

DOI: 10.11779/CJGE20240202

一个简单的循环加载 CSUH 模型

姚仰平, 王方宇, 魏然

(北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191)

摘要: 土在循环荷载作用下会表现出滞回特性。在黏土砂土统一硬化(CSUH)模型基本框架下, 通过构建弹性滞回圈和提高低应力塑性刚度, 建立了一个简单的考虑循环加载的 H-CSUH 模型。①通过引入反映初始卸载模量的参数 κ_0 和反映模量变化速率的参数 w , 将 $e-\ln(p+p_s)$ 空间中卸载线的弹性响应修改为非线性, 并满足完全弹性滞回。②通过构建乘数 ζ , 建立了新的硬化方程 H_h , 进一步提高了模型在低应力下的塑性刚度。与已有模型相比, H-CSUH 模型形式简洁, 参数较少, 且实现了对黏土和砂土在循环荷载作用下滞回特性的统一描述。应用模型对不同黏土和砂土的排水和不排水试验结果进行了预测, 验证了模型的合理性。

关键词: 滞回特性; 循环加载; 黏土; 砂土; 统一模型

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2025)04-0667-10

作者简介: 姚仰平(1960—), 男, 博士, 教授, 主要从事岩土本构理论方面的教学与研究工作。E-mail: ypyao@buaa.edu.cn。

A simple cyclic loading CSUH model

YAO Yangping, WANG Fangyu, WEI Ran

(School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Soil exhibits hysteresis characteristic under cyclic loading. Under the basic framework of the unified hardening model for clays and sands, a simple H-CSUH model considering cyclic loading is established by constructing elastic hysteresis loops and improving low stress plastic stiffness. The main works are as follows: (1) The elastic response of the unloading line in the $e-\ln(p+p_s)$ space is modified to be nonlinear by introducing parameters κ_0 and w , where κ_0 is used to reflect the initial unloading modulus and w is used to reflect the modulus change rate. The modified elastic unloading and reloading lines exhibit complete elastic hysteresis behavior. (2) A new hardening equation, denoted as H_h , is established by constructing a multiplier ζ , which improves the plastic stiffness of the model under low stress. Compared with the existing models, the H-CSUH model has a simpler form and fewer parameters, and achieves a unified description of the hysteretic behavior of clays and sands under cyclic loading. The validity of the model is confirmed through comparisons of drained and undrained test results across various types of clays and sands.

Key words: hysteresis characteristic; cyclic loading; clay; sand; unified model

0 引言

近年来, 随着对绿色清洁能源的大力倡导, 中国对海上风电工程的建设力度也在逐步加大。海上风电基础的受力状态十分复杂, 会同时受到风浪和水流等循环荷载的作用, 循环荷载作用下土体的变形特性对风电设施的安全运维有着重要影响。同时, 海洋土类型复杂, 不同类型土在循环荷载作用下的力学特性也有所差异。因此, 有必要建立合适的本构模型, 对循环荷载作用下不同类型土的应力应变特性进行合理描述, 从而保证相关海洋工程设施的安全服役。

受风浪等环境的影响, 海床土体会受到循环荷载的作用, 作用在土体上的荷载主要存在以下特点: ①波浪荷载的振动频率较低, 其典型频率为 0.05~0.1

Hz^[1]; ②大多数情况下, 土体处于中低应力状态, 应力幅值和应变范围均较小, 循环加载的次数较多; ③受复杂海洋环境影响, 土体处于三维应力状态。动荷载作用下, 需同时考虑率效应和循环效应的影响, 由于波浪荷载的振动频率较低, 循环效应对土体应力应变特性的影响较大。因此, 考虑循环效应对低应力、小应变且三维应力状态下土体变形的影响, 是建立考虑循环加载作用下海洋土本构模型的关键。

对于土体在循环加载作用下的本构研究, 各国学者提出了不同的本构模型, 以合理描述土体在循环加

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(52238007); 国家自然科学基金项目(51979001)

收稿日期: 2024-12-12

载下的应力应变特性。Dafalias 等^[2-3]提出了能够反映应力历史对当前土体模量和强度影响的边界面模型，该模型同样适用于对循环加载路径的模拟；在边界塑性理论框架内，张建民等^[4]通过引入可逆剪胀与不可逆剪胀以及循环应力应变向性的概念，建立了一个能够反映循环排水条件下粗粒土体应变累积特点的本构模型；Askarinejad 等^[5]在边界本构框架内，通过引入时间因素，建立了一个黏塑性模型，该模型能够预测砂土在不排水试验下的液化特性；万征等^[6]基于 UH 模型，采用旋转硬化法则来描述循环加载下的应变滞回效应以及塑性累积效应，提出了一个复杂加载条件下的砂土本构模型；Huang 等^[7]在各向同性的硬化准则中引入了以等效塑性变形为变量的弱化规律，采用非线性运动硬化准则来描述土体的循环滞回特性；Gao 等^[8-9]基于各向异性临界状态理论，采用由一个反映砂土微观组构张量的参量来修正硬化参数和状态参量，提出了一个适用于砂土的各向异性弹塑性模型；李潇旋等^[10-11]通过引入新的硬化准则，并将旋转硬化法则与经典 BBM 模型相结合，提出了一个可以综合考虑非饱和特性、循环加载以及各向异性的双面模型。

单调加载本构模型是建立考虑循环加载本构模型的基础。Yao 等^[12]基于剑桥模型建立了 UH 模型，并进一步建立了能够统一描述黏土和砂土压硬性、摩擦性和剪胀性的 CSUH 模型，实现了对黏土和砂土应力应变关系的合理准确预测。为实现循环加载作用下，对低应力、小应变和三维应力状态范围内土体变形的精准计算，本文以 CSUH 模型为基本框架，通过引入反映初始卸载模量的参数 κ_0 和反映模量变化速率的参数 w ，对 CSUH 模型卸载线进行了修正，使其能够描述卸载线非线性的特性。同时，通过引入乘数 ζ 对再加载线的塑性刚度进行修正，进一步增大了低应力下的塑性刚度，建立了一个简单的能够描述循环荷载下滞回特性的 H-CSUH 模型。最后，采用变换应力的三维化方法实现了模型的三维化。该模型形式简单、参数较少，且能够用同一套参数描述黏土和砂土在循环荷载下的应力应变关系。采用不同黏土和砂土的循环加载试验结果验证了模型的合理性和有效性。

1 CSUH 模型

统一硬化（UH）模型^[13-14]在修正剑桥模型的基础上，通过建立新的硬化方程，实现了对超固结黏土硬化剪缩和软化剪胀等特性的合理准确描述。UH 模型已被扩展至考虑各种复杂因素的影响，例如考虑温度影响^[15]，考虑蠕变特性^[16]和考虑非饱和影响^[17]等。Yao 等^[12]和姚仰平等^[18]以 UH 模型为基础进一步建立了黏

土砂土统一硬化（CSUH）模型，该模型通过构建统一的 NCL 方程、屈服函数和剪胀方程，实现了对黏土和砂土应力应变关系的统一描述，为建立考虑各种复杂特性的统一本构模型提供了基本框架。

1.1 压硬性及其描述

为合理描述砂土 NCL 在 e - $\ln p$ 空间中为曲线的特性，通过引入破碎应力 p_s ，并假定与 CSL 在平均正应力为 0 时相交的等向压缩线为 NCL，由此建立的黏土和砂土统一的 NCL 方程为

$$e = Z - \lambda \ln \frac{p + p_s}{1 + p_s} \quad (1)$$

式中： e 为孔隙比； Z 为 NCL 上平均正应力 p 为 1 kPa 时所对应的孔隙比，决定了 NCL 的位置； λ 为 NCL 在 e - $\ln(p + p_s)$ 空间内的斜率。破碎应力 p_s 为

$$p_s = \exp\left(\frac{N-Z}{\lambda}\right) - 1 \quad (2)$$

式中： N 为 RNCL 在平均正应力 p 为 1 时对应的孔隙比。RNCL 为 UH 模型的 NCL，当 p 趋于无穷时， $\ln(p + p_s)$ 近似等于 $\ln p$ ，所以砂土 NCL 的渐近线同样为 RNCL。图 1 为 e - $\ln p$ 和 e - $\ln(p + p_s)$ 空间中的 NCL、CSL 和 RNCL，当 $Z=N$ 时， $p_s=0$ ，式(1)退化为 UH 模型 NCL 的表达式，说明式(1)既能够描述黏土的直线型 NCL，也能够描述砂土的曲线型 NCL，因此式(1)为黏土和砂土统一的 NCL 方程。

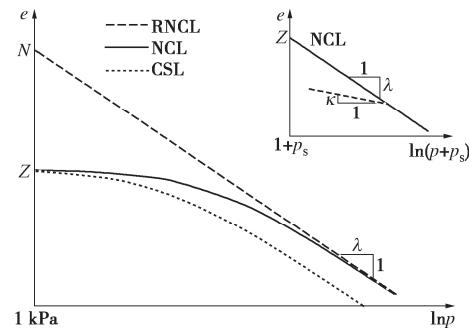


图 1 e - $\ln p$ 和 e - $\ln(p + p_s)$ 空间中的 NCL、CSL 和 RNCL

Fig. 1 NCL, CSL and RNCL in e - $\ln p$ space and e - $\ln(p + p_s)$ space

1.2 剪切屈服特性及其描述

为描述不同砂土的 NCL 和 CSL 之间距离不同的特性，通过引入临界状态参数 χ ，将 UH 模型的椭圆屈服面修正为水滴型屈服面，从而使计算得到的 CSL 更加准确。CSUH 的水滴型屈服面如图 2 所示，屈服面表达式为

$$f = \frac{(1+\chi)\eta^2}{M^2 - \chi\eta^2} + 1 - \frac{p_x}{p} = 0 \quad (3)$$

式中： p_x 为屈服面与 p 轴的交点； η 为应力比， $\eta=q/p$ ； q 为广义剪应力； χ 为临界状态参数，用于修正 NCL 和 CSL 之间的距离，取值 0~1，

$$\chi = 1 - \frac{2p}{(p + p_s) \exp\left(\frac{\Delta \bar{e}_p}{\lambda - \kappa}\right) - p_s} \quad . \quad (4)$$

式中: $\Delta \bar{e}_p$ 为 e -ln p 空间中任意 p 所对应的 NCL 和 CSL 之间的距离, 即图 3 中的距离 BD 。因此, 通过改变临界状态参数 χ 的取值, 可以合理描述不同砂土 NCL 和 CSL 之间距离不同的特性。当 $\chi=0$ 时, 式(3)退回到 UH 模型的屈服面方程。

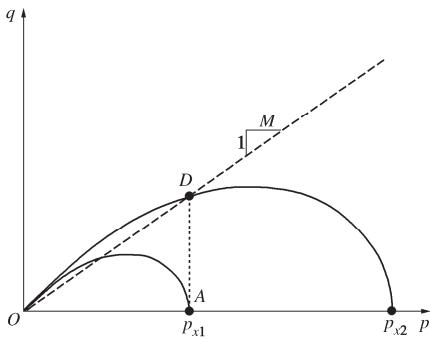


图 2 CSUH 模型屈服面
Fig. 2 Yield surface of CSUH model

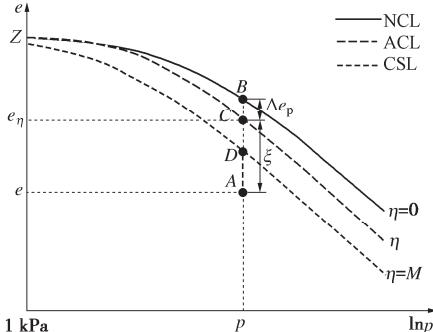


图 3 e -ln p 空间中的 NCL、ACL 和 CSL
Fig. 3 NCL, ACL and CSL in e -ln p space

CSUH 模型在一般应力状态下的屈服面方程为

$$f = \ln \left\{ \left[\frac{(1+\chi)\eta^2}{M^2 - \chi\eta^2} + 1 \right] p + p_s \right\} - \ln(p_0 + p_s) - \frac{1}{c_p} H = 0 \quad . \quad (5)$$

式中: $c_p = (\lambda - \kappa)/(1 + e_0)$, κ 为回弹线在 e -ln($p + p_s$) 空间内的斜率; e_0 为平均正应力为 p_0 时对应的孔隙比; H 为硬化方程, 采用和 UH 模型相同的形式, 表达式为

$$H = \int \frac{M_Y^4 - \eta^4}{M_c^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^p \quad . \quad (6)$$

式中: $d\varepsilon_v^p$ 为塑性体应变增量; M_c 为特征状态应力比; M_Y 为潜在破坏应力比,

$$M_Y = 6 \left[\sqrt{\frac{k}{R}} \left(1 + \frac{k}{R} \right) - \frac{k}{R} \right] \quad . \quad (7)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{M^2}{12(3-M)}, \\ R &= \exp\left(-\frac{\xi}{\lambda - \kappa}\right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: R 为超固结参量, 反映了土的超固结程度; ξ 为状态参量, 定义为 ACL (等应力比压缩线) 上的孔隙比 e_η 与当前应力状态点的孔隙比 e 之差 (图 3):

$$\xi = e_\eta - e \quad . \quad (9)$$

e_η 的表达式为

$$e_\eta = Z - \lambda \ln \left(\frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) - \Delta e_p \quad . \quad (10)$$

式中: Δe_p 为 NCL 和 ACL 之间的距离 (图 3), 可由屈服面表达式计算得到:

$$\Delta e_p = (\lambda - \kappa) \ln \left[\frac{\left(\frac{M^2 + \eta^2}{M^2 - \chi\eta^2} \right) p + p_s}{p + p_s} \right] \quad . \quad (11)$$

1.3 剪胀性及其描述

参考 Li 等^[19]提出的特征状态应力比表达式, 构建了基于状态参量 ξ 的特征状态应力比 M_c ,

$$M_c = M \cdot \exp(-m \cdot \xi) \quad . \quad (12)$$

式中: m 为剪胀性参数。CSUH 模型的塑性势面数仍采用椭圆的型式, 只是将特征状态应力比 M 替换为 M_c 。由于塑性势面形状与屈服面不一致, 故 CSUH 模型采用了非相关联流动法则, 塑性势函数表达式为

$$g = \ln \frac{p}{p_y} + \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{M_c^2} \right) = 0 \quad . \quad (13)$$

式中: p_y 为塑性势面与 p 轴的交点。相应的剪胀方程为

$$\frac{d\varepsilon_d^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{M_c^2 - \eta^2}{2\eta} \quad . \quad (14)$$

式中: $d\varepsilon_d^p$ 为塑性剪应变增量。当剪胀性参数 $m=0$ 时, 特征状态应力比 $M_c=M$, 式(13)退化为 UH 模型的塑性势函数表达式。

2 考虑滞回特性的 CSUH 模型

2.1 CSUH 模型的卸载-再加载特性

CSUH 模型可以合理描述各类型土的剪缩硬化和剪胀软化特性。然而, CSUH 模型在描述循环荷载作用下土的滞回特性时仍存在一定的缺陷。图 4 为 CSUH 模型对等向压缩和三轴剪切卸载-再加载路径的预测结果, 其中图 4(a) 为 e -ln($p + p_s$) 空间中 CSUH 模型对等向压缩卸载-再加载路径的预测曲线, 在 A 点进行弹性卸载, 卸载线为一条斜率为 κ 的直线, 在 B 点进行弹塑性加载, 再加载曲线位于卸载线之下,

无法反映卸载—再加载路径下土的滞回特性。图 4(b)为 CSUH 模型对三轴剪切卸载—再加载路径的预测曲线, 在 E 点开始卸载, 当剪应力 $q=0$ 时再加载, 可以看出再加载曲线的塑性刚度较小, 卸载—再加载过程产生的塑性应变 $\Delta\epsilon$ 过大。

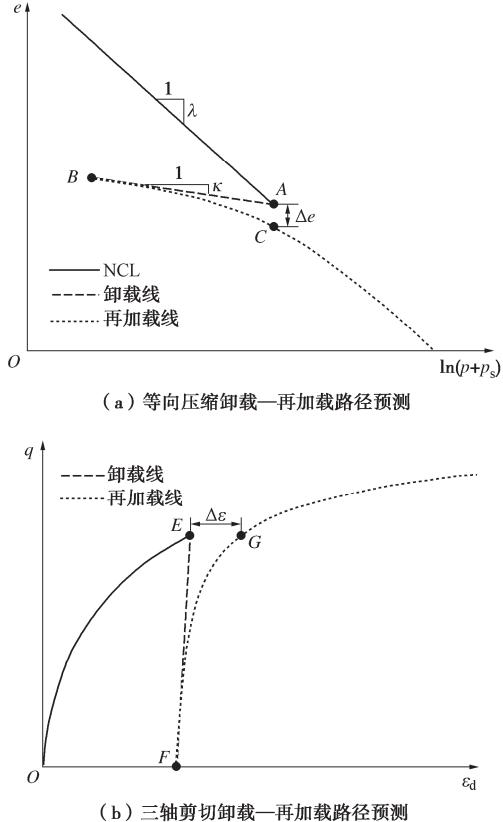


图 4 CSUH 模型卸载—再加载线

Fig. 4 Unloading-reloading lines of CSUH model

2.2 滞回特性的描述

为了使 CSUH 模型能够描述土体在循环荷载作用下的滞回特性, 在 CSUH 模型框架下进行如下两点扩展: ①构造弹性滞回圈, 对模型卸载线进行修正, 将 $e-\ln(p+p_s)$ 空间中卸载线的弹性响应修改为非线性, 并满足完全弹性滞回; ②进一步提高模型再加载曲线在低应力下的塑性刚度。

(1) 构造弹性滞回圈

为描述卸载线的非线性特征, 定义等效体应变 ϵ_v^* 和等效剪应变 ϵ_d^* :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v^* &= \left| \epsilon_v - \epsilon_v^{\text{rev}} \right|, \\ \epsilon_d^* &= \sqrt{\left(\frac{2}{3} \right) (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^{\text{rev}}) (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^{\text{rev}})} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中: ϵ_v 为体应变; ϵ_v^{rev} 为荷载反转点处的体应变; ϵ_{ij} 为偏应变张量; $\epsilon_{ij}^{\text{rev}}$ 为荷载反转点处的偏应变张量。

根据 ϵ_v^* 和 ϵ_d^* 可得到等效应变 ϵ^* 的表达式

$$\epsilon^* = \sqrt{(\epsilon_v^*)^2 + (\epsilon_d^*)^2} \quad (16)$$

定义弹性参量 κ_s 为等效应变的函数

$$\kappa_s = \kappa_0(1+\delta) \quad (17)$$

式中:

$$\delta = \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} - 1 \right) \tanh(w\epsilon^*) \quad (18)$$

式中: κ_0 为卸荷曲线的初始斜率, 可根据初始弹性体积模量得到; w 为模型参数, 反映了弹性参量 κ_s 从 κ_0 到 κ 的变化速率, 可通过拟合等向压缩试验的卸载线得到; $\tanh(x) = (e^{2x}-1)/(e^{2x}+1)$ 。将 CSUH 模型中的弹性参数 κ 替换为弹性参量 κ_s , 即可实现对弹性滞回圈的描述。图 5 为 κ , κ_s 计算的卸载线和弹性再加载线, 可以看出在 $e-\ln(p+p_s)$ 空间中, 根据 κ 计算得到的卸载线和弹性再加载线均为斜率为 κ 的直线, 无法反映滞回特性。根据 κ_s 计算得到的卸载线和弹性再加载线则表现出明显的非线性特性, 斜率变化范围均为 (κ_0, κ) 。为说明弹性参量 κ_s 的合理性, 采用 κ_s 计算了复杂路径下的弹性变形 (路径 $A-B-C-B-D-B-A$), 计算结果如图 5 所示。根据图 5 可以看出, 在任意一点进行加载或卸载, 弹性参量 κ_s 总是介于 κ_0 和 κ 之间, 复杂路径下的加载或卸载均表现出弹性和滞回行为, 说明采用弹性参量 κ_s 可以合理反映等向压缩状态下的加卸载特性。

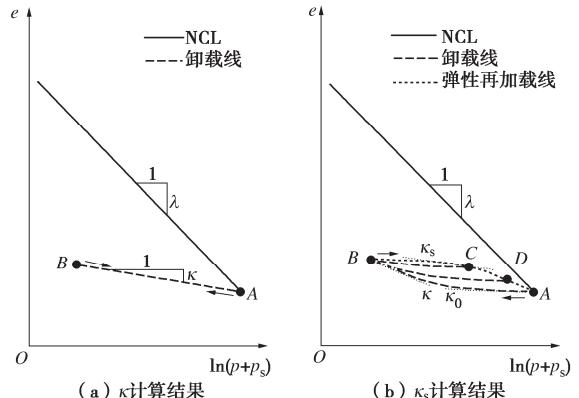


图 5 κ 和 κ_s 计算的卸载线和弹性再加载线

Fig. 5 Unloading line and elastic reloading line calculated based on κ and κ_s

(2) 提高低应力塑性刚度

为了进一步提高模型在低应力下的塑性刚度, 使模型可以更好地反映滞回特性, 在 CSUH 模型硬化方程 H 的基础上, 提出了新的硬化方程 H_h :

$$H_h = \int \zeta \frac{M_Y^4 - \eta^4}{M_c^4 - \eta^4} d\epsilon_v^p \quad (19)$$

式中:

$$\zeta = \frac{1}{R^{(M_Y - \eta)}} \quad (20)$$

与CSUH模型的硬化方程 H 相比,新提出的硬化方程 H_h 多了一个乘数 ζ ,该乘数与超固结比 R 有关,用来调节再加载曲线的塑性刚度,具体特性将在下一节展开讨论。将CSUH模型中的弹性参数 κ 替换为弹性参量 κ_s ,同时将硬化方程 H 替换为 H_h ,即可实现对滞回特性的描述。采用新模型对三轴压缩卸载—再加载路径进行预测,计算结果如图6所示,通过对比图4(b)可以看出,新提出的模型不仅可以反映土体在循环荷载下的滞回特性,而且卸载—再加载过程产生的塑性应变 $\Delta\epsilon$ 较改进前明显变小。

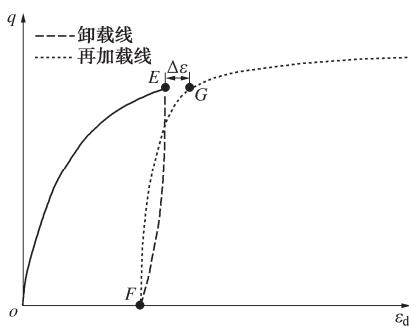


图6 新模型三轴压缩卸载—再加载路径预测结果

Fig. 6 Predicted results of unloading-reloading path of new model under triaxial compression

2.3 本构关系

(1) 模型公式

将CSUH模型中的弹性参数 κ 替换为弹性参量 κ_s ,并将原本的硬化方程 H 替换为新的硬化方程 H_h ,得到的屈服函数为

$$f = \ln \left\{ \left[\frac{(1+\chi)\eta^2}{M^2 - \chi\eta^2} + 1 \right] p + p_s \right\} - \ln(p_0 + p_s) - \frac{1}{c_p} H_h = 0. \quad (21)$$

式中: $c_p = (\lambda - \kappa_s)/(1 + e_0)$ 。

由于新模型的弹性响应为非线性,故CSUH模型用来计算超固结比 R 的方法已不再适用。因此提出了新的超固结比计算公式

$$R = \exp \left(-\frac{\xi}{\lambda} \right). \quad (22)$$

式中:状态参量 ξ 的计算方法与CSUH一致,即式(9)。塑性势面方程与CSUH一致,即式(13)。

(2) 弹性应力应变关系

根据胡克定律,弹性刚度矩阵可表示为

$$\begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 3G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_v^e \\ d\epsilon_d^e \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

式中: K 和 G 分别为弹性体积模量和弹性剪切模量,表达式为

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{E}{3(1-2\nu)}, \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中: ν 为泊松比; E 为弹性模量,

$$E = \frac{3(1-2\nu)(1+e_0)}{\kappa_s} (p + p_s). \quad (25)$$

(3) 弹塑性应力应变关系

考虑滞回特性的CSUH模型在 $p-q$ 空间中的应力应变关系为

$$\begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot A_1 & 3KG \cdot A_2 \\ 3KG \cdot A_3 & 3G \cdot A_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_v \\ d\epsilon_d \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{B_1 + B_2}{B_1 + B_2 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}, \\ A_2 &= \frac{-2c_p M^2 \eta (1 + \chi) (M_c^4 - \eta^4)}{B_1 + B_2 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}, \\ A_3 &= \frac{-2c_p \eta (M_c^2 + \eta^2) B_3}{B_1 + B_2 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}, \\ A_4 &= \frac{B_1 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}{B_1 + B_2 + Kc_p(M_c^4 - \eta^4)B_3}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= p\zeta(M_y^4 - \eta^4)(M^2 - \chi\eta^2) \cdot \\ &\quad [M^2 + \eta^2 + (M^2 - \chi\eta^2)p_s/p], \\ B_2 &= 12Gc_p M^2 \eta^2 (1 + \chi) (M_c^2 + \eta^2), \\ B_3 &= M^4 - (1 - 3\chi) M^2 \eta^2 - \chi\eta^4. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(4) 加卸载准则

在循环荷载作用下,采用加卸载准则来区分卸载和软化状态。卸载时屈服面位置不发生变化,土体表现为弹性变形,而软化时屈服面收缩,土体表现为弹塑性变形。加卸载准则可以表示为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^e d\epsilon_{kl} \begin{cases} > 0 & \text{(加载)} \\ = 0 & \text{(中性变载)} \\ < 0 & \text{(卸载)} \end{cases}. \quad (29)$$

式中: C_{ijkl}^e 为弹性刚度矩阵。

2.4 模型三维化

上述在 $p-q$ 空间建立的H-CSUH模型默认采用了广义Mises准则,不能考虑应力洛德角变化对屈服和强度特性的影响。为实现本构模型与三维强度准则的合理结合,本文采用Yao等^[20-22],姚仰平等^[23]提出的变换应力的三维化方法,通过构建变换应力空间,将土的各向异性力学特性转换为用各向同性方法进行描述,建立的真实应力空间中的应力 σ_{ij} 和变换应力空间

中的应力 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 的映射关系为

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{p} = p, \\ \tilde{q} = q_c, \\ \tilde{\theta} = \theta. \end{array} \right\} \quad (30)$$

式中: \tilde{p} , \tilde{q} , $\tilde{\theta}$ 分别为变换应力空间中的平均正应力、广义剪应力和应力洛德角; q_c 为三轴压缩路径的强度, 其大小取决选取的强度准则。当采用 SMP 强度准则时, q_c 的表达式为

$$q_c = \frac{2I_1}{3\sqrt{(I_1 I_2 - I_3)/(I_1 I_2 - 9I_3)} - 1}. \quad (31)$$

式中: I_1 , I_2 , I_3 分别为第一、第二和第三应力不变量。变换应力和真实应力的关系为

$$\tilde{\sigma}_i = \begin{cases} p + \frac{q_c}{q}(\sigma_i - p) & (q \neq 0) \\ \sigma_i & (q = 0) \end{cases}. \quad (32)$$

将本构模型中的真实应力替换为变换应力即可简单地实现本构模型的三维化。采用该方法将本构模型三维化的屈服线如图 7 所示, 可以看出真实应力空间的屈服线形状与 SMP 准则一致, 可以准确反映土的三维屈服和强度特性。

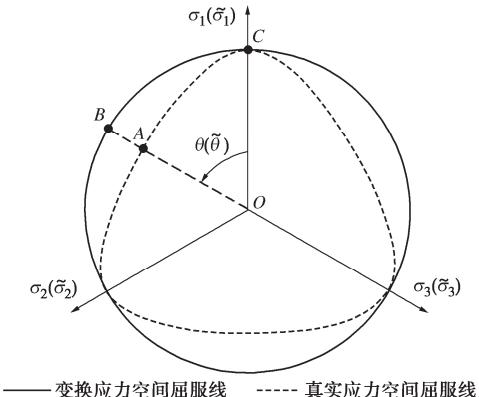


图 7 变换应力空间和真实应力空间屈服线

Fig. 7 Yield lines in transformed stress space and true stress space

3 模型分析

3.1 滞回参数 κ_0 , w 及其演化规律

根据双曲正切函数 $\tanh(x)$ 的有界性和式 (17) 可知, 弹性参量 κ_s 的变化范围为 (κ_0, κ) , 变化快慢由参数 w 控制。图 8 为不同 w 取值时的 κ_s 变化规律, 可以看出随着 w 的增大, κ_s 趋近 κ 的速度变快。当 $\kappa_0=\kappa$, 且 $w=0$ 时, 弹性参量 κ_s 恒等于 κ , 此时卸载线为一条直线, 即 CSUH 的回弹线。需要注意的是, 因为弹性参量 κ_s 的最大值为 κ , 所以 $e-\ln(p+p_s)$ 空间中的非线性卸载线总是在斜率为 κ 的回弹线之下。因此, 在计算 κ_s 时, 可适当增大式 (18) 中 κ 的取值, 以使预测结果更加准确。

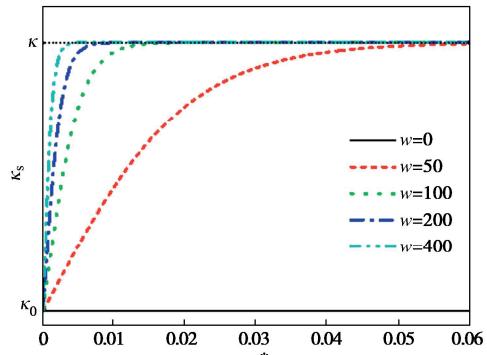


图 8 不同 w 时弹性参量 κ_s 演化规律

Fig. 8 Evolution laws of elastic parameter κ_s at different values of w

3.2 乘数 ζ 及其演化规律

乘数 ζ 随着土的超固结状态以及硬化软化阶段的变化而变化。对于正常固结土, 乘数 ζ 恒等于 1, 此时考虑滞回特性的硬化参数 H_h 退化为 CSUH 的硬化参数 H 。对于超固结土, 乘数 ζ 的变化规律如图 9 所示, 当处于硬化阶段时, $\eta < M_Y$, 由式 (20) 可知, 超固结比 $R < 1$, ζ 远大于 1, 且随着进一步加载 ζ 逐渐趋近于 1, 此时再加载曲线的刚度较大; 当 $\eta=M_Y$ 时, $\zeta=1$, 此时处于硬化和软化的分界处, 硬化方程 H_h 退化为 CSUH 的硬化方程; 当处于软化阶段时, η 略大于 M_Y , 而 ζ 约等于 1, 意味着乘数 ζ 对软化阶段的刚度几乎没有影响; 随着进一步加载, $\eta=M_Y=M$, $\zeta=1$, 此时意味着土体达到了临界状态。

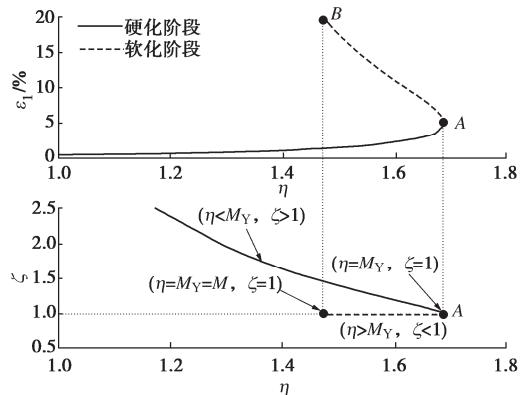


图 9 乘数 ζ 及其演化规律

Fig. 9 Multiplier ζ and its evolution law

4 模型验证

4.1 黏土预测结果

H-CSUH 模型共有 10 个模型参数, 与 CSUH 模型相比新增了两个参数 κ_0 和 w , 在对黏土和砂土应力应变关系统一描述的基础上实现了对滞回特性的描述。本节对不同黏土的循环加载路径试验进行预测, 所用模型参数如表 1 所示。

表 1 黏土的模型参数

Table 1 Model parameters of clay

参数	Boston Blue clay	Fujinomori clay
M	1.11	1.36
λ	0.252	0.09
κ	0.02	0.02
v	0.25	0.3
N	2.57	1.26
Z	2.57	1.26
χ	0.05	0.05
m	5	5
κ_0	0.005	0.001
w	100	400

(1) 等向压缩路径预测结果

图 10 为 CSUH 模型和 H-CSUH 模型对 Boston Blue clay 等向压缩试验^[24]加载—卸载—再加载路径的预测结果。可以看出 CSUH 模型的卸载线呈线弹性，且再加载线的前期也基本为线弹性；H-CSUH 模型卸载线和再加载线均为非线性，能够准确描述卸载—再加载曲线的滞回特性。

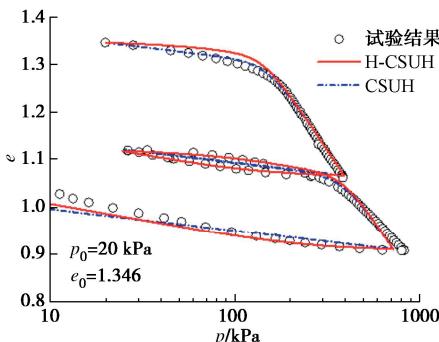
图 10 Boston Blue clay 等向压缩路径试验^[24]和预测结果

Fig. 10 Test and predicted results of Boston Blue clay under isotropic compression path

(2) 三轴剪切路径预测结果

采用 Fujinomori clay 三轴循环加载试验结果^[25]对模型进行验证，包括等 σ_3 循环加载试验和等 p 循环加载试验。其中图 11 为等 σ_3 循环加载路径，图 12, 13 分别为等 p 等幅循环加载路径和等 p 不等幅循环加载路径。从图中可以看出 H-CSUH 模型能够合理预测不同循环加载路径下黏土的应力应变规律。根据图 12, 13 还可以看出，由于应用了变换应力方法，预测结果在三轴伸长的情况下的强度明显小于三轴压缩。

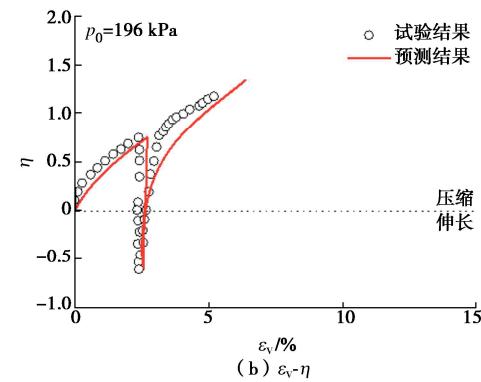
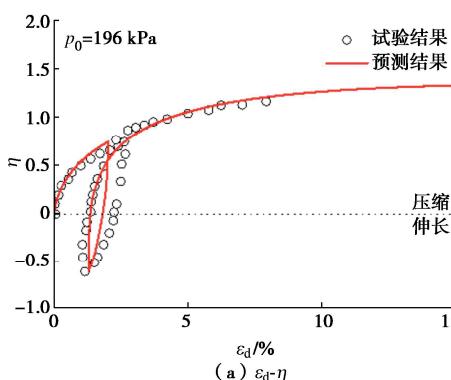
图 11 Fujinomori clay 等 σ_3 循环路径试验^[25]和预测结果

Fig. 11 Test and predicted results of Fujinomori clay under constant σ_3 cyclic path

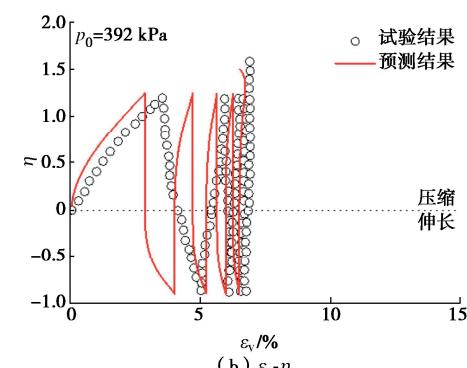
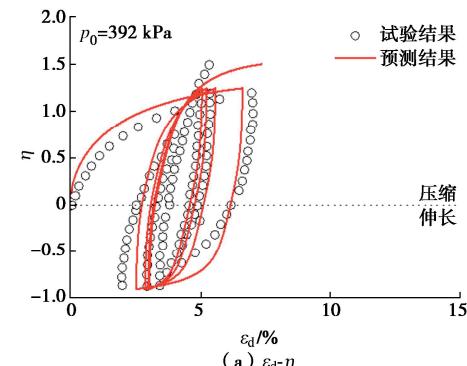
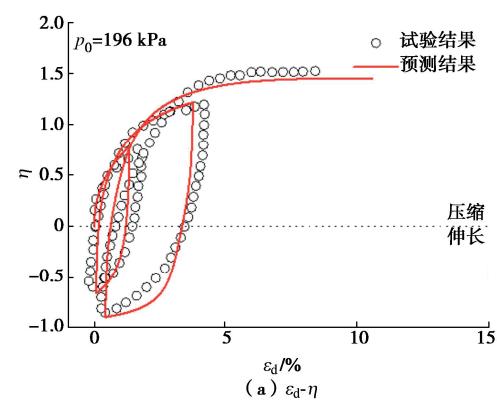
图 12 Fujinomori clay 等 p 循环试验^[25]和预测结果 (等幅)

Fig. 12 Test and predicted results of Fujinomori clay under constant p cyclic path (constant amplitude)



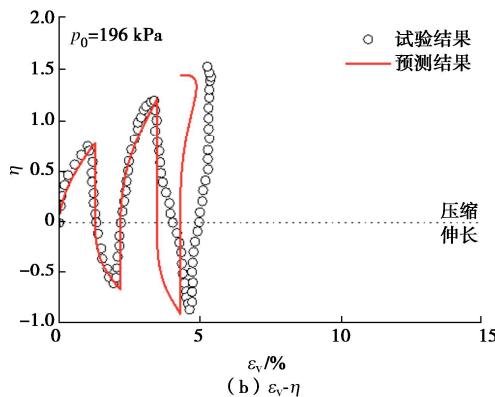


图 13 Fujinomori clay 等 p 循环试验^[25]和预测结果(不等幅)

Fig. 13 Test and predicted results of Fujinomori clay under constant p cyclic path (unconstant amplitude)

4.2 砂土预测结果

本节应用 H-CSUH 模型对砂土排水和不排水试验结果进行了预测, 所用砂土的模型参数如表 2 所示。

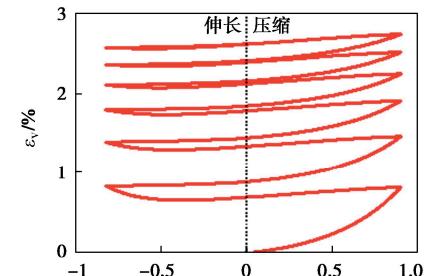
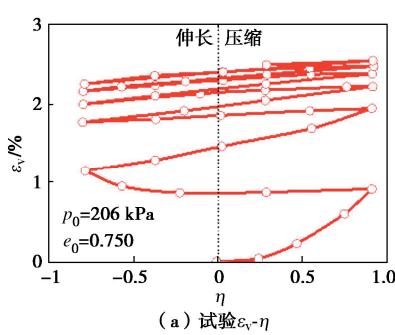
表 2 砂土的模型参数

Table 2 Model parameters of sand

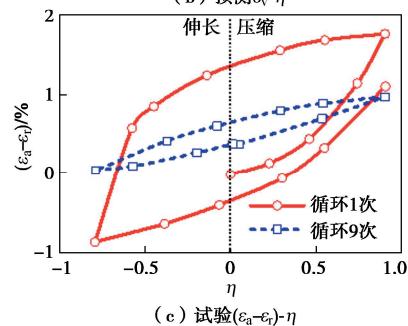
参数	Fuji river sand	Karlsruhe fine sand
M	1.49	1.45
λ	0.146	0.125
κ	0.04	0.006
v	0.3	0.3
N	1.76	1.8
Z	0.82	1.06
χ	0.5	0.35
m	3.9	2
κ_0	0.005	0.002
w	200	400

(1) 排水试验预测结果

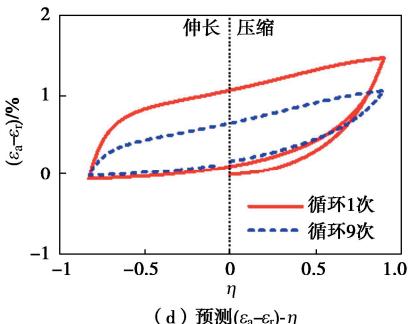
采用 Fuji river sand 三轴循环加载试验结果^[26]对模型进行验证, 试验结果和模型预测结果的对比如图 14, 15 所示, 其中图 14 为等幅循环加载路径, 图 15 为不等幅循环加载路径, 图中 ε_a 为轴向应变, ε_r 为径向应变。可以看出对于等幅循环加载, H-CSUH 模型能够反映砂土在拉压循环中逐渐硬化的特性; 对于不等幅循环加载, 试验和预测结果整体呈现相同的变化趋势, 且在最后一个循环中均表现出了一定程度的剪胀。总体而言, H-CSUH 模型基本能够反映砂土在排水条件下循环加载路径的应力应变规律。



(b) 预测 ε_v - η



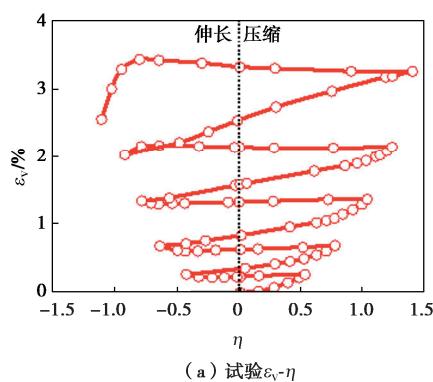
(c) 试验 $(\varepsilon_a - \varepsilon_r)$ - η



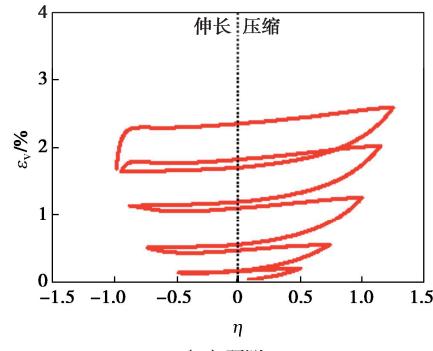
(d) 预测 $(\varepsilon_a - \varepsilon_r)$ - η

图 14 Fuji river sand 等幅循环加载试验^[26]和预测结果

Fig. 14 Test and predicted results of Fuji river sand under constant amplitude cyclic loading path



(a) 试验 ε_v - η



(b) 预测 ε_v - η

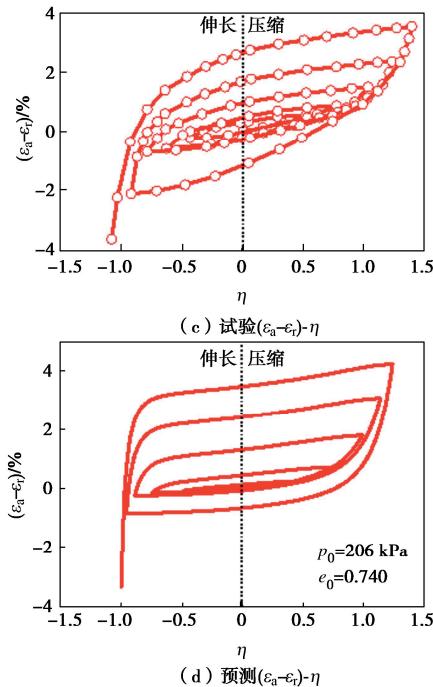


图 15 Fuji river sand 不等幅循环加载试验^[26]和预测结果
Fig. 15 Test and predicted results of Fuji river sand under unconstant amplitude cyclic loading

(2) 不排水试验预测结果

采用 Karlsruhe fine sand 不排水循环加载试验结果^[27]对模型进行验证。对 Karlsruhe fine sand 在松散状态 ($e_0=0.963$) 和密实状态 ($e_0=0.816$) 下的循环加载应力应变规律进行预测, 其中松散状态下的加载应力幅值为 25 kPa, 密实状态下的加载应力幅值为 90 kPa。试验结果和预测结果如图 16 所示, 从图中可以看出在不排水循环加载初期, 模型预测结果和试验结果能够基本保持一致, H-CSUH 模型能够较好地反映出有效应力随循环加载次数的增加而减小的规律, 模型预测的循环次数与试验结果基本一致。新建立模型在反映砂土液化方面有待进一步发展, 故图中只给出了完全液化之前的预测结果。

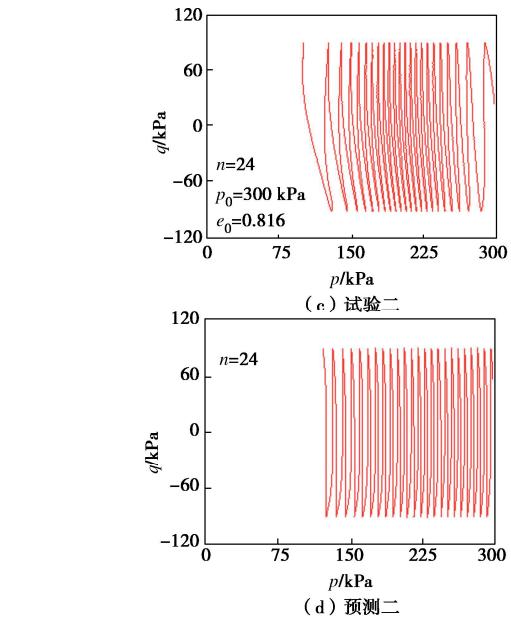
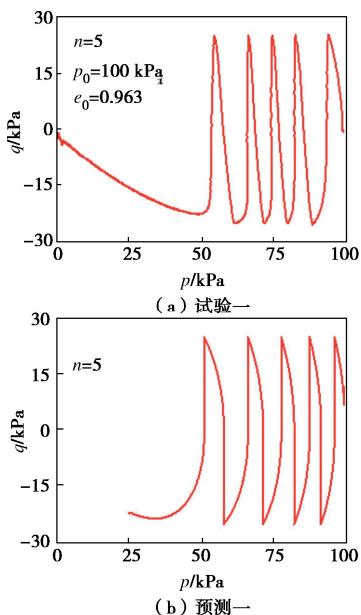


图 16 Karlsruhe fine sand 不排水循环加载试验^[27]和预测结果
Fig. 16 Test and predicted results of Karlsruhe fine sand under undrained cyclic loading

5 结 论

以 CSUH 模型为基本框架, 通过构造弹性滞回圈和提高低应力塑性刚度, 对 CSUH 模型进行扩展, 提出了一个简单实用、参数较少且能够同时反映黏土和砂土滞回特性的本构模型。

(1) 修正了 CSUH 模型在等向压缩状态下回弹曲线的斜率。通过增加两个参数 κ_0 和 w , 使模型在 $e-\ln(p+p_s)$ 空间中的卸载线呈现非线性的特性, 且弹性卸载线和再加载线满足完全弹性滞回。

(2) 修正了超固结状态下模型的塑性刚度。通过增加乘数 ζ , 增大了模型在超固结状态的塑性刚度, 从而使模型能够考虑循环荷载下土的滞回特性。

(3) 模型能够准确预测黏土在循环荷载作用下的应力应变关系, 且能够合理描述砂土在循环荷载作用下的应力应变规律。对于砂土不排水循环试验, 模型能够准确预测液化前的不排水循环次数。

参考文献:

- RANDOLPH M, GOURVENEC S. Offshore Geotechnical Engineering[M]. London: Taylor & Francis Group, 2011.
- DAFALIAS Y F, POPOV E P. Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region[J]. Nuclear Engineering and Design, 1977, 41(2): 293-302.
- DAFALIAS Y F, MANZARI M T. Simple plasticity sand model accounting for fabric change effects[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(6): 622-634.
- 张建民, 罗刚. 考虑可逆与不可逆剪胀的粗粒土动本构

- 模型[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(2): 178-184. (ZHANG Jianmin, LUO Gang. A new cyclic constitutive model for granular soil considering reversible and irreversible dilatancy[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(2): 178-184. (in Chinese))
- [5] ASKARINEJAD F, HALABIAN A M, HASHEM ALHOSSEINI S H. New viscoplastic bounding surface subloading model for time-dependent behavior of sands[J]. International Journal of Geomechanics, 2021, 21(4): 04021034.
- [6] 万 征, 孟 达. 复杂加载条件下的砂土本构模型[J]. 力学学报, 2018, 50(4): 929-948. (WAN Zheng, MENG Da. A constitutive model for sand under complex loading conditions[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(4): 929-948. (in Chinese))
- [7] HUANG M S, LIU Y. Axial capacity degradation of single piles in soft clay under cyclic loading[J]. Soils and Foundations, 2015, 55(2): 315-328.
- [8] GAO Z W, ZHAO J D, LI X S, et al. A critical state sand plasticity model accounting for fabric evolution[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2014, 38(4): 370-390.
- [9] GAO Z W, ZHAO J D. Constitutive modeling of anisotropic sand behavior in monotonic and cyclic loading[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2015, 141(8): 04015017.
- [10] 李潇旋, 李 涛, 李 舰, 等. 循环荷载下非饱和土的各向异性弹塑性双面模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(增刊2): 3758-3766. (LI Xiaoxuan, LI Tao, LI Jian, et al. Anisotropic elastoplastic two-surface model for unsaturated soils under cyclic loading[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, 38(S2): 3758-3766. (in Chinese))
- [11] 李潇旋, 李 涛, 李 舰. 超固结非饱和土的弹塑性双面模型[J]. 水利学报, 2020, 51(10): 1278-1288. (LI Xiaoxuan, LI Tao, LI Jian. Elastoplastic two-surface model for overconsolidated unsaturated soils[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2020, 51(10): 1278-1288. (in Chinese))
- [12] YAO Y P, LIU L, LUO T, et al. Unified hardening (UH) model for clays and sands[J]. Computers and Geotechnics, 2019, 110: 326-343.
- [13] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, 59(5): 451-469.
- [14] YAO Y P, GAO Z W, ZHAO J D, et al. Modified UH model: constitutive modeling of overconsolidated clays based on a parabolic haversine envelope[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, 138(7): 860-868.
- [15] YAO Y P, ZHOU A N. Non-isothermal unified hardening model: a thermo-elasto-plastic model for clays[J]. Géotechnique, 2013, 63(15): 1328-1345.
- [16] YAO Y P, KONG L M, ZHOU A N, et al. Time-dependent unified hardening model: three-dimensional elastoviscoplastic constitutive model for clays[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2015, 141(6): 04014162.
- [17] YAO Y P, NIU L, CUI W J. Unified hardening (UH) model for overconsolidated unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2014, 51(7): 810-821.
- [18] 姚仰平, 刘 林, 罗 汀. 砂土的UH模型[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(12): 2147-2153. (YAO Yangping, LIU Lin, LUO Ting. UH model for sands[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(12): 2147-2153. (in Chinese))
- [19] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, 50(4): 449-460.
- [20] YAO Y P, SUN D A. Application of Lade's Criterion to Cam-clay model[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(1): 112-119.
- [21] YAO Y P, ZHOU A N, LU D C. Extended transformed stress space for geomaterials and its application[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(10): 1115-1123.
- [22] YAO Y P, WANG N D. Transformed stress method for generalizing soil constitutive models[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2014, 140(3): 614-629.
- [23] 姚仰平, 唐科松. 土的各向同性化变换应力方法[J]. 力学学报, 2022, 54(6): 1651-1659, I0003. (YAO Yangping, TANG Kesong. Isotropically transformed stress method for the anisotropy of soils[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(6): 1651-1659, I0003. (in Chinese))
- [24] GHANTOUS I B. Prediction of in Situ Consolidation Parameters of Boston Blue Clay [D]. London: University of London, 1982.
- [25] NAKAI T, HINOKIO M. A simple elastoplastic model for normally and overconsolidated soils with unified material parameters[J]. Soils and Foundations, 2004, 44(2): 53-70.
- [26] TATSUOKA F, ISHIHARA K. Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction[J]. Soils and Foundations, 1974, 14(3): 51-65.
- [27] WICHTMANN T, TRIANTAFYLLOIDIS T. An experimental database for the development, calibration and verification of constitutive models for sand with focus to cyclic loading: part I—tests with monotonic loading and stress cycles[J]. Acta Geotechnica, 2016, 11(4): 739-761.