quad (4)$$

将 (3) 式代入 (4) 式中可得：

$$\Lambda_s = \frac{1}{2} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \phi^2 + \frac{1}{2} G_s^* w^2 \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5)$$

桩-土体系总势能为：

$$\Pi = \int_0^{L_p} \frac{1}{2} E_p A_p \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz + \iiint_{\Omega_s} \Lambda_s d\Omega \quad (6)$$

桩-土体系总体动能公式为：

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{L_p} \rho_p A_p \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_s} \rho_s \left[ \frac{\partial (w\phi)}{\partial t} \right]^2 d\Omega \quad (7)$$

桩顶竖向荷载做功为：

$$W_{nc} = Qw|_{z=0} \quad (8)$$

### 2.2 桩-土系统势能与动能的变分运算

对桩-土体系的总势能和动能进行变分运算，用分部积分和格林公式进行简化，计算可得桩-土体系势能变分为：

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_0^{L_p} E_p A_p \frac{\partial w}{\partial z} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz + \iiint_{\Omega_s} \left\{ (\lambda_s^* + 2G_s^*) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \phi \delta \phi \right. \\ & + (\lambda_s^* + 2G_s^*) \phi^2 \frac{\partial w}{\partial z} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G_s^* \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] w \delta w \\ & \left. + G_s^* w^2 \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \quad (9) \end{aligned}$$

对式 (9) 的第五项进行如下的简化：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \delta \phi \quad (10)$$

$$\iiint_{\Omega_0} G_s^* w^2 \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (14)$$

$$= \int_0^{L_p} G_s^* w^2 dz \left\{ \iint_{S_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \phi \right) \right] dx dy \right. \\ \left. + \iint_{S_1} \left( -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \delta \phi dx dy \right\} \quad (11)$$

式(11)右边第一项用格林公式,并结合桩-土接触面边界条件可得:

$$\iint_{S_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \phi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \phi \right) \right] dx dy \\ = \oint_{\Gamma} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} dx + \frac{\partial \phi}{\partial x} dy \right) \delta \phi \quad (12)$$

式中:  $\Gamma$  为桩-土接触部分,由于  $\phi$  在边界  $\Gamma$  的值为常数 1,所以其一阶变分为 0。

简化后的势能变分为:

$$\delta \Pi = \left\{ -\int_0^{L_p} E_p A_p \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz - \iint_{S_1} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \phi^2 dS \int_0^{L_p} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz \right. \\ \left. + \iint_{S_1} G_s^* \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS \int_0^{L_p} w dz \right\} \delta w \\ + \left[ \int_0^{L_p} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \iint_{S_1} \phi dS \right. \\ \left. + \int_0^{L_p} G_s^* w^2 dz \iint_{S_1} \left( -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dS \right] \delta \phi \\ + E_p A_p \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_0^{L_p} + \iint_{S_1} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \phi^2 dS \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_0^{L_p} \quad (13)$$

桩-土体系动能变分表示为:

$$\delta T = \int_0^{L_p} \rho_p A_p \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) dz + \iiint_{\Omega_0} \rho_s \frac{\partial(w\phi)}{\partial t} \delta \left[ \frac{\partial(w\phi)}{\partial t} \right] d\Omega$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ -\int_0^{L_p} \rho_p A_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz - \iint_{S_1} \rho_s \phi^2 dS \int_0^{L_p} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz + \int_0^{L_p} E_p A_p \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz \right. \\ \left. + \iint_{S_1} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \phi^2 dS \int_0^{L_p} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz - \iint_{S_1} G_s^* \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dS \int_0^{L_p} w dz - \iint_{S_1} G_s^* \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dS \int_0^{L_p} w dz \right] \delta w dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[ -\int_0^{L_p} \rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w dz \iint_{S_1} \phi dS - \int_0^{L_p} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz \iint_{S_1} \phi dS + \int_0^{L_p} G_s^* w^2 dz \iint_{S_1} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) dS \right] \delta \phi dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[ -E_p A_p \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_0^{L_p} - \iint_{S_1} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \phi^2 dS \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_0^{L_p} \right] dt + \int_0^{L_p} \rho_p A_p \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} dz + \iiint_{\Omega_0} \rho_s \frac{\partial(w\phi)}{\partial t} \delta(w\phi) \Big|_{t_1}^{t_2} d\Omega + \int_{t_1}^{t_2} Q_a \delta w|_{z=0} dt = 0 \quad (18)$$

## 2.4 桩-土系统控制方程及边界条件

根据方程(18)可得桩位移函数控制方程为:

外荷载做功的变分为:

$$\delta W_{nc} = Q \delta w|_{z=0} \quad (15)$$

## 2.3 桩-土系统中 Hamilton 原理的运用

对竖向动荷载作用下的桩-土体系运用广义 Hamilton 原理,桩-土系统在时间  $t_1$  到  $t_2$  的平衡状态下的运动满足以下方程:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (16)$$

式中:  $\delta \Pi$  为体系势能的变分;  $\delta T$  为体系动能的变分;  $\delta W_{nc}$  为外荷载做功的变分。

将动能变分结果带入式(16)中,交换时间和埋深的积分顺序,并进行分部积分可得:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_0^{L_p} \rho_p A_p \left( \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dt \right) dz \\ + \iiint_{\Omega_0} \rho_s \frac{\partial(w\phi)}{\partial t} \delta(w\phi) \Big|_{t_1}^{t_2} d\Omega - \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^{L_p} \rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w dz \iint_{S_1} \phi \delta \phi dS \right. \\ \left. + \iint_{S_1} \rho_s \phi^2 dS \int_0^{L_p} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dz \right) dt \quad (17)$$

将式(13)(17)带入式(16)中,根据广义 Hamilton 原理可知,桩-土系统中  $t_1$  和  $t_2$  两个时刻,变分  $\delta w$  和  $\delta(w\phi)$  的值为 0,所以方程(18)中倒数第 2、3 项的值为 0。为了进一步简化微分方程和边界条件,令  $w(z,t) = w(z)e^{i\Omega t}$ ,代入方程(18)中。为使上述方程成立,需满足  $\int_{t_1}^{t_2} [\dots] dt$  里面的被积函数为 0,这样可得桩和桩周土关于  $w$  和  $\phi$  的微分方程及边界条件。

$$(E_p A_p + 2t) \frac{d^2 w}{dz^2} - [k - (\rho_p A_p + \Lambda) \Omega^2] w = 0 \quad (19)$$

边界条件为:



$$\begin{cases} (E_p A_p + 2t) \frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} = -Q_0 \\ w \Big|_{z=L_p} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

式中位移函数的传递参数  $k, t, \Lambda$  的表达式分别为：

$$t = \frac{1}{2} \iint_{S_1} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \phi^2 dS \quad (21)$$

$$k = \iint_{S_1} G_s^* \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS \quad (22)$$

$$\Lambda = \iint_{S_1} \rho_s \phi^2 dS \quad (23)$$

式中： $t$  表示土体受压时产生的压缩抗力； $k$  表示土体受到剪切作用时产生的剪切抗力； $\Lambda$  表示土体的惯性阻力； $S_0$  为桩的横截面在  $xy$  平面上的投影区域； $S_1$  为  $xy$  平面上除  $S_0$  外的无限大土体平面区域。

方程 (19) 通过边界条件可以求解出其解析式：

$$w(z) = C_1 e^{\eta_1 z} + C_2 e^{\eta_2 z} \quad (24)$$

式中：

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k - (\rho_p A_p + \Lambda) \Omega^2}{E_p A_p + 2t}} \quad (25)$$

式中的常数  $C_1, C_2$  可以根据边界条件 (20) 求解计算。最终  $w(z)$  的特解形式如下：

$$w(z) = \frac{Q_0}{\sqrt{(E_p A_p + 2t) [k - (\rho_p A_p + \Lambda) \Omega^2]}} \left[ \frac{e^{\eta_2(L_p - z)} - e^{\eta_1(L_p - z)}}{e^{\eta_1 L_p} + e^{\eta_2 L_p}} \right] \quad (26)$$

根据方程 (18) 可得土体位移函数  $\phi$  的微分方程为：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \beta^2 \phi = 0 \quad (27)$$

边界条件为：

$$\begin{cases} \phi(r_p) = 1 \\ \phi(\infty) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

桩的传递参数为：

$$\beta = \sqrt{\frac{n_{s1} - n_{s2} \Omega^2}{m_{s1}}} \quad (29)$$

$$m_{s1} = \int_0^{L_p} G_s^* w^2 dz \quad (30)$$

$$n_{s1} = \int_0^{L_p} (\lambda_s^* + 2G_s^*) \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz \quad (31)$$

$$n_{s2} = \int_0^{L_p} \rho_s w^2 dz \quad (32)$$

若方程 (27) 定义域中的孔洞为圆形，结合边界条件可求得方程 (27) 的解析解如下：

$$\phi(r) = \frac{K_0(\beta r)}{K_0(\beta r_p)} \quad (33)$$

式中： $K_0(*)$  为第二类 0 阶修正贝塞尔函数，

MATLAB 中包含此函数，可直接调用计算。

若方程 (27) 中的孔洞为复杂异形（即异形桩的情况），则方程 (27) 没有解析解，可用 COMSOL 建立二维模型求得数值解，即为本文重点研究内容。

### 3 桩-土系统耦合控制方程求解思路

在桩-土体系控制方程求解过程中，可以发现，桩位移控制方程 (19) 里面的参数  $k, t, \Lambda$  分别为土体位移函数控制方程解  $\phi(x, y)$  的一系列积分结果。同理，土的控制方程中的参数也取决于桩身位移函数  $w$  及其导数的积分结果。因此桩和土的微分方程是耦合在一起的，需要进行迭代求解，本文的迭代过程在 MATLAB 中完成。

#### 3.1 土的位移函数控制方程求解思路

以往对于此类偏微分方程主要使用有限差分的方法进行求解，但是差分法需要对定义域人为离散化和迭代计算，计算过程相对来说较为复杂。并且由于本文研究对象主要为异形桩，异形桩复杂的边界条件的处理目前有保角变换的方法，将异形边界在相平面内变换为圆形，然后再用差分法进行计算，整个差分计算过程相对于圆桩来说更为复杂，我们需要找到一种相对简便的计算方法。

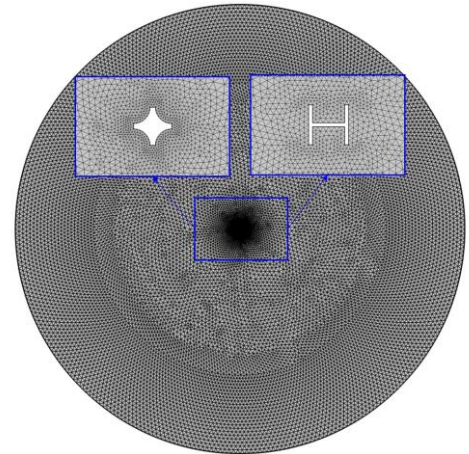


图 3：土体位移有限元求解网格划分

Fig 3: Finite element mesh generation for soil displacement analysis

在本部分中，采用一种有限元 (FEM) 的方法解决这个微分方程的求解问题。通过使用 COMSOL Multiphysics with MATLAB 进行计算，这种计算方法更加直观简便，并且不仅适用于圆桩，还适用于任意横截面形式的桩-土系统。这种新的解决方法首先需要在 COMSOL Multiphysics 数学模块中的偏微分方程接口建立一个二维形式的土域模型，并输入土体位移函数控制方程，指定边界条件就可以求解出数值解。这种求解方法的优势在于直接指定边界条件，并且可以根据求解误差进行自适应网格划分，在边界周

围网格密集，远离边界处网格较稀疏，本文模型计算中的网格自适应次数设定为 2。图 3 为桩周土计算模型的网格划分情况。对于后续的迭代求解过程，可以将上述建立的有限元模型保存为后缀为 m 的 MATLAB 文件，这样命令行可以在 MATLAB 中自动生成，作为后续迭代的子程序。对于不同截面形状的桩，只需要更改 COMSOL Multiphysics 中的几何模块的形状，然后重新生成 m 文件即可，图 4 为桩周土体位移函数在竖向动力荷载下计算所得到的云图，可以发现土体位移函数在平面内是振荡递减的。

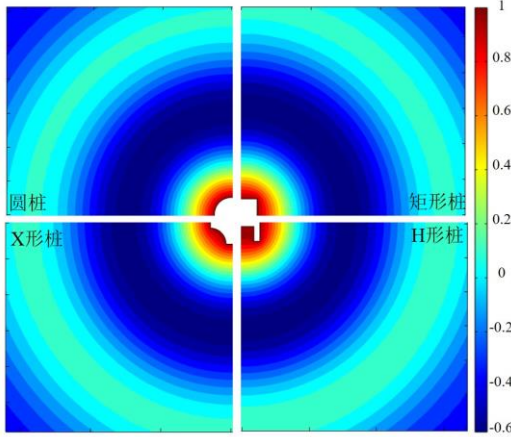


图 4：竖向动力荷载下土体位移函数云图

Fig 4: Vertical dynamic load soil displacement function cloud map

### 3.2 桩的位移函数控制方程求解思路

桩的位移函数为二阶常微分方程，在桩顶和桩底分别有限制条件，这是一个两点边值问题，其中方程的系数为土位移函数的积分，根据两端的边界条件可以求出相应解。式 (26) 为桩的微分方程的解析解。两点边值问题在 MATLAB 中也可以用 BVP4c 函数进行求解，该方法可以得到方程的数值解，对该数值解及其导数在桩身长度上进行数值积分可以得到土体控制方程中的传递参数，将桩的控制方程求解程序封装为一个函数，供主程序调用。

### 3.3 桩-土耦合控制方程迭代求解思路

从上述方程 (19) 看，为了计算桩的位移  $w$ ，我们还需要知道  $k, t, \Lambda$  三个参数，但是这三个参数又取决于土体位移函数及其导数。同理从方程 (29) 可知，为了计算土体的位移函数，需要知道参数  $\beta$ ，这个参数取决于桩的位移函数及其导数。所以需要使用迭代算法来同时求解桩和土体的位移函数，整个迭代过程在 MATLAB 中进行。

首先，假设参数  $\beta$  的初始值，然后调用前期由 COMSOL Multiphysics 生成的 m 文件，这个子程序主要用于求解土的偏微分方程，通过派生值的方式输出土体位移及其导数在土域内的积分值，再带入式

(21) - (23) 即可得到参数  $k, t, \Lambda$  的值。将计算得到的  $k, t, \Lambda$  带入到求解桩位移的 BVP4c 程序中，求解桩的位移函数，将  $w$  及其导数等进行数值积分带入式 (29) - (32) 即可得到新的  $\beta$  值 ( $\beta_{\text{new}}$ )，将  $\beta$  与  $\beta_{\text{new}}$  进行比较判断，看是否满足收敛条件，收敛条件为  $|\beta_{\text{new}} - \beta| \leq 10^{-3}$ 。如果满足收敛条件则结束循环；若不满足收敛条件，则令  $\beta = \beta_{\text{new}}$ ，继续上述循环，直到满足收敛条件。图 5 为迭代求解流程示意图。

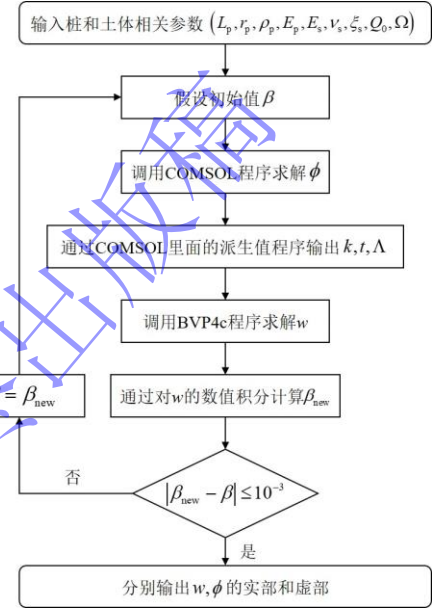


图 5：桩-土耦合控制方程求解方案

Fig 5: Solution for solving pile-soil coupling control equations.

## 4 模型验证

在本节中，主要将本文方法得到的半解析解与现有理论的解析解进行对比。对比主要针对圆桩的竖向动力响应进行，研究圆桩在局部和广泛频率范围内的桩顶刚度和阻尼特性。

### 4.1 与基于近似连续介质的解析解进行对比

Gupta 等<sup>[8]</sup>基于近似连续介质在极坐标下导出不考虑土体水平位移的圆形桩-土控制方程，并引入修正系数  $\eta_s$  对土体参数进行修正，修正结果为  $\lambda_s^* + 2G_s^* = \eta_s G_s^*$ ，其中  $\eta_s = 2/(1 - \nu_s)$ 。将本文分析方法得出的圆桩半解析解结果与 Gupta 的解析解进行对比验证。分析参数如下，土体的泊松比、阻尼比、桩与土体的密度比分别为： $\nu_s = 0.4$ ， $\xi_s = 0.05$ ， $\rho_p / \rho_s = 1.25$ 。图 5 分别展示了桩-土模量比为 100，1000 及桩的长度与半径的比值为 10，20 的情况下桩顶的归一化刚度与土体的阻尼比随频率变化的分析结果。对比中用到的归一化频率为  $a_0 = \Omega r_p / V_s$ ， $V_s = \sqrt{G_s / \rho_s}$  为土体的剪切波速率。竖向静力荷载下

的桩顶刚度表示为  $K_{(a_0=0)} = Q_0 / w(0)$ ，竖向动力荷载下的桩顶刚度为  $K_{(a_0)} = K_{(a_0=0)}[k_{(a_0)} + 2j\xi_{(a_0)}]$ 。

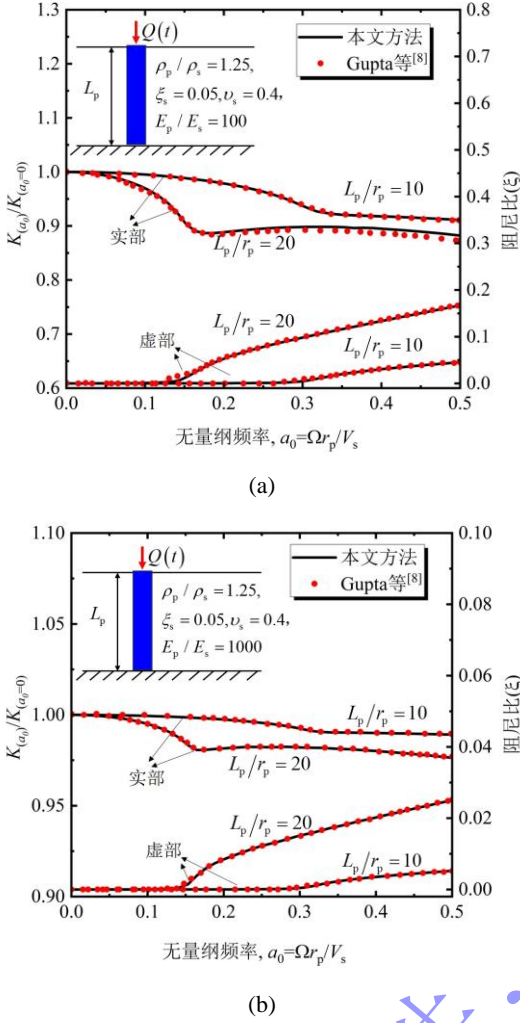


图 5：桩顶归一化刚度、阻尼比与无量纲频率的关系

Fig 5: The relationship between pile-head stiffness, damping ratio, and dimensionless frequency.

图 5 在不同的桩-土模量比和长细比的情况下比较了桩顶归一化刚度和阻尼比的情况，两者都是基于近似连续介质的条件下进行对比。从对比结果可以看出，本文分析方法有效的展示了桩、土的一些基本力学特性，并且非常准确的预测了桩-土系统的固有频率。说明本文提出的桩-土体系的分析方法是可靠的，相较于 Gupta 的求解方法，本文方法解决了异形桩复杂边界导致的微分方程求解困难的问题。从图中可知，在固有频率之前，阻尼比几乎为 0，在固有频率之后，阻尼比出现一个突然增长的趋势。在其他参数相同的情况下，桩的固有频率主要与长细比有关， $E_p / G_s$  数值几乎不对固有频率产生影响，长细比越大，固有频率反而越小。

#### 4.2 与基于严格连续介质的解析解进行对比

Zheng 等<sup>[11]</sup>基于严格连续介质，将桩视为一维欧拉杆，考虑土体的竖向位移和径向位移导出桩-土耦

合振动方程，通过对土体方程进行分离变量得到土体的竖向和径向位移，基于桩-土位移连续性假设得到桩的位移响应和阻抗函数。为进一步验证本文研究方法的准确性，将本文分析的结果与严格连续介质的解析解进行对比，结果如图 6 所示。土体为均质、各向同性的线性粘弹性土，桩为嵌岩桩，桩的长细比、桩土密度、土的泊松比、桩-土模量比等分别为  $L_p / r_p = 20$ ， $\rho_p = 2500 \text{ kg/m}^3$ ， $\rho_s = 2200 \text{ kg/m}^3$ ， $\nu_s = 0.25$ ， $E_p / G_s = 2500$ ， $\xi_s = 0.01$ 。归一化无量纲频率为  $a_z = \Omega L_p / V_p$ ， $V_p (= \sqrt{E_p / \rho_p})$  为桩的纵波速度，归一化复阻抗公式为  $K_{(a_z)} = Q_0 L_p / [w(0) E_p A_p]$ 。

从图 6(a)的对比结果可知，两种分析方法得到的桩顶复阻抗重合度很高。如图 6(b)，在低频率范围内，可以明显发现，Zheng 等人的分析结果出现了两个截止频率，而本文分析只出现了一个截止频率。Zheng 等人基于严格连续介质的分析允许波在竖向和水平方向的传播，但是本文分析假设波只在垂直方向进行传播，所以只预测了一个截止频率。

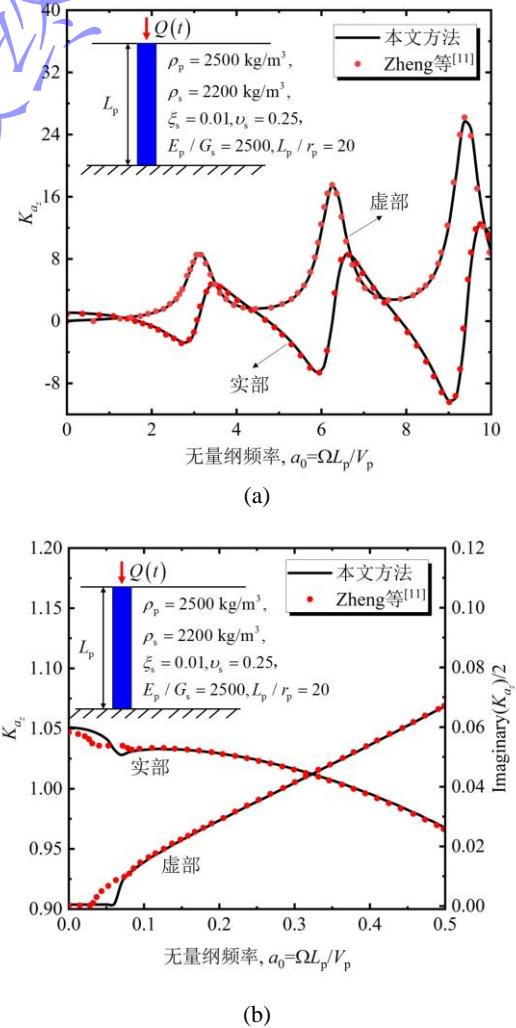


图 6：与严格连续介质的解析解对比结果

Fig 6: In contrast to the analytical solution for a perfectly continuous medium



## 5. 参数分析

为了进一步研究异形桩的异形效应对桩的动态刚度和阻尼的影响，基于本文提出的异形桩分析方法对均质粘弹性土中的竖向动力受荷桩进行详细的分析。根据量纲分析，推导出了以下几个无量纲影响因素，主要有桩的长细比  $L_p/d_e$  ( $d_e$  为与圆桩等面积条件下异形桩的等效直径)、桩-土模量比  $E_p/G_s$ 、异形桩的横截面参数  $a/b$ 、桩-土密度比  $\rho_p/\rho_s$ 、土体的泊松比  $\nu_s$  等。本文主要就前面三个参数分析其对桩顶动刚度 and 阻尼的影响。

根据异形桩异形效应的定义，本文中各异形桩的横截面面积相等，在相同条件下分析桩的横截面形状的影响。为分析以上参数对桩顶动力响应的影响，本文以竖向动力荷载下复数形式的桩顶阻抗  $K_{a_0}$  作为无量纲频率  $a_0$  的函数 ( $K_{a_0} = Q_0/[w(0)G_s r_p]$ ， $a_0 = \Omega r_p/V_s$ ， $V_s = \sqrt{G_s/\rho_s}$  为土体的剪切波速度)，主要以桩顶阻抗的实部和虚部来反映各参数的影响。以下分析主要基于局部频率范围内 ( $a_0 \leq 1$ ) 的结果，这个频率范围比较接近实际的工程，对实际工程应用有更好的参考意义。

### 5.1 桩-土模量比对异形桩桩顶阻抗的影响

图 7 所示为不同桩-土模量比下，横截面异形桩桩顶阻抗随频率的变化曲线，图中展示了四种截面形状桩的变化曲线。从图 7(a)可知，在不同的  $E_p/G_s$  下，截止频率几乎不发生变化。桩顶阻抗的实数部分在截止频率之前减小，截止频率之后先稍增大再减小。相同荷载频率下，刚度随着  $E_p/G_s$  的增大而增大。值得关注的是，当  $E_p/G_s \geq 500$  时，H 形桩刚度相对于其他三种桩有明显差异，在无量纲频率小于 0.15 时，H 形桩的刚度最大，圆桩最小；在较大频率时，H 形桩的刚度下降更快，导致较大频率时，H 形桩的刚度最小，圆桩刚度反而最大。由图 7(b)可知，随着  $E_p/G_s$  的增加，阻尼显著增加，并且相同条件下，H 形桩阻尼明显大于其他三种桩，X 形桩和矩形桩次之，圆桩阻尼最小。

### 5.2 长细比对异形桩桩顶阻抗的影响

图 8 为不同长细比下桩顶阻抗随无量纲频率的变化曲线，从图中可知，随着长细比  $L_p/d_e$  的增大，截止频率反而逐渐减小。在截止频率之前桩顶阻抗的实部随频率增大而减小，且随着长细比增加，变化更加明显；截止频率之后桩顶刚度先增大后减小。同样的，相同条件下当频率较小时，H 形桩的刚度最大，矩形和 X 形桩次之，圆桩最小；频率较大时，H 形桩的刚度最小，圆桩最大。无量纲频率小于 0.3 时，四种桩变化较小。如图 8(b)可知，阻尼随  $L_p/d_e$  的增

大而增大，相同条件下，H 形桩的阻尼最大，X 形桩略大于矩形桩，圆桩最小。

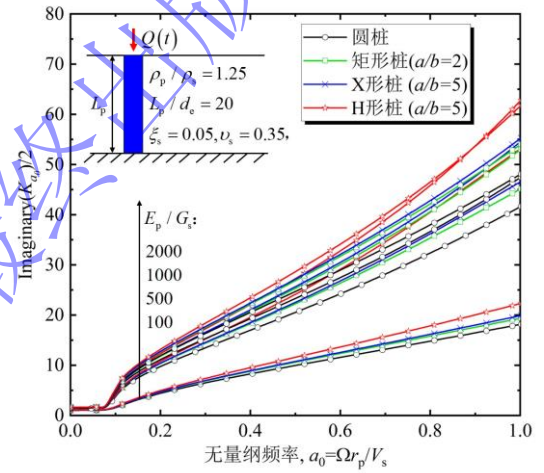
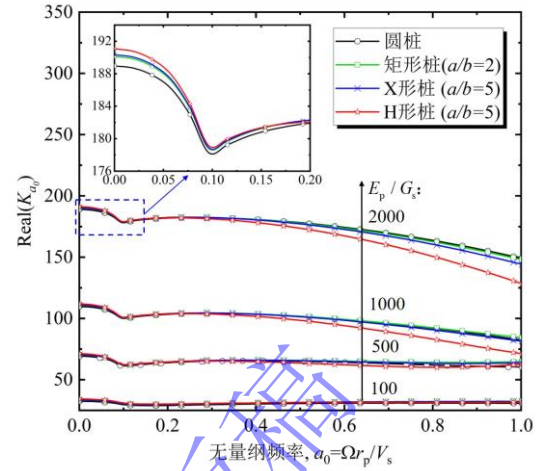
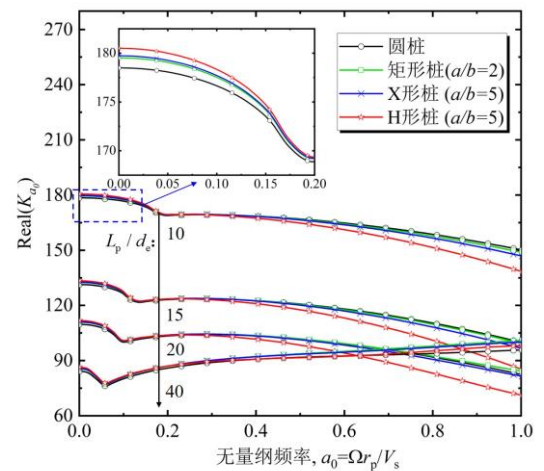


图 7：不同频率下桩-土模量比对桩顶刚度和阻尼比的影响

Fig 7: The influence of the pile-soil modulus ratio on the pile-head impedance at different frequencies



(a)



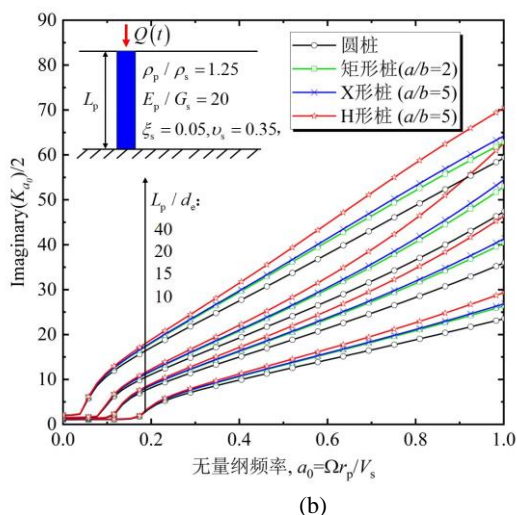


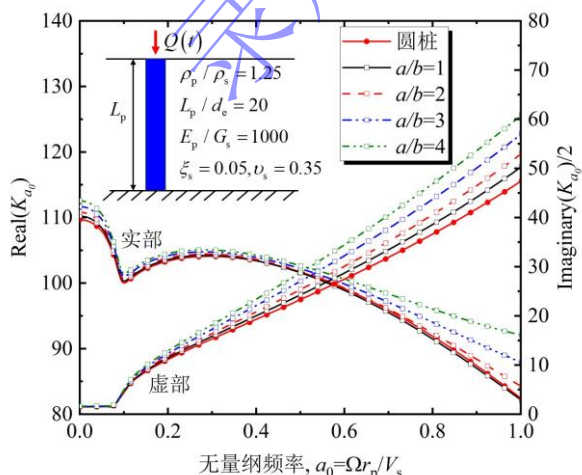
图 8: 不同频率下长细比对异形桩桩顶阻抗的影响

Fig 8: The influence of the slenderness ratio on the pile-head impedance of irregular piles at different frequencies

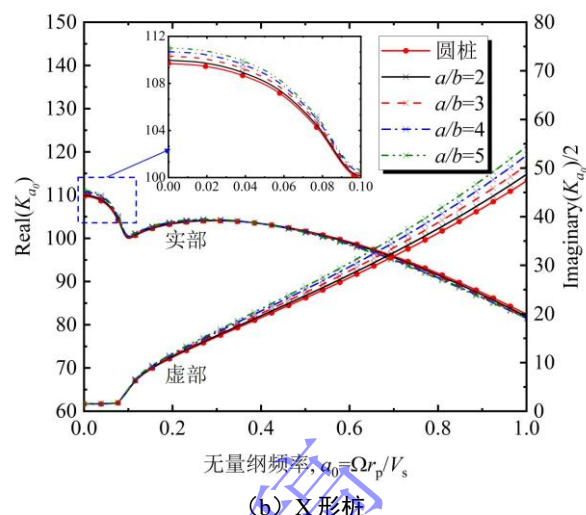
### 5.3 异形桩横截面参数对桩顶阻抗的影响

图 9 为不同横截面参数下桩顶阻抗随无量纲频率的变化曲线。为了方便比较,在各图中加入了相同面积下圆桩的阻抗值随频率变化曲线。从图中可知,桩的横截面参数对截至频率几乎不产生影响。由图 9(a)可知,矩形桩的刚度和阻尼都随  $a/b$  的增大而增大,且频率越大,增大效果越明显。如图 9(b)可知,X 形桩的桩顶刚度几乎不随  $a/b$  的变化而变化,但是阻尼在截至频率之后随  $a/b$  的增大而增大,频率越大,横截面参数影响越明显。如图 9(c)可知,在截至频率之前,H 形桩的桩顶动刚度随  $a/b$  的增大而增大,随着频率逐渐增大超过某个值时,桩顶刚度随  $a/b$  的增大反而减小。

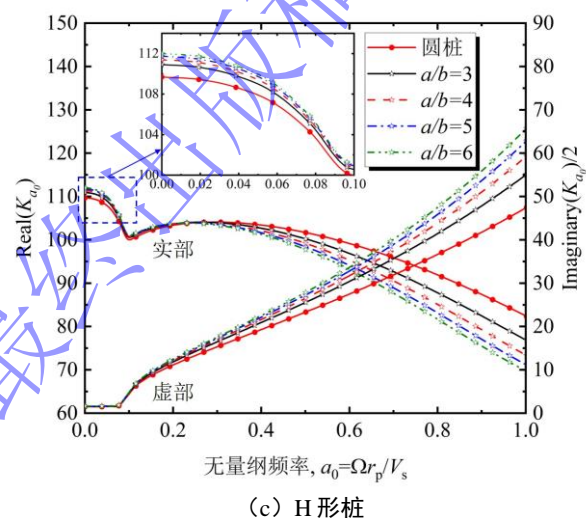
三种异形桩的比较中发现,阻尼总是随着  $a/b$  的增大而增大,并且总会大于相同面积下圆桩的阻尼。随着无量纲频率的增大,异形桩横截面参数对桩顶动刚度和阻尼的影响增大,特别注意的是,横截面参数  $a/b$  对 X 形桩的桩顶动刚度几乎不产生影响。



(a) 矩形桩



(b) X 形桩



(c) H 形桩

图 9: 不同频率下异形桩横截面参数对桩顶阻抗的影响

Fig 9: The influence of cross-sectional parameters of irregular piles on the pile-head impedance at different frequencies.

## 6 结论

本文提出的半解析理论研究了解异形桩的竖向动力响应问题,也为这一类型偏微分方程问题提供了一个好的解决方案。根据本文的分析计算,对影响异形桩桩顶阻抗的桩-土模量比、长细比、以及桩的横截面参数进行了讨论,从中得到了以下几点结论。

(1) 桩-土模量比的参数分析表明,桩顶刚度和阻尼随着  $E_p / G_s$  的增大而增大,随外荷载频率的增大,H 形桩的刚度明显小于其他三种桩,而阻尼大于其余三种桩。当  $E_p / G_s \leq 500$  时,外荷载频率和桩的截面形状对刚度的影响很小。

(2) 桩的长细比参数分析表明,桩顶刚度随长细比的增大而减小,阻尼随长细比的增加而增大。长细比还会影响桩的固有频率,固有频率随长细比的增大而减小。三种异形桩阻尼均显著大于相同横截面积下的圆桩,而 H 形桩的桩顶刚度小于其余三种桩。

(3) 桩横截面参数分析表明, 横截面参数对固有频率几乎不会产生影响, 三种异形桩的阻尼都随横截面参数  $a/b$  的增大而增大。矩形桩动刚度随  $a/b$  的增大而增大, X 形桩和 H 形桩的动刚度随  $a/b$  的变化受到外荷载频率的影响。频率较小时, 动刚度随  $a/b$  增大而增大, 频率较大时, 随  $a/b$  的增大而减小, 但是 X 形桩的动刚度对横截面参数的变化不敏感。因此在不影响异形桩的其他力学性能情况下, 可以适当增加异形桩的截面参数  $a/b$  的值, 在不改变混凝土用量的情况下增大桩顶刚度, 提升其承载能力。

### 参考文献:

- [1] 李杳橙, 周航, 亓戈平. 竖向受荷横截面异形桩弹塑性变分解[J]. 岩土工程学报, 2021, **45**(1): 122-133. (LI Xiancheng, ZHOU Hang, QI Geping. Elasto-plastic variational solution for vertically loaded noncylindrical pile[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, **45**(1): 122-133. (in Chinese))
- [2] 张敏霞, 刘汉龙, 丁选明, 等. 现浇 X 形混凝土桩与圆形桩承载性状对比试验研究[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(9): 1469-1476. (ZHANG Minxia, LIU Hanlong, DING Xuanming. Comparative tests on bearing capacity of cast-in-situ X-shaped concrete piles and circular pile[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(9): 1469-1476. (in Chinese))
- [3] 於慧, 丁选明, 孔纲强, 等. 高速公路拓宽工程现浇 X 形桩与圆形桩变形特性数值模拟对比分析[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(zk2): 170-176. (YU Hui, DING Xuanming, KONG Gangqiang et al. Comparative FEM analysis of deformation properties of expressway widening projects with cast-in-situ X-shaped concrete piles and circular pile[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(zk2): 170-176. (in Chinese))
- [4] Yeung A T, Félio G Y. Vertical and Horizontal Deformations of Foundations and Embankments[C]. ASCE, 1994.
- [5] 苏琳琳. “工”字形异形截面桩的工程设计及应用[J]. 中华建设, 2017 (4):106-107.(SU Linlin. Engineering design and application of "I-shaped" irregular section pile[J]. CHANGHUA JIANSHE, 2017 (4):106-107. (in Chinese))
- [6] 吕亚茹, 丁选明, 刘汉龙, 等. 刚性荷载下现浇 X 形桩复合地基桩侧摩阻力数值分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(11): 2134-2140. (LÜ Yaru, DING Xuanming, LIU Hanlong. Numerical analysis of side resistance of composite foundation with X-section cast-in-place concrete piles under rigid load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(11): 2134-2140. (in Chinese))
- [7] 周航, 李杳橙, 刘汉龙, 等. 均质土中竖向受荷 X 形混凝土桩的三维弹性变分解[J]. 岩土力学, 2021, **42**(4): 1012-1024. (ZHOU Hang, LI Xiancheng, LIU Hanlong, et al. Three-dimensional variational elastic solution for axially loaded XCC pile inhomogeneous soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, **42**(4): 1012-1024. (in Chinese))
- [8] GUPTA B K, BASU D. Dynamic analysis of axially loaded end-bearing pile in a homogeneous viscoelastic soil[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, 111: 31-40.
- [9] CAO G, WANG X, HE C. Dynamic analysis of a laterally loaded rectangular pile in multilayered viscoelastic soil[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2023, 165: 107695.
- [10] LI X C, ZHOU H, LIU H L, et al. Three - dimensional analytical continuum model for axially loaded noncircular piles in multilayered elastic soil[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2021, **45**(18): 2654-2681.
- [11] ZHENG C J, DING X M, LI P, et al. Vertical impedance of an end - bearing pile in viscoelastic soil[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 2015, **39**(6): 676-684.
- [12] ZHOU H, LIU H L, YUAN J R. A novel analytical approach for predicting the noncylindrical pile penetration - induced soil displacement in undrained soil by combining use of cavity expansion and strain path methods[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2018, **42**(11): 1270-1305.
- [13] YU H, DING X M, LÜ Y R. Analysis on Calculation Method for Widen Expressway Settlement with X-section Cast-in-place Concrete Pile Composite Foundation[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2013.
- [14] KONG G Q, LIU H L, DING X M, et al. Field Test of Pile-soil Stress Ratio and Negative Skin Friction of Composite X-section Cast-in-place Pile Foundation[J]. China Journal of Highway and Transport, 2012, **25**(1):8-12.
- [15] SUN G C, KONG G Q, LIU H L, et al. Vibration velocity of X-section cast-in-place concrete (XCC) pile-raft foundation model for a ballastless track[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2017, **54**(9):1340-1345.
- [16] PENG Y, LIU J Y, DING X M, et al. Performance of X-section concrete pile group in coral sand under vertical loading[J]. China Ocean Engineering, 2020, **34**(5): 621-630.