

DOI: 10.11779/CJGE20240158

强降雨条件下单层土质覆盖层的入渗解析解及斜坡稳定性分析

李光耀^{1,2}, 刘兆龙¹, 冯嵩^{*3}, 詹良通⁴, 杜修力¹

(1. 北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124; 2. 北京工业大学重庆研究院, 重庆 401151;
3. 福州大学土木工程学院, 福建 福州 350108; 4. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058)

摘要: 近年来中国极端降雨事件频发, 研究强降雨条件下单层土质覆盖层的入渗规律及斜坡稳定性具有重要意义。基于二维非饱和土渗流控制方程, 采用指数函数模型描述土体的土水特征曲线和渗透系数曲线, 针对强降雨过程中表层土体达到饱和状态前后分别采用恒定流量和恒定压力水头作为覆盖层表面边界条件, 推导了强降雨条件下单层土质覆盖层的入渗解析解。通过与有限元软件 Geostudio-Soil/W 的计算结果进行对比, 证明了该解析解的有效性。在解析解的基础上, 根据非饱和土抗剪强度理论, 分析了单层土质覆盖层的斜坡稳定安全系数在强降雨条件下的发展情况, 结果表明潜在滑动面的埋深越大, 覆盖层稳定安全系数对降雨的响应速度越慢。强降雨期间以覆盖层底面作为滑动面的稳定安全系数始终保持最小, 说明覆盖层最易沿着该滑动面发生失稳。得到的解析解为单层土质覆盖层的防渗性能评价及斜坡稳定性分析提供了简单实用的工具。

关键词: 解析解; 强降雨条件; 单层土质覆盖层; 雨水入渗; 斜坡稳定性

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2025)06-1219-10

作者简介: 李光耀(1991—), 男, 博士, 主要从事环境岩土工程方面的教学和研究工作。E-mail: geoguangyao@bjut.edu.cn。

Analytical solution for infiltration into single-layer cover under heavy rainfall events and its application for slope stability analysis

LI Guangyao^{1,2}, LIU Zhaolong¹, FENG Song³, ZHAN Liangtong⁴, DU Xiuli¹

(1. Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering of Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. Chongqing Research Institute, Beijing University of Technology, Chongqing 401151, China; 3. School of Civil Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China; 4. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: In recent years, the extreme rainfall events have occurred frequently in China, and so investigating the infiltration law and slope stability of single-layer soil covers under heavy rainfall events is of great significance. An analytical solution for rainwater infiltration into single-layer soil covers is derived based on the two-dimensional governing equation for unsaturated flows. This analytical solution is obtained by employing the constant flow rate and constant pore water pressure head as the top boundary conditions of the cover before and after the surface soil reaches saturation during a heavy rainfall event. The analytical solution is validated by comparing with the results of the finite element software Geostudio-Soil/W. Based on the analytical solution and the theory of shear strength of unsaturated soils, the variation of the factor of safety of a single-layer soil cover under a heavy rainfall event is analyzed. The results indicate that the greater depth the potential sliding surface, the slower the response of the factor of safety to rainfall. During the whole rainfall period, the factor of safety with the bottom surface of the cover as the sliding surface remains the smallest, indicating that the cover is most prone to sliding along this sliding surface. The analytical solution obtained in this study provides a simple and practical tool for evaluating the anti-seepage performance and stability analysis of single-layer soil covers.

Key words: analytical solution; heavy rainfall condition; single-layer soil cover; rainwater infiltration; slope stability

0 引言

中国固体废弃物(包括工业固废、建筑垃圾、生

基金项目: 国家自然科学基金项目(42107186); 北京市自然科学基金项目(8242001); 重庆市自然科学基金项目(CSTB2023NSCQ-MSX0279)
收稿日期: 2024-02-20

*通信作者(E-mail: sfengaa@connect.ust.hk)

活垃圾等)填埋场数量多、分布广,如若管控不当极易引发地下水土污染、失稳滑坡、有害气体扩散等环境灾害^[1-3]。覆盖层是固废填埋场的封场结构,其主要功能包括控制雨水向固废堆体入渗和实现填埋场地的复绿,因此对填埋场的灾害治理和生态修复至关重要。单层土质覆盖层是一种简单有效的封场覆盖结构,其不采用任何土工合成材料,依靠天然细粒土的储水能力及植被的腾发作用实现防渗目标,具有优越的耐久性和较低的造价,可适用于不同类型的填埋场地^[4-6]。近年来,中国极端降雨事件频发,例如2020年“6·11”重庆暴雨、2021年郑州“7·20”特大暴雨以及2023年北京“7·31”暴雨等。众多事实表明,极端降雨是单层土质覆盖层大规模渗漏及滑移失稳的触发因素^[4, 7],因此研究极端降雨条件下单层土质覆盖层的入渗规律及斜坡稳定性具有重要意义。

解析解作为研究入渗问题的一种重要手段,具有明确的数学形式,属于精确解。相较于数值方法和实验研究,解析方法能提供所研究问题的物理和数学意义,有助于研究人员分析渗流现象的内在机制,是一种经济高效的研究方法^[8]。目前关于土体中降雨入渗解析解的研究主要针对土质边坡或无限地基,侧重考虑不同土性参数^[9]、水文条件(如降雨模式^[10]、初始水分状态^[11])、耦合作用(如水-力耦合^[12-13]、水-气耦合^[14])和土体结构^[15-16]等方面。单层土质覆盖层由于厚度较小(通常为1~2 m)且底部容易发生渗漏,其降雨入渗规律与土质边坡或无限地基存在差异,但是目前针对单层土质覆盖层降雨入渗解析解的研究还不够全面。邱清文等^[11]推导了可以考虑任意初始条件的均质土质覆盖层降雨入渗解析解,并且对比了覆盖层底面分别采用单位梯度边界、渗流审查边界(边界土体饱和之后水分才能透过)和固定孔压边界对降雨入渗和底部渗漏量的影响,结果表明单位梯度边界更适合土质覆盖层的渗漏量计算。在该解析解的基础上,Zhan等^[10]分析了4种不同的降雨模式(均布型、前锋型、中心型和后锋型)对单层土质覆盖层降雨入渗和底部渗漏量的影响。Feng等^[9]通过考虑土体土水特征曲线和渗透系数曲线的高度非线性,推导了单层土质覆盖层的降雨入渗半解析解。值得指出的是,目前已有的解析解/半解析解均假设雨水能够完全渗入覆盖层,即覆盖层表面始终为流量边界(恒定流量或随时间变化的流量),这对于降雨强度小于土体饱和渗透系数的弱降雨条件是适用的。对于降雨强度大于土体饱和渗透系数的强降雨条件,初始时刻降雨强度小于土体入渗能力,覆盖层表面为流量边界,当降雨持续一段时间以后,降雨强度将大于土体入渗能力,此时坡面将出现积水或径流,覆盖层表面由流量边界转化为

水头边界。但是,目前的解析解/半解析解均无法考虑这种情况,因此该问题亟待解决。

本文基于Richards非饱和土渗流控制方程,采用指数函数模型描述土体的土水特征曲线和渗透系数曲线,针对表层土体达到饱和状态前后分别采用恒定流量和恒定压力水头作为覆盖层表面边界条件,推导了强降雨条件下单层土质覆盖层的入渗解析解。采用有限元软件Geostudio-Seep/W对本文解析解的有效性进行了验证。在该解析解的基础上,结合Fredlund等^[17]提出的非饱和土抗剪强度理论,对强降雨条件下单层土质覆盖层的斜坡稳定性进行了分析。

1 强降雨条件下单层土质覆盖层入渗模型

1.1 模型假定

图1为本文使用的二维直角坐标系下倾斜单层土质覆盖层的几何示意图,其中x,z和 x_1, z_1 分别为标准笛卡尔坐标系和垂直于坡面的坐标系, δ 为斜坡坡角。两坐标系之间的关系如下:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x \cos \delta - z \sin \delta \\ z_1 = x \sin \delta + z \cos \delta \end{array} \right\} \quad (1)$$

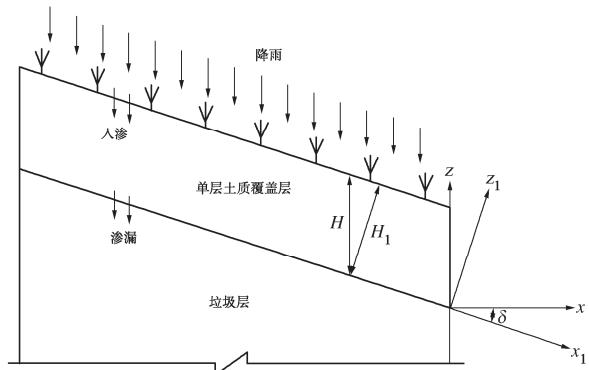


图1 倾斜单层土质覆盖层示意图

Fig. 1 Schematic diagram of an inclined single-layer soil cover

为了便于解析解的推导,采用与邱清文等^[11]和李宁等^[18]相同的假定:

- (1) 降雨过程中雨强保持不变。
- (2) 覆盖层土质均匀,且孔隙率在干湿循环过程中不随时间发生变化。
- (3) 覆盖层斜坡无限长,由于覆盖层的厚度通常远小于长度,该假定是适用的。
- (4) 覆盖层的孔隙水压力等值线平行于斜坡面。
- (5) 覆盖层土体中孔隙气压力与大气相连通,且不影响土体中水分的运移。
- (6) 覆盖层中的温度及其变化不影响土体中的水分的运移。
- (7) 降雨过程中不考虑土体和植被的腾发作用。

1.2 控制方程推导

根据 Richards 方程^[19], 二维非饱和渗流控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} + k \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2)$$

式中: ψ 为土体的孔隙水压力水头; k 为土体的非饱和渗透系数; θ 为土体的体积含水量。将式 (1) 代入式 (2) 可得

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + k \right) + \frac{\partial k}{\partial z_1} \cos \delta - \frac{\partial k}{\partial x_1} \sin \delta = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3)$$

根据假定 (4), 孔隙水压力仅随时间 t 和高程 z_1 改变, 因此二维非饱和土渗流控制方程可以简化为如下一维形式:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z_1} \right) + \frac{\partial k}{\partial z_1} \cos \delta = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (4)$$

本文采用指数函数模型^[20]描述土水特征曲线和渗透系数曲线:

$$\theta = \begin{cases} \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha \psi} & (\psi \leq 0) \\ \theta_s & (\psi > 0) \end{cases}, \quad (5)$$

$$k = \begin{cases} k_s e^{\alpha \psi} & (\psi \leq 0) \\ k_s & (\psi > 0) \end{cases}, \quad (6)$$

式中: θ_r 和 θ_s 分别为土体的残余体积含水量和饱和体积含水量; k_s 为土体的饱和渗透系数; α 为减饱和系数。将式 (5), (6) 代入到式 (4) 中, 可进一步得到控制方程的形式如下

$$\frac{\partial^2 k}{\partial z_1^2} + \alpha \cos \delta \frac{\partial k}{\partial z_1} = \frac{\alpha(\theta_s - \theta_r)}{k_s} \frac{\partial k}{\partial t} \quad (7)$$

1.3 边界条件推导

基于邱清文等^[11]的研究结果, 本文采用单位梯度作为覆盖层底面的边界条件, 其表达式为

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = 0 \quad (8)$$

将式 (6) 代入到式 (8) 中, 底面边界可以转换为

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0} = 0 \quad (9)$$

强降雨条件下覆盖层的表面边界条件取决于土体入渗能力与降雨强度的大小关系, 可分以下两个阶段进行考虑:

(1) 阶段I——土体入渗能力大于降雨强度

强降雨初期土体入渗能力较强, 此时覆盖层斜坡表面承接的降雨量可以全部入渗到土体中。本文仅考虑垂直斜坡面的入渗, 因此表面边界条件为流量边界, 即

$$\left. \left(k \cos \delta + k \frac{\partial \psi}{\partial z_1} \right) \right|_{z_1=H_1} = q \cos \delta \quad (10)$$

式中: q 为降雨强度; H_1 为覆盖层表面的高程。将式 (6) 代入到式 (10) 中, 可以将表面边界条件转换为

$$\left. \left(k \cos \delta + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial k}{\partial z_1} \right) \right|_{z_1=H_1} = q \cos \delta \quad (11)$$

(2) 阶段II——土体入渗能力小于降雨强度

随着雨水的不断入渗, 表层土体的入渗能力逐渐降低, 当表层土体达到饱和时雨水无法全部入渗。假设无法入渗的雨水可以顺坡向流走, 不会在坡面产生积水。因此该阶段的表面边界为零压力水头边界, 即

$$\psi \Big|_{z_1=H_1} = 0 \quad (12)$$

将式 (12) 代入到式 (6) 中, 可以得到

$$\frac{k}{k_s} \Big|_{z_1=H_1} = 1 \quad (13)$$

1.4 初始条件推导

为了全面反映覆盖层含水率的实际分布, 初始时刻的土体体积含水量剖面采用二次函数进行拟合^[11], 即

$$\theta_0 = Az_1^2 + Bz_1 + C \quad (14)$$

式中: θ_0 为土体初始体积含水量; A , B , C 为拟合参数。联合式 (5), (6), 可以将式 (14) 转换为如下的初始非饱和渗透系数分布

$$k_0 = \frac{(Az_1^2 + Bz_1 + C) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} k_s \quad (15)$$

1.5 解析解的求解

为了便于求解, 定义如下的无量纲参数^[10, 11, 18]:

$$\left. \begin{array}{l} k' = k / k_s, \\ q' = q / k_s, \\ z' = \alpha \cos \delta z_1, \\ H' = \alpha \cos \delta H_1, \\ t' = \frac{\alpha \cos^2 \delta k_s t}{\theta_s - \theta_r} \end{array} \right\} \quad (16)$$

(1) 阶段I——土体入渗能力大于降雨强度阶段

将式 (16) 代入到式 (7), (9), (11), (15) 中, 可以得到雨水全部入渗情况下的定解条件:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 k'}{\partial z'^2} + \frac{\partial k'}{\partial z'} = \frac{\partial k'}{\partial t'}, \\ \frac{\partial k'}{\partial z'} + k' = q' \quad (z' = H'), \\ \frac{\partial k'}{\partial z'} = 0 \quad (z' = 0), \\ k' = \frac{\left(\frac{Az'^2}{(\alpha \cos \delta)^2} + \frac{Bz'}{\alpha \cos \delta} + C \right) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (t' = 0). \end{array} \right\} \quad (17)$$

定义如下的关系转换式

$$W(z', t') = k'(z', t') e^{\frac{1}{2}z' + \frac{1}{4}t'} \quad (18)$$

经过式 (18) 转换, 定解条件可以进一步写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} &= \frac{\partial W}{\partial t'}, \\ \frac{\partial W}{\partial z'} + \frac{1}{2}W &= q'e^{\frac{1}{2}H' + \frac{1}{4}t'} \quad (z' = H'), \\ \frac{\partial W}{\partial z'} - \frac{1}{2}W &= 0 \quad (z' = 0), \\ W &= \frac{\left(\frac{Az'^2}{(\alpha \cos \delta)^2} + \frac{Bz'}{\alpha \cos \delta} + C \right) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} e^{\frac{1}{2}z'} \quad (t' = 0). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

对式 (19) 进行傅里叶积分变换, 得到解析解如下所示:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2[\beta_m \cos(\beta_m z') + 0.5 \sin(\beta_m z')]}{[H'(\beta_m^2 + 0.25) + 1](0.25 + \beta_m^2)} \cdot \\ &\quad \left\{ (0.25 + \beta_m^2) e^{-\beta_m^2 t'} F(\beta_m) + q' e^{\frac{1}{2}H'} \cdot \right. \\ &\quad \left. [\beta_m \cos(\beta_m H') + 0.5 \sin(\beta_m H')] \left(e^{\frac{1}{4}t'} - e^{-\beta_m^2 t'} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

式中: 特征值 β_m 为超越方程 $\tan(\beta_m H') = \frac{\beta_m}{\beta_m^2 - 0.25}$ 的正根。 $F(\beta_m)$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned} F(\beta_m) &= (C - \theta_r) \frac{e^{\frac{1}{2}H'} \sin(\beta_m H')}{(\theta_s - \theta_r)} + \\ &\quad B \frac{D(\beta_m)}{\alpha \cos \delta (4\beta_m^2 + 1)(\theta_s - \theta_r)} + \\ &\quad A \frac{E(\beta_m)}{\alpha^2 \cos^2 \delta (4\beta_m^2 + 1)^2 (\theta_s - \theta_r)} \quad (21) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} D(\beta_m) &= H' e^{\frac{1}{2}H'} \sin(\beta_m H') \cos \delta (4\beta_m^2 + 1) - \\ &\quad 4\beta_m - e^{\frac{1}{2}H'} (3 - 4\beta_m^2) \sin(\beta_m H'), \\ E(\beta_m) &= H'^2 e^{\frac{1}{2}H'} \sin(\beta_m H') (4\beta_m^2 + 1)^2 - \\ &\quad 32\beta_m \left[2e^{\frac{1}{2}H'} \cos(\beta_m H') - 1 \right] - \\ &\quad (3 - 4\beta_m^2) e^{\frac{1}{2}H'} \sin(\beta_m H') (4\beta_m^2 + 1). \end{aligned}$$

覆盖层土体的孔隙水压力水头分布可以利用式 (6), (18) 计算:

$$\psi(z', t') = \frac{1}{\alpha} \ln k' = \frac{1}{\alpha} \ln \left(W e^{\frac{-1}{2}z' - \frac{1}{4}t'} \right) \quad (22)$$

将解析解式 (20) 代入式 (22), 可以得到

$$\begin{aligned} \psi(z', t') &= \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ e^{-\frac{z'}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} [D_1(0.25 + \beta_m^2) e^{-(\beta_m^2 + 0.25)t'} F(\beta_m) + \right. \\ &\quad \left. D_2 e^{\frac{1}{2}H'} \left[1 - e^{-(\beta_m^2 + 0.25)t'} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{其中: } D_1 = \frac{2[\beta_m \cos(\beta_m z') + 0.5 \sin(\beta_m z')]}{[H'(\beta_m^2 + 0.25) + 1](0.25 + \beta_m^2)}, \quad D_2 = D_1 q' \times [\beta_m \cos(\beta_m H') + 0.5 \sin(\beta_m H')].$$

(2) 阶段 II——土体入渗能力小于降雨强度阶段

设降雨时间 $t = t_p$ 时, 覆盖层表层土体达到饱和, 根据覆盖层表面压力水头 $\psi(z', t')|_{z'=H'} = 0$ 这一条件, 可以利用式 (23) 求得对应的时间 t_p 和此时覆盖层孔隙水压力水头的剖面分布:

$$\psi(z', t')|_{t'=t_p} = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{z'}{2}} (\beta_m \cos \beta_m z' + 0.5 \sin \beta_m z') E \right]. \quad (24)$$

式中: t_p 为 $\alpha \cos^2 \delta k_s t_p / (\theta_s - \theta_r)$,

$$\begin{aligned} E &= 2 \left\{ (0.25 + \beta_m^2) e^{-(\beta_m^2 + 0.25)t_p} F(\beta_m) + \right. \\ &\quad \left. q' e^{\frac{1}{2}H'} [\beta_m \cos(\beta_m H') + 0.5 \sin(\beta_m H')] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[1 - e^{-(\beta_m^2 + 0.25)t_p} \right] \right\} / \left\{ [H'(\beta_m^2 + 0.25) + 1](0.25 + \beta_m^2) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

当降雨时间 $t > t_p$ 时, 令 $t'' = t' - t_p$ 并代入到式 (17) 第一项的控制方程中, 可以得到

$$\frac{\partial^2 k'}{\partial z'^2} + \frac{\partial k'}{\partial z'} = \frac{\partial k'}{\partial t''} \quad (26)$$

同理, 式 (24) 中的时间变量用 $t'' = t' - t_p$ 进行替换, 可以改写为

$$\psi(z', t'')|_{t''=0} = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{z'}{2}} (\beta_m \cos \beta_m z' + 0.5 \sin \beta_m z') E \right]. \quad (27)$$

式 (27) 即为新时间变量下 (即阶段 II) 的初始条件, 进一步可以转化为

$$k' = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{z'}{2}} (\beta_m \cos \beta_m z' + 0.5 \sin \beta_m z') E. \quad (28)$$

边界条件式 (9), (13) 经过替换时间变量后为

$$\frac{\partial k'}{\partial z'}|_{z'=0} = 0 \quad (29)$$

$$k'|_{z'=H'} = 1 \quad (30)$$

联合式 (26), (28), (29), (30), 可以得到如下定解问题:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 k'}{\partial z'^2} + \frac{\partial k'}{\partial z'} = \frac{\partial k'}{\partial t''}, \\ k' = 1 \quad (z' = H'), \\ \frac{\partial k'}{\partial z'} = 0 \quad (z' = 0), \\ k' = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{z'}{2}} (\beta_m \cos \beta_m z' + 0.5 \sin \beta_m z') E \quad (t'' = 0) \end{array} \right\} \quad (31)$$

经过式(18)转换, 式(31)可以进一步写为

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} = \frac{\partial W}{\partial t''}, \\ W = e^{\frac{H'}{2} + \frac{t''}{4}} \quad (z' = H'), \\ \frac{\partial W}{\partial z'} - \frac{1}{2} W = 0 \quad (z' = 0), \\ W = \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \cos \beta_m z' + 0.5 \sin \beta_m z') E \quad (t'' = 0). \end{array} \right\} \quad (32)$$

通过傅里叶积分变换, 可以得到式(32)的解如下所示:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \beta_n (H' - z')}{H'(\beta_n^2 + 0.25) + 0.5} \left[(\beta_n^2 + 0.25) e^{-\beta_n^2 t''} F(\beta_n) + e^{\frac{H'}{2}} \beta_n (e^{0.25 t''} - e^{-\beta_n^2 t''}) \right]. \quad (33)$$

式中: 特征值 β_n 为超越方程 $\beta_n \cot \beta_n H' = -0.5$ 的正根, $F(\beta_n)$ 为

$$F(\beta_n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-\beta_n \sin \beta_m H' + \beta_m \sin \beta_n H' - 2\beta_m \beta_n \cos \beta_m H' + 2\beta_m \beta_n \cos \beta_n H') / 2(\beta_m^2 - \beta_n^2) E. \quad (34)$$

同理, 可将式(33)转换为孔隙水压力水头分布, 即

$$\psi(z', t'') = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ e^{-\frac{z'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} [D_3(\beta_n^2 + 0.25) e^{-(\beta_n^2 + 0.25)t''} F(\beta_n) + D_4 e^{\frac{H'}{2}} (1 - e^{-(\beta_n^2 + 0.25)t''})] \right\}, \quad (35)$$

$$\text{式中: } D_3 = \frac{2 \sin \beta_n (H' - z')}{H'(\beta_n^2 + 0.25) + 0.5}, \quad D_4 = D_3 \beta_n.$$

(3)强降雨条件下单层土质覆盖层入渗解析解的统一形式

由式(23), (35)可知, 不同阶段的降雨入渗解析解的孔压水头剖面形式是一致的, 只是所对应的特征值和特征方程有所区别。鉴于此, 强降雨条件下单层土质覆盖层孔压水头剖面的解析解可以写成如下统一形式:

$$\psi(z', t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ e^{-\frac{z'}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} [E_i(\beta_i^2 + 0.25) e^{-(\beta_i^2 + 0.25)t} F(\beta_i) + \right.$$

$$\left. E_2 e^{\frac{H'}{2}} (1 - e^{-(\beta_2^2 + 0.25)t})] \right\}. \quad (36)$$

当土体入渗能力大于降雨强度时: $i = m$, $E_1 = D_1$, $E_2 = D_2$, $t = t'$; 当土体入渗能力小于降雨强度时: $i = n$, $E_1 = D_3$, $E_2 = D_4$, $t = t''$ 。

(4) 单层土质覆盖层表面入渗量和底部渗漏量

覆盖层表面水分入渗速率的表达式即为式(10)等号的左侧部分, 通过对对其进行积分, 可以获得覆盖层表面的累积入渗量

$$Q_1 = \int_0^T \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + k \cos \delta \right) dt. \quad (37)$$

式中: 非饱和渗透系数 k 通过将式(36)代入式(6)得到。

覆盖层底面的水分可在重力作用下发生渗漏, 渗漏速率为底面土体含水量对应的非饱和渗透系数, 则底面累积渗漏量可以通过下式得到

$$Q_2 = \int_0^T k_s e^{\alpha \psi} dt. \quad (38)$$

式(37), (38)中: T 为降雨持续的总时间。

2 解析解验证

本文采用有限元数值模拟软件 Geostudio-Soil/W 对上文的解析解进行验证。所建立的覆盖层的垂直厚度为 1.0 m (即图 1 中覆盖层表面高程 $H_1 = 1.0$ m)、水平方向的长度为 30 m、坡度为 1V:3H。覆盖层土体采用文献[21]中干密度为 1.45 g/cm³ 的黄土, 其饱和渗透系数为 $k_s = 1.29 \times 10^{-7}$ m/s, 饱和含水率 $\theta_s = 47.31\%$, 残余体积含水量 $\theta_r = 10.44\%$ 。土水特征曲线使用式(5)进行拟合, 可以得到减饱和系数 $\alpha = 0.05$ m⁻¹。基于饱和渗透系数和减饱和系数, 可由式(6)得到渗透系数曲线。上述得到的土水特征曲线和渗透系数曲线绘制于图 2。覆盖层干土重度 = 14.2 kN/m³, 有效黏聚力 $c' = 5.74$ kPa, 有效内摩擦角 $\phi' = 26.6^\circ$, 基质吸力角 $\phi^b = 14.1^\circ$ 。土体的初始含水率 $\theta_0 = 34.0\%$, 即式(15)中的 $A = 0$, $B = 0$, $C = 0.34$ 。根据《城镇雨水系统规划设计暴雨径流计算标准: DB11/T 969—2016》[22]中北京地区的设计暴雨强度公式, 降雨强度取 2.85×10^{-6} m/s, 降雨历时为 24 h, 总降雨量约为 246 mm。该降雨强度及历时对应的历史重现期为 30 a。将上述参数带入解析法和数值法中进行计算。在解析法计算时, 当表层土体达到饱和时, 表面边界条件由恒定流量边界转换为零水头边界, 并取前 2000 个特征值进行求解; 数值法计算时, 覆盖层上边界设置为恒定流量边界, 当表层土体饱和时水分发生顺坡向流动, 不会在覆盖层表面形成积水。上述覆盖层的几何参数、土性参数及降雨信息汇总在表 1 中。

表 1 解析法和数值法中使用的参数

Table 1 Parameters used in analytical and numerical methods

饱和体积含水量 $\theta_s / \%$	残余体积含水量 $\theta_r / \%$	减饱和系数 α / m^{-1}	饱和渗透系数 $k_s / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	初始体积含水量 $\theta_0 / \%$	降雨强度 $q / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	降雨历时/h
47.13	10.44	0.05	1.29×10^{-7}	34.0	2.85×10^{-6}	24
覆盖层厚度/m	坡度 $\delta / (^\circ)$	干土重度 $\gamma_d / (\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	水重度 $\gamma_w / (\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	有效黏聚力 c' / kPa	有效内摩擦角 $\varphi' / (^\circ)$	基质吸力角 $\varphi^b / (^\circ)$
1.0	$\arctan(1/3)$	14.2	9.81	5.74	26.6	14.1

图 3 展示了利用解析法和数值法得到的覆盖层体积含水量和孔隙水压力水头剖面随时间的变化情况。可以看出, 利用两种方法得到的不同降雨时刻的覆盖层体积含水量和孔隙水压力水头剖面基本一致。在覆盖层表层土体未达到饱和之前(阶段 I), 雨水的入渗导致表层土体的体积含水量和孔隙水压力水头持续增加。在降雨第 3.9 h 时, 表面土体达到饱和。之后体积含水量维持在饱和体积含水量, 孔隙水压力水头稳定在 0 m(阶段 II)。

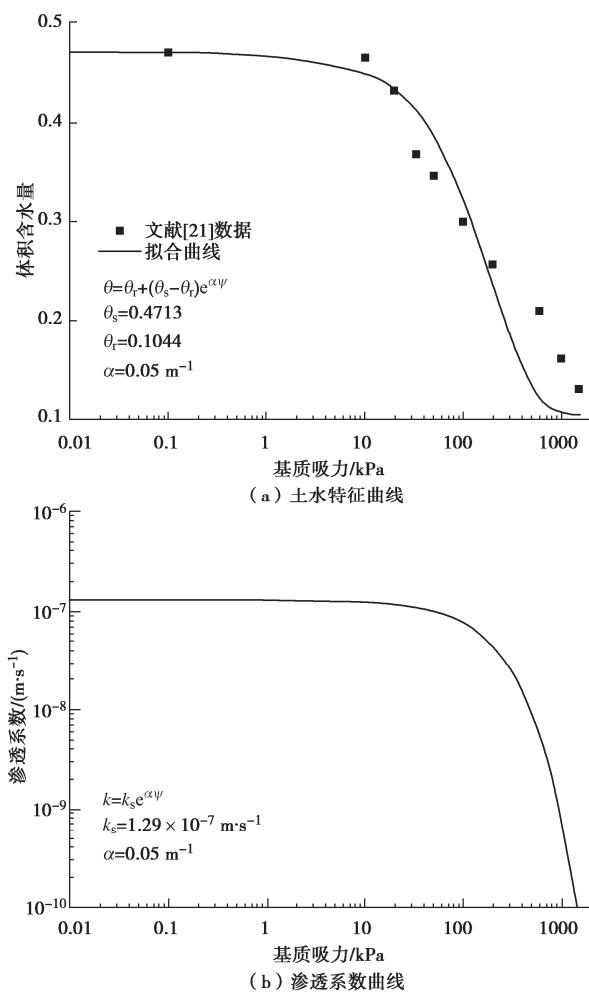


图 2 覆盖层土体的水力特性

Fig. 2 Hydraulic properties of the cover soil

另外, 图 4 给出了本文解析解和文献[11]解析解得到的覆盖层孔隙水压力水头剖面随降雨时间的变化

情况。可以看出, 两种解析解在表面积水前($t \geq 3.9$ h)的计算结果一致。积水之后, 文献[11]解析解由于假设雨水可以全部进入覆盖层, 因此得到的孔隙水压力水头大于本文解析解结果, 这也说明了本文解析解可以更好地处理表面积水之后的入渗情况, 与实际强降雨入渗过程更加吻合。

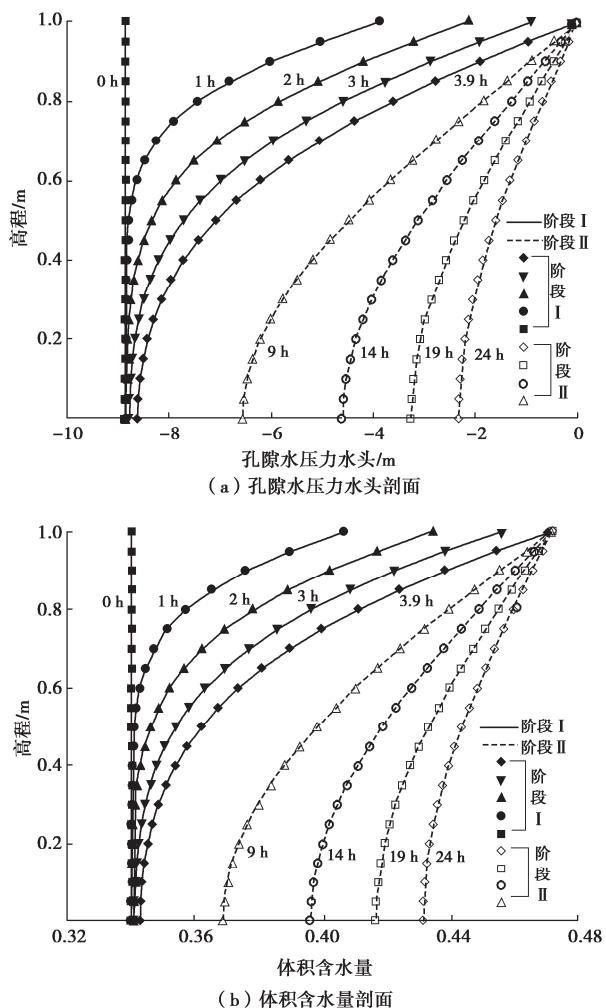


图 3 覆盖层的水力响应(曲线为解析解, 符号为数值解)

Fig. 3 Hydraulic response of the cover (splines represent analytical results and symbols represent numerical results)

图 5 给出了利用解析法和数值法得到的覆盖层表面入渗速率和累积入渗量随时间的变化情况。可以看出, 解析法和数值法得到的结果均吻合较好。在阶段 I 期间, 表面的雨水入渗速率保持恒定; 在阶段 II 期

间, 表面的雨水入渗速率随时间的增加逐渐降低。因此, 累积入渗量在阶段I随时间以恒定速率增长, 在阶段II的增长速率逐渐降低。上述变化规律与前人的试验结果是一致的^[23-25]。

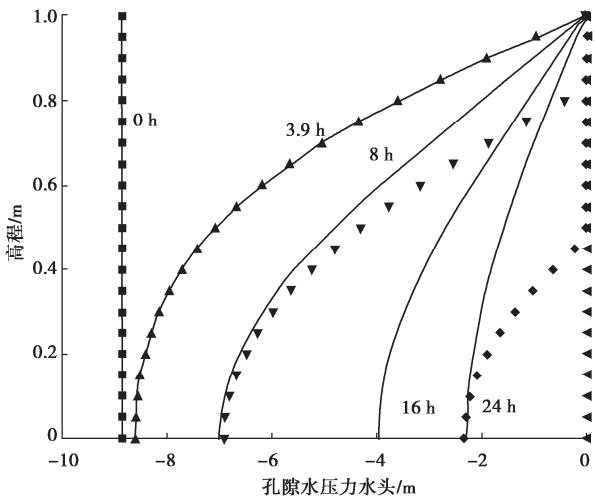


图4 不同解析解下覆盖层孔隙水压力水头剖面随降雨时间的变化(曲线为本文解析解结果, 符号为文献[11]解析解结果)

Fig. 4 Changes of pore water pressure head profile over rainfall duration for different analytical solutions (splines present results of analytical solutions in this study and symbols present results of analytical solutions in reference [11])

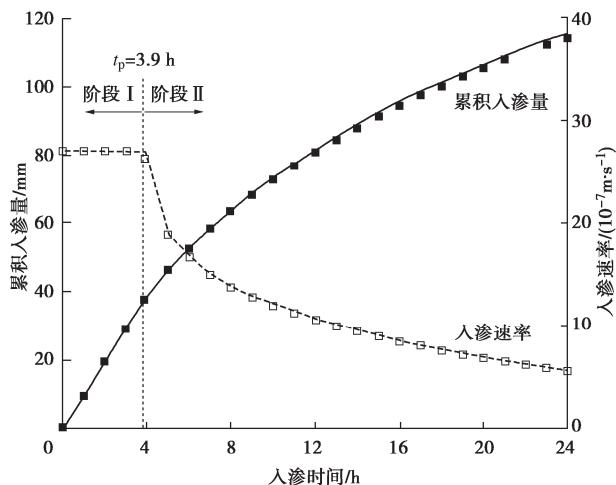


图5 覆盖层表面入渗速率和累积入渗量随时间的变化(曲线为解析解, 符号为数值解)

Fig. 5 Changes of infiltration rate and cumulative infiltration at top surface of cover over rainfall duration (splines present analytical results and symbols present numerical results)

图6绘制了利用解析法和数值法得到的覆盖层底面渗漏速率和累积渗漏量随时间的变化情况。结果表明两种方法得到的计算结果是吻合的。在降雨第3 h之前, 雨水还未入渗到覆盖层底部, 底面的渗漏速率

基本不变(渗漏速率等于底部土体的渗透系数)。当雨水入渗到底部后, 底面土体的体积含水量和渗透系数均增加, 因此导致渗漏速率也逐渐提高。在整个降雨期间, 累积渗漏量呈现逐渐增加的变化趋势, 当降雨结束时累积渗漏量约为8.5 mm。值得指出的是, 当降雨停止(第24小时)时, 底部渗漏速率仍有增加趋势, 这是由于水分入渗的滞后效应导致^[26]。同时该现象也说明, 降雨结束后底部渗漏还会持续一段时间。

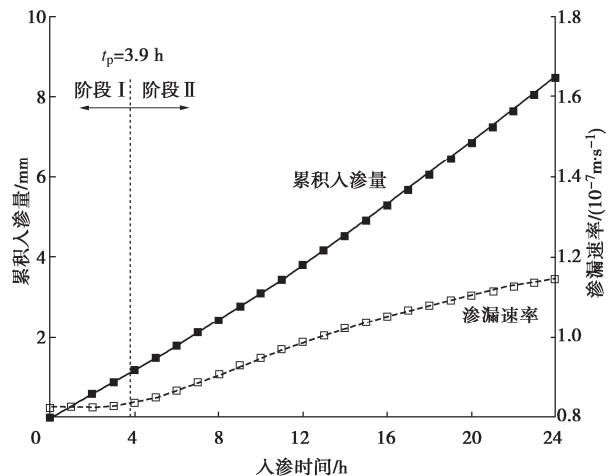


图6 覆盖层底面渗漏速率和累积渗漏量随时间的变化(曲线为解析解, 符号为数值解)

Fig. 6 Changes of percolation rate and cumulative percolation at the bottom surface of cover over rainfall duration (splines present analytical results and symbols present numerical results)

通过以上对比可以看出, 采用解析法和数值法得到的不同时刻的覆盖层体积含水量剖面、孔隙水压力水头剖面、表面入渗速率、表面累积入渗量、底面渗漏速率和底面累积渗漏量均吻合较好, 相较于前人解析, 本文解析解对覆盖层表面积水之后的入渗过程处理更符合实际情况, 因此验证了本文推导的解析解的有效性。

3 斜坡稳定性分析

采用双应力变量对非饱和土的应力状态进行描述, Fredlund等^[17]提出考虑双应力变量的抗剪强度理论公式:

$$\tau_f = c' + N \tan \varphi' + u \tan \varphi^b \quad (39)$$

式中: τ_f 为非饱和土的抗剪强度; c' 为非饱和土的有效黏聚力; N 为剪切面上的净法向应力; φ' 为非饱和土的有效内摩擦角; u 为非饱和土的基质吸力; φ^b 表示基质吸力对抗剪强度的贡献所对应的基质吸力角。

该方法通常假设斜坡的潜在滑动面与坡面平行, 因此, 高程 z_1 以上由覆盖层的下滑力引起的剪切应力 τ 可以表示为

$$\tau = N \tan \delta = \left[\gamma_d (H_1 - z_1) + \gamma_w \int_{z_1}^{H_1} \theta dz \right] \tan \delta. \quad (40)$$

式中: γ_d 为干土重度; H_1 为覆盖层表面高程; γ_w 为水的重度; θ 为土体的体积含水量。

利用潜在滑动面的抗剪强度除以剪切应力, 可以得到强降雨期间单层土质覆盖层的稳定安全系数:

$$F_s = \frac{(c' + u \tan \varphi^b)}{\left[\gamma_d (H_1 - z_1) + \gamma_w \int_{z_1}^{H_1} \theta dz \right] \tan \delta} + \frac{\tan \varphi'}{\tan \delta}. \quad (41)$$

将表 1 中的参数及利用解析解得到的覆盖层体积含水量代入式 (41), 可以得到强降雨期间覆盖层稳定安全系数随时间的发展情况, 结果如图 7 所示。在初始时刻, F_s 随覆盖层深度的增加而减小。在降雨期间, 土体体积含水量的增加会导致 F_s 的降低, 不同高程处潜在滑动面 F_s 的降低值与其体积含水量的增加值具有很好的相关性。

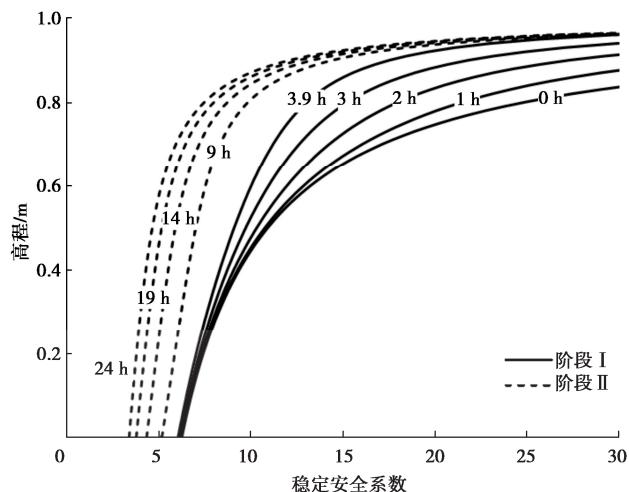


图 7 覆盖层稳定安全系数剖面随时间的变化

Fig. 7 Changes of factor of safety profile of inclined cover over rainfall duration

图 8 给出了高程分别为 0, 0.2, 0.5, 0.8 m 处潜在滑动面 F_s 随降雨时间的变化情况。可以看出, 滑动面的高程越小 (或埋深越大), 其对应的 F_s 对降雨的响应速度越慢, 这与体积含水量的响应规律也是一致的。另一方面, 由于整个降雨期间覆盖层高程越大的地方体积含水量变化越显著 (图 3 (b)), 因此其 F_s 的降低值也越大。从初始时刻至降雨结束, 高程为 0, 0.2, 0.5, 0.8 m 4 个滑动面的 F_s 分别降低了 2.9, 3.6, 6.3, 17.4。在整个强降雨期间, 覆盖层不同埋深处滑动面的最小稳定安全系数 $F_s = 3.3$, 因此覆盖层可以维持自身稳定。同时可以看出, 强降雨期间以覆盖层底面作为滑动面计算得到的稳定安全系数始终保持最低, 因此覆盖层最易沿着该滑动面发生滑移失稳, 在单层土质覆盖层的设计和运行中应予以重点关注。

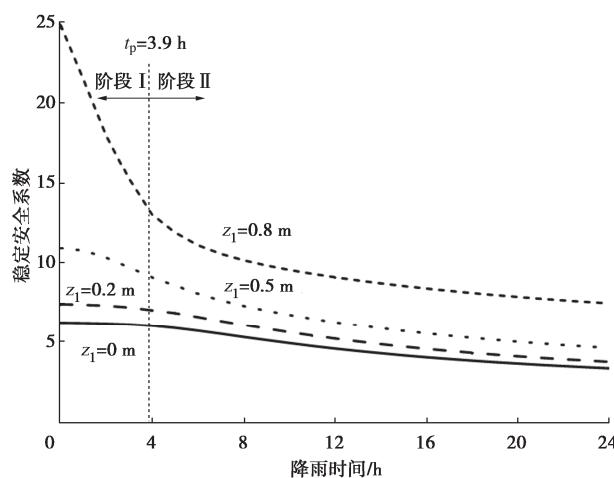


图 8 不同潜在滑动面稳定安全系数随降雨时间的变化

Fig. 8 Changes of factor of safety of different potential slip surfaces over rainfall duration

4 结语

本文基于二维非饱和土渗流控制方程, 针对降雨期间表层土体达到饱和状态前后, 分别采用恒定流量和恒定压力水头作为覆盖层表面边界条件, 推导了强降雨条件下单层土质覆盖层的入渗解析解。

通过对采用本文解析解与有限元方法得到的强降雨期间单层土质覆盖层孔隙水压力水头剖面、体积含水量剖面、表面入渗速率、表面累积入渗量、底面渗漏速率、底面累积渗漏量的变化情况, 验证了解析解的有效性。该解析解克服了现有解析解/半解析解无法考虑强降雨后期雨水无法完全入渗的不足, 能够更加准确地反映实际情况, 为研究强降雨条件下单层土质覆盖层的入渗及渗漏特征提供了一种简便高效的方法。

基于本文得到的解析解, 结合非饱和土抗剪强度理论, 分析了强降雨条件下覆盖层斜坡稳定安全系数数的变化规律。在强降雨期间, 不同埋深处潜在滑动面的斜坡稳定安全系数均随着体积含水量的增加而降低。潜在滑动面的埋深越大, 其斜坡稳定安全系数对降雨的响应速度越慢。在不同时刻, 以覆盖层底面作为滑动面的斜坡稳定安全系数始终保持最低, 因此覆盖层的滑移失稳最易发生在该滑动面上, 在单层土质覆盖层的设计和运行中应予以重点关注。

本文推导的解析解仅适用于恒定降雨强度的情况, 今后还需进一步探究变降雨强度下的覆盖层水分入渗规律及斜坡稳定性。同时该解析解未考虑降雨期间土壤和植被的腾发作用, 所采用土水特征曲线未考虑进气值的影响, 上述不足之处在今后的研究中有待进一步解决。

参考文献:

- [1] 浦烨枫. 垃圾填埋场渗滤液对地下水的污染规律及防渗策略分析[J]. 工程建设与设计, 2022(14): 90-92. (PU Yefeng. Analysis of the pollution law of landfill leachate to groundwater and the seepage prevention strategy[J]. Construction & Design for Engineering, 2022(14): 90-92. (in Chinese))
- [2] 舒实, 施建勇. 气压和温度变化共同作用下垃圾填埋场边坡稳定性研究[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(1): 82-89. (SHU Shi, SHI Jianyong. Slope stability of municipal solid waste landfills under combined effects of gas pressure and temperature changes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(1): 82-89. (in Chinese))
- [3] 何雪莲, 梁凌, 韦超前. 城镇生活垃圾填埋场环境问题分析及污染防控措施[J]. 广东化工, 2024, 51(2): 99-101, 129. (HE Xuelian, LIANG Ling, WEI Chaoqian. Analysis of environmental problems and pollution prevention and control measures for urban domestic waste landfill sites[J]. Guangdong Chemical Industry, 2024, 51(2): 99-101, 129. (in Chinese))
- [4] 詹良通, 冯嵩, 李光耀, 等. 生态型土质覆盖层工作原理及其在垃圾填埋场封场治理中的应用[J]. 环境卫生工程, 2022, 30(4): 1-20. (ZHAN Liangtong, FENG Song, LI Guangyao, et al. Working principle of ecological soil covers and its application in landfill sealing treatment[J]. Environmental Sanitation Engineering, 2022, 30(4): 1-20. (in Chinese))
- [5] 张文杰, 邱战洪, 朱成仁, 等. 长三角地区填埋场 ET 封顶系统的性能评价[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(3): 384-389. (ZHANG Wenjie, QIU Zhanhong, ZHU Chengren, et al. Evaluation of evapotranspiration covers of landfills in Yangtze River Delta Region[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, 31(3): 384-389. (in Chinese))
- [6] 焦卫国, 詹良通, 季永新, 等. 植被对土质覆盖层水分迁移和存储影响试验研究[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(7): 1268-1275. (JIAO Weiguo, ZHAN Liangtong, JI Yongxin, et al. Experimental study on effects of vegetation on water transport and storage in soil cover[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(7): 1268-1275. (in Chinese))
- [7] 王宜轩. 城市生活垃圾填埋场失稳破坏模式研究[D]. 杭州: 浙江理工大学, 2020. (WANG Yixuan. Study on Instability and Failure Mode of Municipal Solid Waste Landfill[D]. Hangzhou: Zhejiang Sci-Tech University, 2020. (in Chinese))
- [8] HAYEK M. Analytical solution to transient Richards' equation with realistic water profiles for vertical infiltration and parameter estimation[J]. Water Resources Research, 2016, 52(6): 4438-4457.
- [9] FENG S, HUANG R H, ZHAN L T, et al. Semi-analytical solution of pore-water pressure in unsaturated ground and infinite slope considering highly nonlinear soil hydraulic properties[J]. Computers and Geotechnics, 2023, 164: 105795.
- [10] ZHAN T L T, QIU Q W, XU W J. Analytical solution for infiltration and deep percolation of rainwater into a monolithic cover subjected to different patterns of rainfall[J]. Computers and Geotechnics, 2016, 77: 1-10.
- [11] 邱清文, 詹良通, 黄依艺. 考虑任意初始条件的均质土质覆盖层降雨入渗解析解[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(2): 359-365. (QIU Qingwen, ZHAN Liangtong, HUANG Yiyi. Analytical solutions for rainfall infiltration into monolithic covers considering arbitrary initial conditions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(2): 359-365. (in Chinese))
- [12] TRACY F T, VAHEDIFARD F. Analytical solution for coupled hydro-mechanical modeling of infiltration in unsaturated soils[J]. Journal of Hydrology, 2022, 612: 128198.
- [13] WU L Z, ZHANG L M. Analytical solution to 1D coupled water infiltration and deformation in unsaturated soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, 33(6): 773-790.
- [14] PU H F, WEN X J, MIN M, et al. Analytical solution for coupled water-gas transport in landfill cover[J]. Acta Geotechnica, 2023, 18(8): 4219-4231.
- [15] ZHAN T L T, JIA G W, CHEN Y M, et al. An analytical solution for rainfall infiltration into an unsaturated infinite slope and its application to slope stability analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, 37(12): 1737-1760.
- [16] WU L Z, ZHANG L M, HUANG R Q. Analytical solution to 1D coupled water infiltration and deformation in two-layer unsaturated soils[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2012, 36(6): 798-816.
- [17] FREDLUND D G, MORGENSEN N R, WIDGER R A. The shear strength of unsaturated soils[J]. Canadian

- Geotechnical Journal, 1978, **15**(3): 313-321.
- [18] 李 宁, 许建聪. 无限长均质斜坡降雨入渗解析解[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(12): 2325-2330. (LI Ning, XU Jiancong. Analytical solutions for rainfall infiltration into homogenous infinite slopes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(12): 2325-2330. (in Chinese))
- [19] RICHARDS L A. Capillary conduction of liquids through porous media[J]. Physics, 1931, **1**(5): 318-333.
- [20] GARGNER W R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table[J]. Soil Sci, 1958, **85**(4): 228-232.
- [21] 刘小川. 降雨诱发非饱和土边坡浅层失稳离心模型试验及分析方法[D]. 杭州: 浙江大学, 2017. (LIU Xiaochuan. Centrifugal Model Test and Analysis Method of Shallow Instability of Unsaturated Soil Slope Induced by Rainfall[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2017. (in Chinese))
- [22] 城镇雨水系统规划设计暴雨径流计算标准: DB11/T 969—2016[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2016. (Standard of Rainstorm Runoff Calculation for Urban Storm Drainage System Planning and Design: DB11/T 969—2016[S]. Beijing: China Architecture Publishing, 2016. (in Chinese))
- [23] 陈学东. 浅层非饱和带降雨入渗规律的试验与数值研究[D]. 南京: 河海大学, 2005. (CHEN Xuedong. Experimental and Numerical Study on Rainfall Infiltration Law in Shallow Unsaturated Zone[D]. Nanjing: Hohai University, 2005. (in Chinese))
- [24] 朱 伟, 程南军, 陈学东, 等. 浅谈非饱和渗流的几个基本问题[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(2): 235-240. (ZHU Wei, CHENG Nanjun, CHEN Xuedong, et al. Some fundamental problems of unsaturated seepage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(2): 235-240. (in Chinese))
- [25] WANG R C, WEN S J, SUN Z L. Analytical solution of rainfall infiltration in unsaturated soil slopes considering initial water content distribution[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2022, **26**(11): 4419-4431.
- [26] 邱清文. 黄土/碎石覆盖层水气耦合运移规律及填埋气减排性能[D]. 杭州: 浙江大学, 2016. (QIU Qingwen. Water-Gas Coupling Migration Law and Landfill Gas Emission Reduction Performance of Loess/Gravel Overburden[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2016. (in Chinese))