

DOI: 10.11779/CJGE20240181

南海珊瑚泥一维压缩分数阶元件模型研究

沈 扬¹, 翁 禾¹, 马 可²

(1. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 重庆大学溧阳智慧城市研究院, 江苏 溧阳 213332)

摘 要: 南海珊瑚泥广泛分布于中国南海海域, 研究珊瑚泥的沉降变形规律对南海的开发有着重要意义。南海珊瑚泥的一维压缩具有典型的软土变形特征, 同时由于其特殊的性质, 其变形速度与常见软土相比较快, 适合进行变形模型的研究。针对软土的一维压缩变形常使用元件模型进行模拟, 但由于元件模型中反映长期变形的元件参数为定值, 并不能准确反映延时塑性变形。应用分数阶理论的 Abel 黏壶比牛顿黏壶能更反应土体延时塑性变形特征, 故引入 Burgers 模型进行修正, 得到分数阶修正 Burgers 模型。对近似天然条件下的珊瑚泥进行每一级历时 8~14 d 的一维固结压缩试验, 使用前 11 h 的读数分别对 Merchant 模型, Burgers 模型和分数阶修正 Burgers 模型进行自拟合, 并使用拟合得到的模型参数对 11 h 后的变形进行预测。对比 3 种模型 11 h 内的自拟合精度和 11 h 后的预测精度, 并对各个模型的参数及各部分变形情况进行分析。研究发现, 分数阶修正 Burgers 模型的自拟合精度为 Merchant 模型的 23~65 倍, 为 Burgers 模型的 6~18 倍; 预测精度为 Merchant 模型的 5~35 倍, 为 Burgers 模型的 262~6213 倍。

关键词: 珊瑚泥; 分数阶模型; Abel 黏壶; Burgers 模型

中图分类号: TU411

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2025)09-1804-08

作者简介: 沈 扬(1980—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事土体静动力学和本构理论的研究工作。E-mail: shenyang1998@163.com。

Fractional order element model for one-dimensional compression of coral mud in the South China Sea

SHEN Yang¹, WENG He¹, MA Ke²

(1. Key Laboratory of Geomechanics and Embankment of Ministry of Education, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Institute for Smart City of Chongqing University in Liyang, Chongqing University, Liyang 213332, China)

Abstract: Coral mud is widely distributed in the South China Sea. Studying its deformation law is of great significance for the development of the South China Sea. One-dimensional compression of coral mud in the South China Sea has the typical deformation characteristics of soft soils. At the same time, due to its special properties, the deformation speed of coral mud is faster than that of common soft soil, therefore coral mud is suitable for the study of deformation model. One-dimensional compression deformation of soft soils is often simulated by element models. However, element parameters reflecting the long-term deformation in the element model are fixed, which cannot accurately reflect the delayed plastic deformation. Abel dashpot applying the fractional order theory can better reflect the delayed plastic deformation characteristics of soils than Newton dashpot. Therefore, Burgers model is introduced to correct the fractional order-modified Burgers model. In this study, one-dimensional consolidation compression tests on the coral mud under approximate natural conditions lasting for 8~14 days per stage are carried out. The first 11 hours of readings are used to self-fit Merchant model, Burgers model and fractional order-modified Burgers model, respectively. The model parameters obtained by fitting are used to predict the deformation after 11 hours. The self-fitting accuracy of the three models within 11 hours and the prediction accuracy after 11 hours are compared, and the parameters of each model and the deformation of each part are analyzed. It is found that the self-fitting accuracy of the fractional order-modified Burgers model is 23~65 times that of Merchant model, and 6~18 times that of Burgers model. The prediction accuracy is 5~35 times of Merchant model and 262~6213 times of Burgers model.

Key words: coral mud; fractional model; Abel dashpot; Burgers model

基金项目: 国家自然科学基金项目(52278343, 51979087) This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 52278343, 51979087).

收稿日期(Received): 2024-02-27

修回日期(Revised): 2024-08-23

接受日期(Accepted): 2024-09-29

网络出版日期(Online): 2024-09-30

0 引 言

珊瑚广泛生长于热带海域, 当珊瑚群体死后, 其骨骼和外壳聚积在一起, 经过漫长的地质作用形成无生命的海洋岩土体。由于不同粒径的土颗粒在海洋中沉降的速度不同, 会在海底形成不同的土层, 可按照粒径将其分为钙质砂层与珊瑚泥层。中国南海地区海底存在着数米厚的珊瑚泥层, 通过对珊瑚泥进行一维固结压缩特性分析, 对南海地区的吹填工程与岛礁建设都有重要的意义^[1]。

珊瑚泥与钙质砂形成原理相同, 均呈现浅黄色, 碳酸钙含量极高, 且表面粗糙破碎。目前针对南海钙质砂的静、动力特性已有大量的研究^[2-3]。而针对南海珊瑚泥开展的研究较少, 实际上珊瑚泥虽有泥的粒径特征, 却有极高的渗透性和诸多近似于钙质砂的性质^[4], 而相较于钙质砂, 珊瑚泥又存在黏聚力和较高的长期变形占比, 故研究珊瑚泥不仅仅具有实际工程意义, 也是泥、沙统一模型研究的纽带。

土体, 尤其是软土的长期变形是岩土工程领域的重要问题之一^[5-6]。在研究土体长期变形时, 一般有两种假设, 即假设 A 与假设 B。假设 A 认为初始固结完成时, 应力应变关系是唯一的, 且这一关系与土层厚度无关, 即固结期间不发生蠕变^[7-8]。假设 B 认为蠕变也发生在固结过程中^[9-10]。实际证明, 假设 A 虽然在计算和应用时更加便捷, 但假设 B 更能反应土体的实际变形情况。基于假设 B, 国内外学者们提出了许多蠕变本构模型。Grawford^[11]对正常固结土进行固结压缩试验, 提出了不同的荷载历时下竖向应变与荷载大小的对数关系; 在此基础上, Bjerrum^[12]使用一组互相平行的直线代替这些不同荷载历时下的 $e\text{-}l\lg p$ 曲线, 并假定各相同距离的等时间线所对应的时间单位是 10 倍进的。等距概念较好地反映了长历时压缩蠕变的特征, 但简单将 $e\text{-}l\lg p$ 关系视为直线, 不能体现恒定竖向应力下长期蠕变的真实情况。Feng 等^[10]基于 HMMD 一维固结压缩实验, 提出了考虑极限状态的非线性蠕变方程, 并考虑了卸荷膨胀情况。除此以外, 亦有很多学者通过元件模型试图推导蠕变的解析解^[13], 如 Maxwell 模型^[14], Merchant 模型^[15]等。然而, 这些模型大多参数恒定, 并不能准确反应土体的特性。

关于分数阶积分的研究历史悠久, 包含分数阶积分的黏弹性本构理论在近几十年发展迅速。分数阶积分的形式非常适合描述材料的黏弹性特征^[16], 故在混凝土徐变, 岩石蠕变^[17]、砂土变形^[18]等领域, 分数阶模型均有较好的应用。如何更便捷地将分数阶理论引入传统本构模型中来, 使之更准确地反应土体的长期

变形特点是这方面研究的重点。Yin 等^[19]将 Abel 元件引入西原模型中, 获得了能反应土体蠕变、应力松弛、加载和卸载的分数阶本构模型。肖华杰等^[20]使用分段模拟来描述瞬时应变和蠕变应变, 分别构建考虑基质吸力的弹性体和分数阶黏滞体, 由此建立可考虑基质吸力的非饱和粉质黏土蠕变本构模型。这些方法都通过分数阶元件来描述土体的延时变形部分。

本文使用分数阶积分与元件模型相结合, 将 Abel 黏壶引入 Burgers 模型中, 得到 5 个参数分数阶修正 Burgers 模型, 并阐明分数阶修正 Burgers 模型不仅能反应珊瑚泥一维变形特性, 在变形预测方面也有较高的精度。

1 试验材料及仪器

1.1 试验土体

本文一维固结压缩试验中所使用的珊瑚泥取自中国南海地区海底, 碳酸钙含量在 97% 以上, 其颗粒级配如图 1 所示, 基本物理力学性质如表 1 所示。颜色呈白色至淡黄色, 颗粒具有棱角发育明显, 颗粒分布不均匀的特点。珊瑚泥的电镜扫描试验 (SEM) 扫描结果如图 2 所示, 其颗粒形态以条状、针状为主。

表 1 珊瑚泥基本物理力学性质指标

Table 1 Basic physical and mechanical properties of coral mud					
相对质量密度	压缩系数/ MPa^{-1}	液限/%	塑限/%	黏粒含量/%	粉粒含量/%
2.77	0.66	33.8	23.0	36.0	64.0

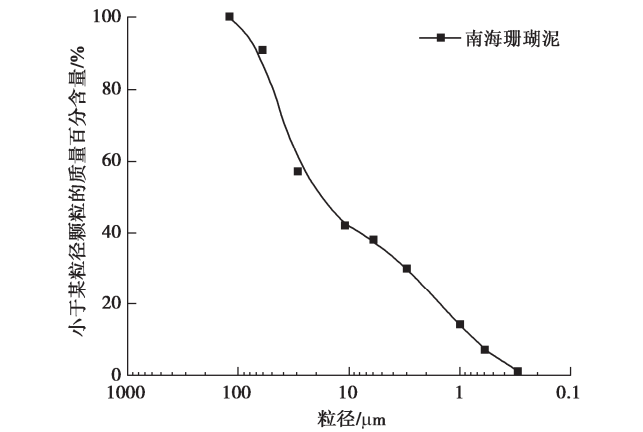


图 1 南海珊瑚泥粒径分布曲线

Fig. 1 Grain-size distribution curve of coral mud

1.2 试验方案

本文对南海珊瑚泥开展了长期一维固结压缩试验。试验采用南京土壤仪器厂有限公司 WG 型单杠杆固结仪, 试样高 20 mm, 直径 61.8 mm。试验过程中保持水槽内水位高度高于试样, 以确保环刀内的试样始终处于饱和状态。试验开始前, 将珊瑚泥烘干、研磨后过筛, 制成初始含水率为 45.36%, 初始孔隙比为

3.15 的土样, 并对同一试样进行加载比为 1 的连续一维固结压缩试验。荷载等级依次为 25, 50, 100, 200, 400, 800, 1600, 3200 kPa。除第一级和最后一级加载时间为 14 d 外, 其余各级加载时间为 8 d, 由于试样的厚度较小, 从而确保试验经历了足够长的时间。

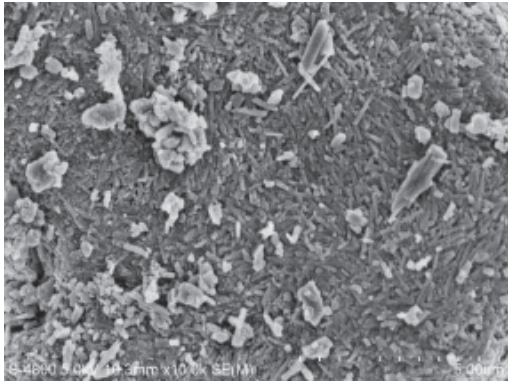


图 2 珊瑚泥电镜扫描结果

Fig. 2 Results of SEM tests for coral mud

1.3 试验结果

南海珊瑚泥在各竖向应力下的时间-应变关系如图 3 所示。

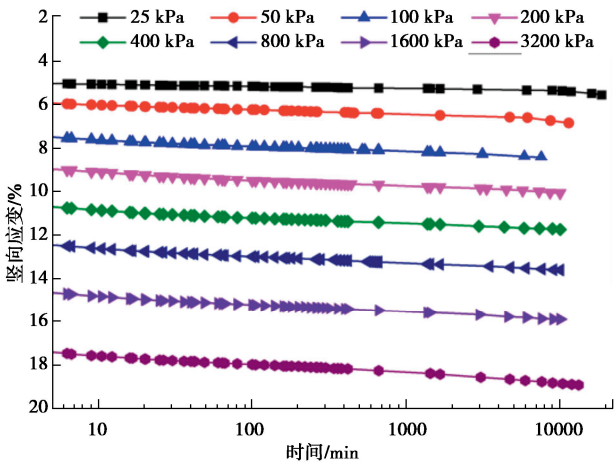


图 3 南海珊瑚泥一维固结压缩试验时间-应变关系

Fig. 3 Relationship between vertical strain and time (log-scale) of coral mud

由图 3 可见, 当加载比为 1 时, 随着加载的竖向应力的增大, 每一级的时间-应变关系曲线相似, 但随着竖向应力的增加, 每一级的总变形量也会增加。

2 试验分析

2.1 压缩系数

土的压缩性是指土体在荷载作用下体积缩小的特性。在侧限条件下, 试样在竖向应力作用下发生的竖向应变即为体应变。当土样在荷载 Δp 作用下发生变形时, 孔隙比的变化 Δe 可与竖向压缩量 S 关系为

$$S = \frac{e_0 - e_1}{1 + e_0} H = - \frac{\Delta e}{1 + e_0} H \quad (1)$$

式中: S 为土样在 Δp 作用下的压缩量 (cm); H 为在初始荷载 p_0 作用下压缩稳定后的厚度; e_0 为加载前的孔隙比; e_1 为竖向荷载增量 Δp 作用下压缩稳定后的孔隙比; Δe 为孔隙比变化值, 即 $e_0 - e_1$ 。

由式 (1) 可得, 在 $p_0 + \Delta p$ 作用下压缩稳定后的孔隙比 e_1 的表达式为

$$e_1 = e_0 - \frac{S}{H} (1 + e_0) \quad (2)$$

由式 (2) 可知, 只要知道土样在初始条件下 $p_0 = 0$ 时的高度 H_0 和孔隙比 e_0 , 就可以计算出每级荷载 p_i 作用下的孔隙比 e_i , 进而绘制出 $e-p$ 或者 $e-\lg p$ 曲线。

本文中南海珊瑚泥的 $e-\lg p$ 曲线如图 4 所示。

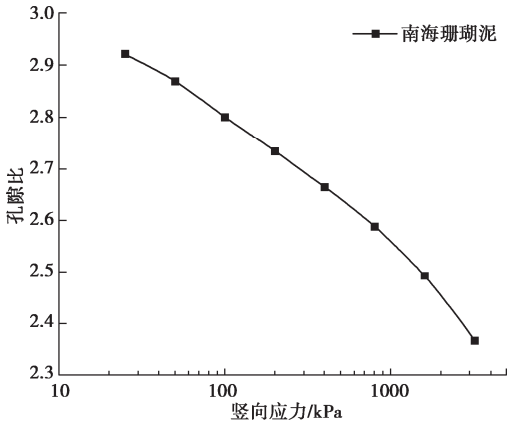


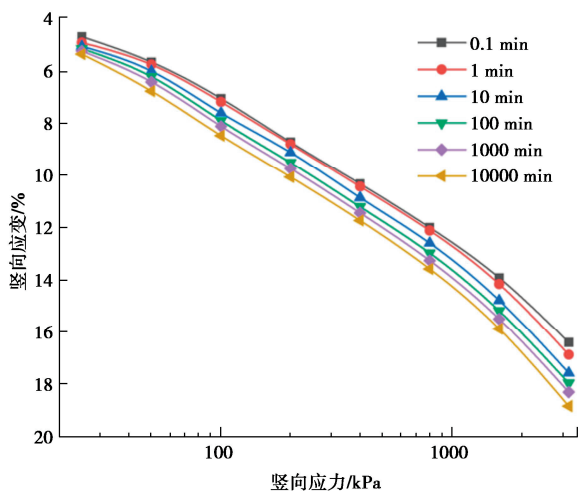
图 4 南海珊瑚泥 $e-\lg p$ 曲线

Fig. 4 $e-\lg p$ curve of coral mud

2.2 等时线

当加载比为 1 时, 南海珊瑚泥各级加载持续时间的 $e-\lg p$ 曲线近似为一组平行直线。不同对数时间周期下的变形量并不相同, 其中 0.1~1 min 的变形量最小, 而 1~10 min 的变形量最大, 后续的变形量则趋于平缓。一般认为^[21], 当荷载加载后的短时间内, 应力由孔隙水承担, 此时变形量较小。随后超静孔隙水压力逐渐转化为土体有效应力, 土体被压密, 此时土体的变形最快。而随着土体的压缩, 其压缩性也会降低, 故而变得更加难以被压缩, 等时 $e-\lg p$ 曲线也变密集。

由图 5 可知, 随着变形的发展, 土体的变形并不是均匀的, 故模型的部分参数不应为定值。为了解决这一问题, 一些研究使用非定值参数描述土体变形, 虽然提高了模型准确度, 但依旧不能准确反映土体变形, 并且使得计算难度大大提升。故这样的修正方法不能从根本解决模型的不足。

图5 不同加载持续时间的 ε -lgp 曲线Fig. 5 ε -lgp curves with different loading durations of coral mud

3 分数阶修正 Burgers 模型

3.1 Merchant 模型与 Burgers 模型

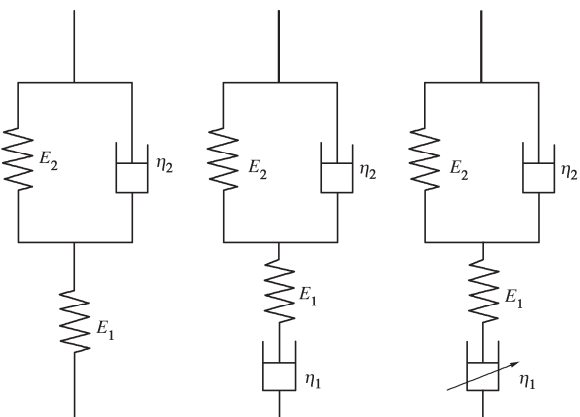
在土体一维固结压缩过程, 根据在变形过程中孔压变化, 可以将变形分为主固结沉降和次固结沉降。在过去的研究中, 一般将时间-应变曲线斜率变化最大点作为主次固结阶段的分界点, 这是一种基于假设 A 的划分方法, 并不准确。而基于假设 B, 从时间尺度又很难将主次固结区分开来, 因此, 需要寻找更合适的变形划分方法。

弹黏塑性模型认为土体的变形可分为瞬时弹性变形, 瞬时塑性变形, 延时弹性变形, 延时塑性变形, 即

$$\varepsilon = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p + \varepsilon_d^e + \varepsilon_d^p \quad (3)$$

式中: ε_i^e 为瞬时弹性变形; ε_i^p 为瞬时塑性变形; ε_d^e 为延时弹性变形; ε_d^p 为延时塑性变形。

为了区分土体的各部分变形, 可使用不同的理想元件体或元件体的串、并联, 模拟土体的各部分变形。通过对元件模型的参数求解, 从而大致估算各部分变形量, 如图 6。



(a) Merchant模型 (b) Burgers模型 (c) 分数阶修正Burgers模型

图6 3种模型示意图

Fig. 6 Schematic diagram of three models

Merchant 模型是最常见的用于描述土体变形的元件模型, 它由一个胡克弹簧和开尔文体串联而成。Merchant 模型认为, 土体在应力全部卸载后, 变形也会完全恢复。

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right) \quad (4)$$

式中: E_1 为瞬时弹性模量; E_2 为延时弹性模量; η_2 为延时黏滞系数。

与三元件的 Merchant 模型相比, Burgers 模型在 Merchant 模型的基础上串联了一个牛顿黏壶。增加的牛顿黏壶 η_1 反应了土体的延时塑性变形。

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta_1} t + \frac{\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta_2}} \right) \quad (5)$$

式中: η_1 为瞬时黏滞系数。

然而根据实际试验发现, 绝大多数土体在完全卸去荷载时, 变形并不能完全恢复, 即 Merchant 模型不能全面地反应土体实际变形特点; Burgers 模型最终土体变形曲率趋向于 η_2 [22], 而实际上土体的最终变形必然趋向于一个稳定值, 故使用牛顿黏壶反应土体的延时塑性变形也并不合理。如何准确、简洁地描述土体的延时塑性变形, 是模型进一步优化的重要思路。

3.2 分数阶修正 Burgers 模型

针对 Merchant 模型和 Burgers 模型的不足, 如果继续增加模型中的元件个数或引入新元件可以一定程度上提高模型精度, 但会增大模型的求解难度。本文以 Burgers 模型为基础, 使用分数阶元件描述延时塑性变形。

本文采用 Riemann-Liouville [23] 积分形式进行计算过程简化, Riemann-Liouville 型分数阶积分定义为

$${}_a D_x^{-\beta} f(x) = D^{-\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau \quad (6)$$

式中: ${}_a D_x^{-\beta}$ 为 Riemann-Liouville 分数阶积分算子; β 为任意实数且 $\beta > 0$; $\Gamma(\beta)$ 为广义 Γ 函数; τ 为积分变量;

$${}_a D_x^{\beta} f(x) = D^{\beta} f(x) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\beta+1-m}} d\tau \right] \quad (7)$$

式中: ${}_a D_x^{\beta}$ 为 Riemann-Liouville 分数阶微分算子, $0 \leq m-1 < \beta \leq m$, $m=1, 2, \dots$ 。

本文使用分数阶元件 Abel 黏壶替代 Burgers 模型中的 Maxwell 体中的黏壶 η_1 , Abel 黏壶的本构关系为

$$\sigma(t) = \eta^r \frac{d^r \varepsilon(t)}{dt^r} \quad (8)$$

式中: σ 为竖向应力; η^r 为 Abel 黏壶的黏滞性系数, $0 \leq r \leq 1$; ε 为竖向应变; t 为时间。

对式 (8) 等号两边进行分数阶积分, 由 Riemann-

Liouville 型分数阶定义, 可得

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta^r} \frac{t^r}{\Gamma(1+r)} \quad (9)$$

$r=1$ 时, $\sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$, $\eta=\xi$ 时, Abel 黏壶退化为

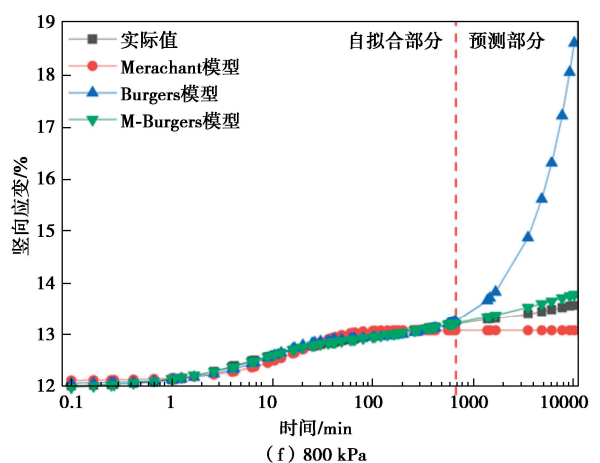
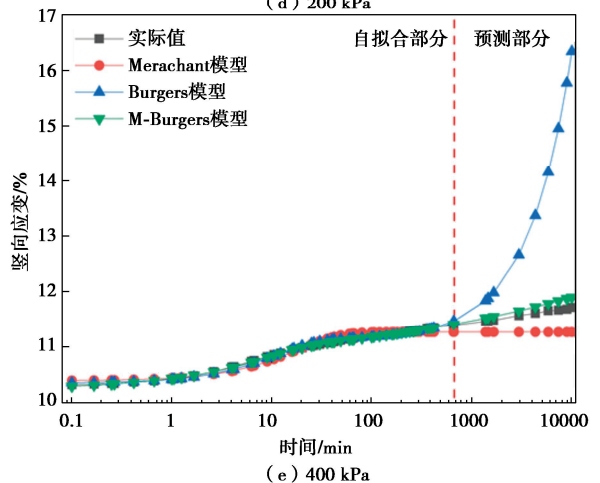
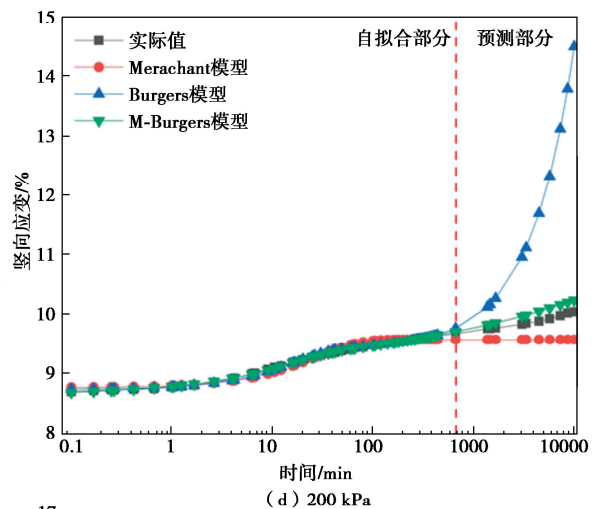
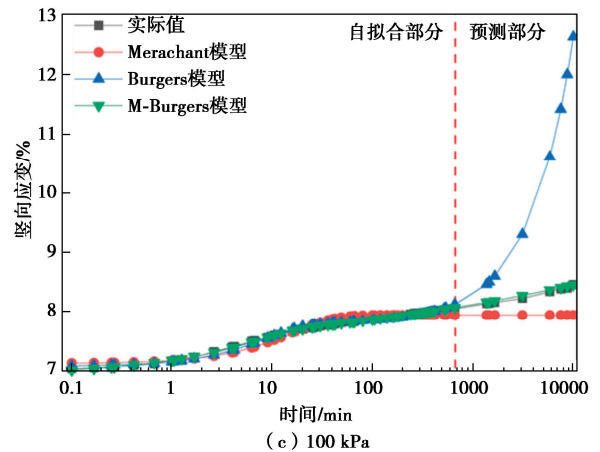
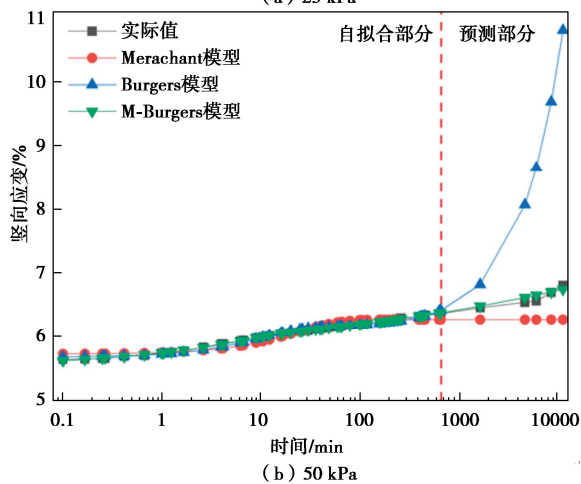
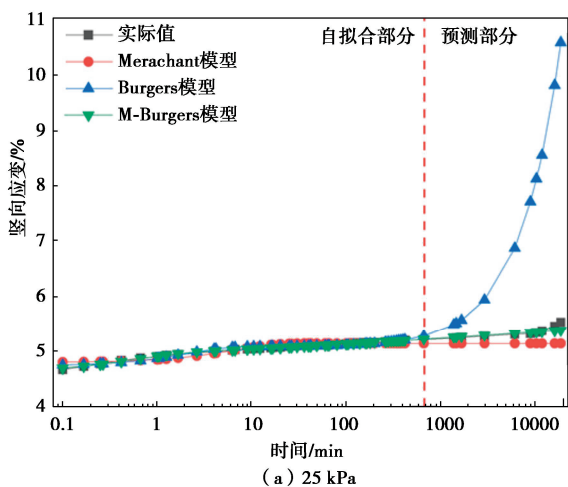
为牛顿黏壶, 此时的修正 Burgers 模型退化为 Burgers 模型。

由元件模型的串、并联规则, 串联时应变相加, 应力相同, 应变相加, 即分数阶导数 Burgers 模型方程为

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{\xi} \frac{t^r}{\Gamma(1+r)} + \frac{\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t} \right) \\ &= \left(\frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{E_2} \right) + \frac{\sigma}{\xi \cdot \Gamma(1+r)} t^r + \left(-\frac{\sigma}{E_2} \right) \cdot e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t} \end{aligned}$$

4 分数阶修正 Burgers 模型在一维固结压缩中的应用

本文对一维固结压缩试验数据的前 11 h 数据进行拟合 (不带 0 点), 可获得 3 种模型的参数。使用前 11 h 的参数对后续变形进行预测, 自拟合与预测结果如图 7 所示。



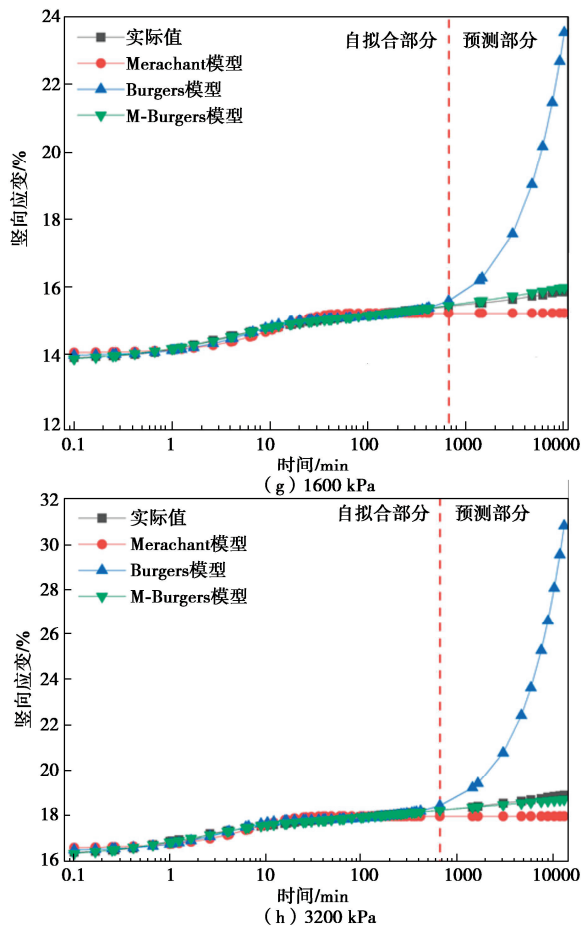


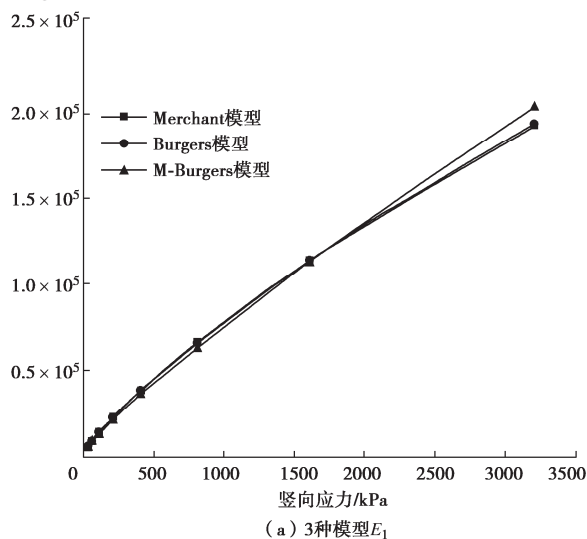
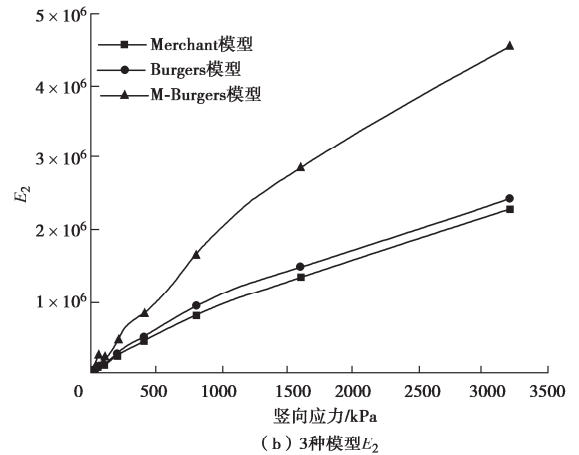
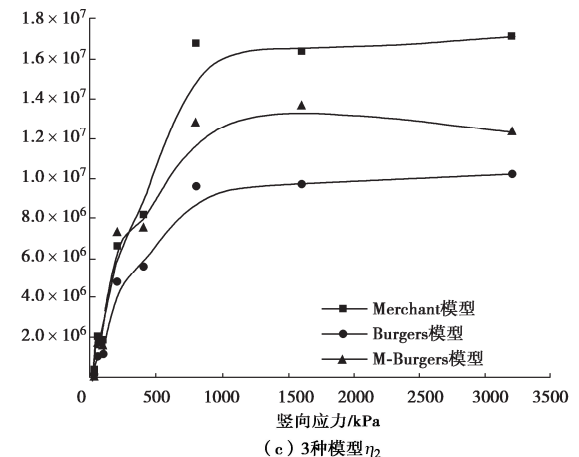
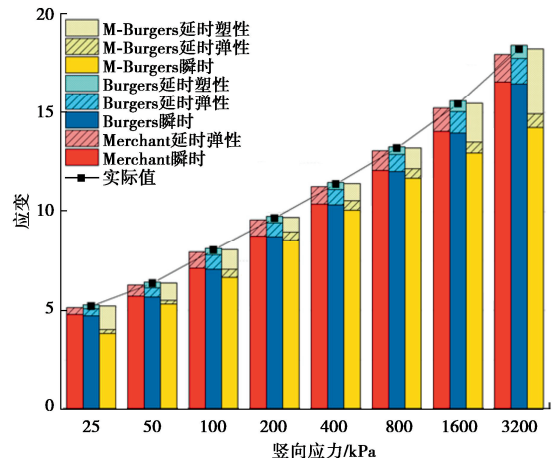
图7 南海珊瑚泥变形预测

Fig. 7 Deformation prediction of coral mud

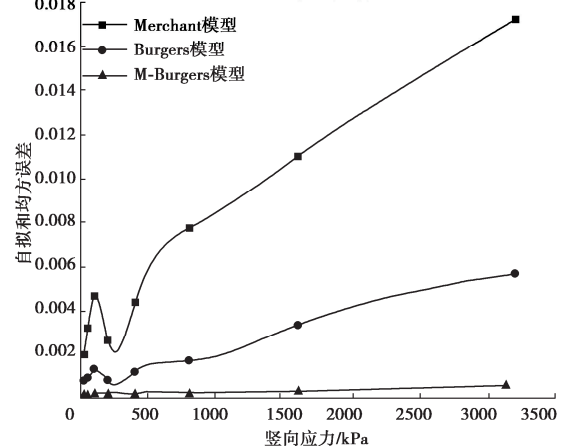
4.1 自拟合

3种模型自拟合的 E_1 , E_2 和 η_2 参数, 各部分变形及精度分析如图8所示。

由于 Merchant 模型只考虑瞬时变形和延时弹性弹性变形, 而 Burgers 模型和分数阶修正 Burgers 模型考虑了瞬时变形、延时弹性变形和延时塑性变形。故而在模型进行对比时, 仅能对比3种模型的瞬时变形和延时弹性变形, 仅能对比 Burgers 模型和分数阶修正 Burgers 模型的延时塑性变形。

(a) 3种模型 E_1 (b) 3种模型 E_2 (c) 3种模型 η_2 

(d) 3种模型各部分变形



(e) 3种模型的自拟合误差

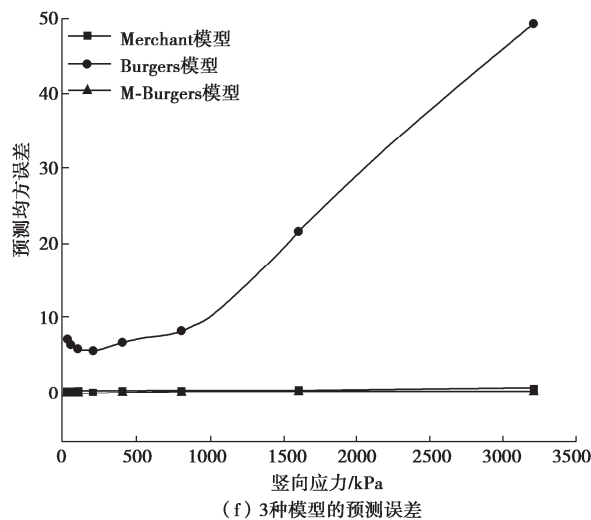


图 8 3 种模型分析

Fig. 8 Analyses of three models

3 种模型的 E_1 均表示瞬时变形模量, 由图 8 可见三者的差别较小; 如图 8 (d) 可见 3 种模型描述的瞬时变形量亦相近。Merchant 模型和 Burgers 模型的 E_2 相近, 分数阶修正 Burgers 模型的 E_2 较大; 延时弹性变形相近, 而分数阶修正 Burgers 模型的延时弹性变形相对较小。

图 8 (e) 反应了 3 种模型的自拟合均方误差, 其中分数阶修正 Burgers 模型的预测精度为 Merchant 模型的 23~65 倍, 为 Burgers 模型的 6~18 倍。

4.2 预测

由图 7 可知, Burgers 模型在预测阶段迅速增大, 模型失稳, 故该模型不适合用于描述珊瑚泥变形预测。Merchant 模型的预测结果略低于实际值, 且趋于直线, 而分数阶修正 Burgers 模型在预测阶段最为精确, 甚至与实际值几近重合。图 8 (f) 反应了 3 种模型的预测均方误差, 其中分数阶修正 Burgers 模型的预测精度为 Merchant 模型的 5~35 倍, 为 Burgers 模型的 262~6213 倍。

结合 3 种模型的自拟合与预测表现可得, 分数阶修正 Burger 无论自拟合和预测都是 3 种模型中精度最高的。

5 结 论

(1) 以南海珊瑚泥为代表的软土变形问题中, 长期变形难以被准确、便捷地描述。可以通过引入分数阶元件 Abel 黏壶描述这一部分变形。可使用 Merchant 模型与 Burgers 模型的参数值作为分数阶修正 Burgers 模型拟合的参数参考值。

(2) 分数阶修正 Burgers 模型的自拟合精度为 Merchant 模型的 23~65 倍, 为 Burgers 模型的 6~

18 倍; 预测精度为 Merchant 模型的 5~35 倍, 为 Burgers 模型的 262~6213 倍。

(3) 分数阶修正 Burgers 模型不仅具有较高的自拟合精度和预测精度, 其模型各部分元件也更准确地反应相应的变形特点。

利益冲突声明/Conflict of Interests: 所有作者声明不存在利益冲突。All authors disclose no relevant conflict of interest.

作者贡献/Authors' Contributions: 沈扬和翁禾设计研究内容, 沈扬提供研究指导, 马可完成计算分析, 沈扬和翁禾参与论文的写作和修改。所有作者均阅读并同意最终稿件的提交。This study was designed by SHEN Yang and WENG He and supervised by SHEN Yang. The numerical analyses were conducted by MA Ke. The manuscript was drafted and revised by SHEN Yang and WENG He. All the authors have read the last version of manuscript and consented for submission.

参考文献:

- [1] 陈信升, 丁选明, 蒋春勇, 等. 吹填珊瑚岛礁钙质软泥的渗透特性试验研究[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2021, 43(4): 58-66. (CHEN Xinsheng, DING Xuanming, JIANG Chunyong, et al. Experimental study on permeability characteristics of hydraulic reclamation calcareous clay in coral reef island[J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2021, 43(4): 58-66. (in Chinese))
- [2] YANG S, SHEN X, LIU H, et al. Gradation affects basic mechanical characteristics of Chinese calcareous sand as airport subgrade of reefs[J]. Marine Georesources & Geotechnology, 2020, 38(6): 706-715.
- [3] SUN Y F, CHEN C. Fractional order creep model for coral sand[J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2019, 23(4): 465-476.
- [4] SHEN Y, RUI X X, YANG L, et al. Influential factors of the static shear properties of coral mud in the South China Sea[J]. Advances in Civil Engineering, 2020, 2020(1): 1-17.
- [5] 李作勤. 黏土固结变形的时间性[J]. 岩土工程学报, 1992, 14(6): 60-68. (LI Zuoqin. Time-dependent deformation of consolidation in clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1992, 14(6): 60-68. (in Chinese))
- [6] SUN Z W, KONG G Q. Effects of head restraints on radial thermal responses of energy pile embedded in cohesive soil[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2024, 150(12): 06024008.
- [7] LADD C, FOOTT R, ISHIHARA K, et al. Stress-deformation and strength characteristics: state of the art report[C]//

- Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokyo, 1977.
- [8] MESRI G, GODLEWSKI P M. Time and stress-compressibility interrelationship[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1977, **103**(5): 417-430.
- [9] YIN J H. Non-linear creep of soils in oedometer tests[J]. Géotechnique, 1999, **49**(5): 699-707.
- [10] FENG W Q, LALIT B, YIN Z Y, et al. Long-term Non-linear creep and swelling behavior of Hong Kong marine deposits in oedometer condition[J]. Computers and Geotechnics, 2017, **84**: 1-15.
- [11] CRAWFORD C B. Interpretation of the consolidation test[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1964, **90**(5): 87-102.
- [12] BJERRUM L. Engineering geology of Norwegian normally-consolidated marine clays as related to settlements of buildings[J]. Géotechnique, 1967, **17**(2): 83-118.
- [13] FEDA J. Creep of Soils and Related Phenomena[M]. Amsterdam: Elsevier, 1992.
- [14] ZHANG Y P, GAO F. Analytical solution of 1-D viscoelastic consolidation of soft soils with fractional maxwell model[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, **157/158**: 419-423.
- [15] YE S J, XUE Y Q, WU J C, et al. Modeling visco-elastic-plastic deformation of soil with modified Merchant model[J]. Environmental Earth Sciences, 2012, **66**(5): 1497-1504.
- [16] 吴 强, 黄建华. 分数阶微积分[M]. 北京: 清华大学出版社, 2016. (WU Qiang, HUANG Jianhua. Fractional Calculus[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2016. (in Chinese))
- [17] 韩 阳, 谭跃虎, 李二兵, 等. 岩石非定常 Burgers 蠕变模型及其参数识别[J]. 工程力学, 2018, **35**(3): 210-217. (HAN Yang, TAN Yuehu, LI Erbing, et al. Non-stationary Burgers creep model of rock and its parameter identification[J]. Engineering Mechanics, 2018, **35**(3): 210-217. (in Chinese))
- [18] 孙逸飞, 沈 扬, 刘汉龙. 粗粒土的分数阶应变率及其与分形维度的关系[J]. 岩土力学, 2018, **39**(增刊 1): 297-302, 317. (SUN Yifei, SHEN Yang, LIU Hanlong. Fractional strain rate and its relation with fractal dimension of granular soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, **39**(S1): 297-302, 317. (in Chinese))
- [19] YIN D S, WU H, CHENG C, et al. Fractional order constitutive model of geomaterials under the condition of triaxial test[C]// Proceedings of ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Washington D C, 2012: 257-265.
- [20] 肖华杰, 胡 鹏, 曾彩云, 等. 非饱和土蠕变力学特性试验及分段模拟[J]. 科学技术与工程, 2020, **20**(22): 9133-9139. (XIAO Huajie, HU Peng, ZENG Caiyun, et al. Experimental and piecewise simulation of creep mechanical properties of unsaturated soils[J]. Science Technology and Engineering, 2020, **20**(22): 9133-9139. (in Chinese))
- [21] 冯志刚, 朱俊高, 刘谢伶, 等. 软土主、次固结变形机理分析及试验研究[J]. 水利与建筑工程学报, 2018, **16**(5): 130-133, 171. (FENG Zhigang, ZHU Jungao, LIU Xieling, et al. Mechanism analysis and test on primary and secondary consolidation deformation of soft soils[J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2018, **16**(5): 130-133, 171. (in Chinese))
- [22] SHEN Y, WENG H, MA K, et al. One-dimensional strain research of coral mud based on a modified Burgers model considering stress history[J]. Journal of Marine Science and Engineering, 2023, **11**(6): 1143.
- [23] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[M]. San Diego, California: Lightning Source Inc, 1998.