

DOI: 10.11779/CJGE20240146

基于变分极限平衡法的地基极限承载力分析

周志雄, 周凤玺, 梁玉旺*

(兰州理工大学土木工程学院, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 基于变分法和极限平衡法的基本原理, 对条形基础下地基极限承载力进行了分析。以地基中滑动土体的静力平衡方程为基本方程, 建立了地基极限承载力泛函极值的等周模型。在此基础上, 通过引入拉格朗日乘子构造出约束条件下的辅助泛函, 利用欧拉方程得到以潜在滑动面、滑面上法向正应力以及拉格朗日乘子等为基本未知量的一阶常微分方程组, 并通过引入辅助变量将可动边界的地基极限承载力分析转化为固定边界条件下的两点边值问题。利用打靶法对该耦合的非线性微分方程组进行数值求解, 得到问题的精确解答, 并通过数值算例验证了模型和方法的有效性。

关键词: 极限承载力; 条形基础; 变分极限平衡法; 打靶法

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2025)06-1281-08

作者简介: 周志雄(1995—), 男, 博士研究生, 主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail: zzx_0603@163.com。

Ultimate bearing capacity of foundations based on variational limit equilibrium method

ZHOU Zhixiong, ZHOU Fengxi, LIANG Yuwang

(School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: Based on the basic principles of the variational method and the limit equilibrium method, the ultimate bearing capacity of foundation for strip footings is analyzed. Based on the static equilibrium equation for sliding soil in the foundation, an isoperimetric model for the functional extremum of the ultimate bearing capacity of foundation is established. On this basis, the auxiliary functional under constraint conditions is constructed by introducing the Lagrange multiplier. The Euler equation is used to obtain the first-order ordinary differential equations with the potential sliding surface, normal stress on sliding surface, and Lagrange multiplier as basic unknowns, and the analysis of the ultimate bearing capacity of foundation with movable boundaries is transformed into a two-point boundary value problem under fixed boundary conditions by introducing auxiliary variables. Finally, the numerical solution of the coupled nonlinear differential equation system is carried out by using the shooting method, and the exact solution of the problem is obtained. Meanwhile, the effectiveness of the model and method is verified through numerical examples.

Key words: ultimate bearing capacity; strip foundation; variational limit equilibrium method; shooting method

0 引言

地基承载力问题是土力学研究的经典课题之一。自 Prandtl (1920) 首先根据极限平衡理论给出了条形基础的极限承载力计算公式以来, 众多学者在他的研究基础上作了进一步的修正和发展, 主要包括极限平衡法^[1-3]、极限分析法^[4-6]、滑移线法^[7-9]、有限单元法^[10-12]等解析和数值解。基于极限平衡法, 条形浅基础地基极限承载力公式可统一表示为^[1]

$$q_u = cN_c + qN_q + \frac{\gamma b}{2}N_\gamma \quad (1)$$

式中: q_u 为地基极限承载力; c , q 和 γ 分别为地基土黏聚力、地基上覆土形成的表面超载和重度; N_c , N_q 和 N_γ 分别为无量纲地基承载力系数, 仅与土体内摩擦

角 φ 有关。

极限平衡法是根据静力平衡原理推导地基承载力的一种方法。传统的极限平衡法通过假定地基滑动面形状, 并根据滑动土体的极限平衡条件求解。该方法因概念明确, 计算简单, 而得到了广泛应用。然而, 不同的滑动面形状假设就会得到不同的地基承载力系数, 并且已有研究表明, 由于没有考虑土体参数和超载的相互影响, 利用仅考虑各因素独立影响的叠加而得到的地基承载力所带来的计算误差会随着地基土的

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12362032, 51978320); 甘肃省重点研发计划项目 (23YFFA0063)

收稿日期: 2024-02-19

*通信作者 (E-mail: liangyw@yeah.net)

内摩擦角增大而显著增大^[10]。结合变分原理, Kopascy^[13]提出了边坡稳定性分析的变分极限平衡法, 该法通过变分原理将安全系数的求解看作是滑面和应力泛函的极值问题, 由于其具有严密的数学基础从而被广泛应用于土力学极限问题的分析当中, 包括边坡稳定性^[13-15]、土压力^[16-17]和地基承载力分析^[18-19]。

本文以条形基础下均质土地基极限承载力为研究对象, 将变分极限平衡法得到的基本方程转化为具有固定边界的两点边值问题, 采用打靶法求解该非线性微分方程组, 可以直接得到滑动面、滑动面上的法向应力分布以及地基极限承载力的精确解, 并与已有文献的分析结果进行对比, 验证模型和方法的有效性。

1 数学模型

1.1 基本假定

考虑如图1所示的宽度为 $2b$ 的条形浅基础, 地基土体的重度、黏聚力和内摩擦角分别为 γ , c 和 φ , 并考虑如下基本假设:

- (1) 基础为刚性, 且基础底面粗糙, 地基与土体的接触面没有滑移。
- (2) 将基础底面以上土体的影响考虑为均布荷载 q 。
- (3) 当条形荷载达到地基极限承载力时, 地基发生整体剪切破坏, 且滑裂面端点通过基础边缘。
- (4) 地基土体为理想刚塑性体, 满足 Mohr-Coulomb 强度准则。

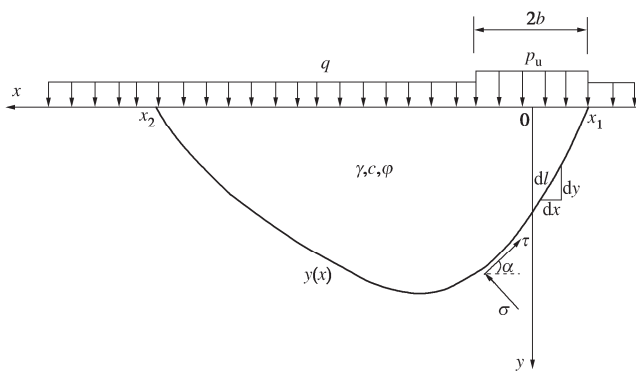


图1 条形基础下地基极限承载力计算模型

Fig. 1 Computational model for ultimate bearing capacity of foundations for strip footings

1.2 基本方程

在图1所示的直角坐标系中, 滑动土体满足以下静力平衡方程:

$$\int_{l_1}^{l_2} (\tau \sin \alpha + \sigma \cos \alpha) dl - \int_{x_1}^{x_2} (q + \gamma y) dx = 2b(p_u - q), \quad (2a)$$

$$\int_{l_1}^{l_2} (\sigma \sin \alpha - \tau \cos \alpha) dl = 0, \quad (2b)$$

$$\int_{l_1}^{l_2} [(\tau \cos \alpha - \sigma \sin \alpha)y - (\tau \sin \alpha + \sigma \cos \alpha)x] dl +$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (q + \gamma y) x dx = 0. \quad (2c)$$

式中: τ 和 σ 分别为滑动面上的切向和法向应力; α 为滑动面与水平面的夹角; l 为滑动面弧长; x_1 和 x_2 为连续滑动面的两端点。

利用几何关系 $\cos \alpha = dx/dl$, $\sin \alpha = y' dx/dl$, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, 并考虑 Mohr-Coulomb 强度准则 $\tau = \sigma \tan \varphi + c$, 方程组 (2) 可重写为

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\sigma \tan \varphi + c)y' + \sigma - q - \gamma y] dx = 2b(p_u - q), \quad (3a)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [\sigma(y' - \tan \varphi) - c] dx = 0, \quad (3b)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (\sigma \tan \varphi + c)(y - xy') - \sigma(x + yy') + (q + \gamma y)x dx = 0. \quad (3c)$$

为了分析方便, 令

$$V(x) = \int_{x_1}^x [(\sigma \tan \varphi + c)y' + \sigma - q - \gamma y] dx, \quad (4a)$$

$$H(x) = \int_{x_1}^x [\sigma(y' - \tan \varphi) - c] dx, \quad (4b)$$

$$M(x) = \int_{x_1}^x [(\sigma \tan \varphi + c)(y - xy') - \sigma(x + yy') + (q + \gamma y)x] dx. \quad (4c)$$

根据方程组 (3) 可以得到

$$V(x_1) = H(x_1) = H(x_2) = M(x_1) = M(x_2) = 0, \quad (5)$$

$$p_u = V(x_1)/2b + q. \quad (6)$$

1.3 变分分析

从积分方程组 (3) 可以看出, 地基的极限承载力 p_u 取决于滑裂面函数 $y(x)$ 和滑裂面上的应力函数 $\sigma(x)$, 即寻找函数 $y(x)$ 和 $\sigma(x)$ 使其既满足静力平衡方程 (3), 又使得地基荷载最小。因此, 地基极限承载力 p_u 为滑裂面函数 $y(x)$ 和应力函数 $\sigma(x)$ 的泛函极值问题。根据变分原理, 将水平方向的平衡方程式 (3b) 与力矩平衡方程式 (3c) 作为竖向平衡方程式 (3a) 的约束条件, 利用 Lagrange 乘子法将地基极限承载力问题转化为标准的等周问题。构造泛函

$$J = 2b(p_u - \gamma d) = \int_{x_1}^{x_2} F dx. \quad (7)$$

式中: $F = F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$; $F_0 = (\sigma \tan \varphi + c)y' + \sigma - q - \gamma y$; $F_1 = \sigma(y' - \tan \varphi) - c$; $F_2 = (\sigma \tan \varphi + c)(y - xy') - \sigma(x + yy') + (q + \gamma y)x$ 。其中, λ_1 和 λ_2 为待定的 Lagrange 乘子。

依据等周问题极值存在的必要条件, $\delta J = 0$, 并结合几何边界条件、积分约束条件及滑裂面端点水平向可动特性, 得出下列与泛函取驻值等价的边值问题:

(1) 欧拉方程:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \sigma'} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (8b)$$

由方程(8a)和(8b)可分别得到滑面函数以及法向应力函数的微分方程:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan \varphi (\lambda_1 - \lambda_2 y) - (1 - \lambda_2 x)}{\tan \varphi (1 - \lambda_2 x) + (\lambda_1 - \lambda_2 y)}, \quad (9a)$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{2\lambda_2 (\sigma \tan \varphi + c) - \gamma (1 - \lambda_2 x)}{\tan \varphi (1 - \lambda_2 x) + (\lambda_1 - \lambda_2 y)}. \quad (9b)$$

(2) 约束条件

将水平方向的平衡方程式(3b)与力矩平衡方程式(3c)作为约束条件, 结合式(5)有

$$H|_{x=x_1} = M|_{x=x_1} = 0, \quad (10a)$$

$$H|_{x=x_2} = M|_{x=x_2} = 0, \quad (10b)$$

$$V|_{x=x_1} = 0. \quad (10c)$$

(3) 边界条件

连续滑动面的一端点经过基础边缘, 即 $x_1 = -b$, 而另一端点 x_2 位置沿直线 $y=0$ 移动, 则几何边界条件可表示为

$$x_1 = -b, \quad (11a)$$

$$y|_{x=x_1} = y|_{x=x_2} = 0. \quad (11b)$$

(4) 横截条件

连续滑动面的端点处应满足横截条件:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_1} = 0, \quad (12a)$$

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_2} = 0. \quad (12b)$$

式(12)结合式(7)和式(11), 经过整理可以得到

$$\sigma|_{x=x_1} = \frac{q(1 - \lambda_2 x) + \lambda_1 c}{1 - \lambda_2 x - \lambda_1 \tan \varphi} \Big|_{x=x_1}, \quad (13a)$$

$$\sigma|_{x=x_2} = \frac{q(1 - \lambda_2 x) + \lambda_1 c}{1 - \lambda_2 x - \lambda_1 \tan \varphi} \Big|_{x=x_2}. \quad (13b)$$

至此, 基于变分法的基本原理和极限平衡法, 建立了地基极限承载力问题的控制方程(9)及其相应的边界条件(10)~(13)。

1.4 状态方程及打靶法求解

由于问题的控制方程(9)为非线性常微分方程组, 在一般的边界条件下很难获得其解析解。通常采用搜索优化算法, 存在陷入局部最优的情况, 而打靶法为求解此类非线性常微分方程组边值问题提供了有效的数值方法, 不需要搜索优化过程且能按照精度要求获得满足边界条件的精确解答。考虑到与一般的边值问题不同的是滑动面的端点 x_2 为可移动边界, 不能直接

进行数值计算, 同时考虑到地基发生整体剪切破坏达到极限状态时, 滑移面与地表的交点是固定的, 即滑动面的端点是与自变量 x 无关的待定常数。通过引入未知变量 W , 且有

$$W(x) = x_2. \quad (14)$$

由于 x_2 的大小与自变量 x 无关, 则有

$$\frac{dW}{dx} = 0. \quad (15)$$

再引入新自变量 t 并作下列变量变换:

$$x = x_1 + t(W - x_1), \quad t \in [0, 1] \quad (16)$$

且有

$$\frac{dx}{dt} = W - x_1. \quad (17)$$

以 t 为自变量, 那么微分方程组的自由边界问题就可以转换为固定边界问题。这样在引入新的自变量 t 和表示积分弧长区间大小的变量 W 后, 问题就转变为 t 在 $[0, 1]$ 上的两点边值问题。同时, 选取 $(y, \sigma, H, M, V, \lambda_1, \lambda_2, W)$ 作为未知量, 将控制方程(9)、约束条件(10)和未知参数转化为一阶微分方程组的形式, 就可以建立问题相应的状态方程。

$$\frac{dy}{dt} = (W - x_1) \frac{\tan \varphi (\lambda_1 - \lambda_2 y) - (1 - \lambda_2 x)}{\tan \varphi (1 - \lambda_2 x) + (\lambda_1 - \lambda_2 y)}, \quad (18a)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = (W - x_1) \frac{2\lambda_2 (\sigma \tan \varphi + c) - \gamma (1 - \lambda_2 x)}{\tan \varphi (1 - \lambda_2 x) + (\lambda_1 - \lambda_2 y)}, \quad (18b)$$

$$\frac{dH}{dt} = (W - x_1) [\sigma (y' - \tan \varphi) - c], \quad (18c)$$

$$\frac{dM}{dt} = (W - x_1) [(\sigma \tan \varphi + c)(y - xy') - \sigma(x + yy') + (q + \gamma y)x], \quad (18d)$$

$$\frac{dV}{dt} = (W - x_1) [(\sigma \tan \varphi + c)y' + \sigma - q - \gamma y], \quad (18e)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\lambda_2}{dt} = 0, \quad (18f)$$

$$\frac{dW}{dt} = 0. \quad (18g)$$

上述状态方程相应的边界条件为式(10), (11)和式(13)。可以看出, 问题的控制方程为8个常微分方程, 而边界条件有9个, 其中包括5个约束条件(10), 2个几何边界条件(11b)和2个横截条件(13)。为了得到的解答完全满足所有的边界条件, 将约束条件(10b)转化为如下等价形式:

$$(H^2 + M^2) \Big|_{x=x_2} = 0. \quad (19)$$

至此, 问题的8个常微分方程组对应8个边界条件, 可采用打靶法进行数值求解, 最后可利用方程(6)得到地基的极限承载力解答。关于打靶法的具体计算过程可参考文献[20, 21], 这里不再赘述。

2 数值算例

基于变分极限平衡法, 本文对地基极限承载力进行了数值求解。为了分析方便, 数值算例引入如下无量纲化变量:

$$\bar{x} = \frac{x}{b}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_0}, \quad \bar{q} = \frac{q}{\gamma_0 b},$$

$$\bar{c} = \frac{c}{\gamma_0 b}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\gamma_0 b}, \quad \bar{p}_u = \frac{p_u}{\gamma_0 b} \quad (20)$$

式中: γ_0 为参考土体重度, 文中取 $\gamma_0 = 20 \text{ kN/m}^3$ 。

2.1 地基承载力系数

为了得到考虑单因素影响下的地基承载力系数, 根据式 (1) 在计算 N_c 时, 假设 $\bar{c}=1$, $\bar{q}=\bar{\gamma}=0$; 计算 N_q 时, 假设 $\bar{q}=1$, $\bar{c}=\bar{\gamma}=0$; 计算 N_γ 时, 假设 $\bar{\gamma}=1$, $\bar{q}=\bar{c}=0$ 。为了方便分析, 图 2~4 分别绘出了地基承载力系数 N_c , N_q 和 N_γ 随土体内摩擦角 φ 的变化曲线, 并与传统的极限平衡法^[1]、极限分析上限解^[5]和有限元法^[10]的计算结果进行了比较 (表 1)。

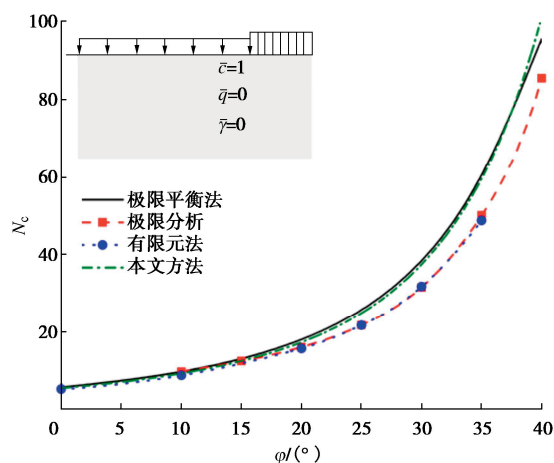


图2 承载力系数 N_c 变化曲线

Fig. 2 Variation curves of bearing capacity coefficient N_c

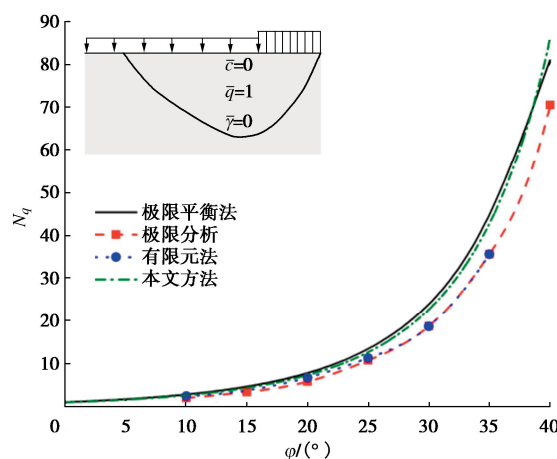


图3 承载力系数 N_q 变化曲线

Fig. 3 Variation curves of bearing capacity coefficient N_q

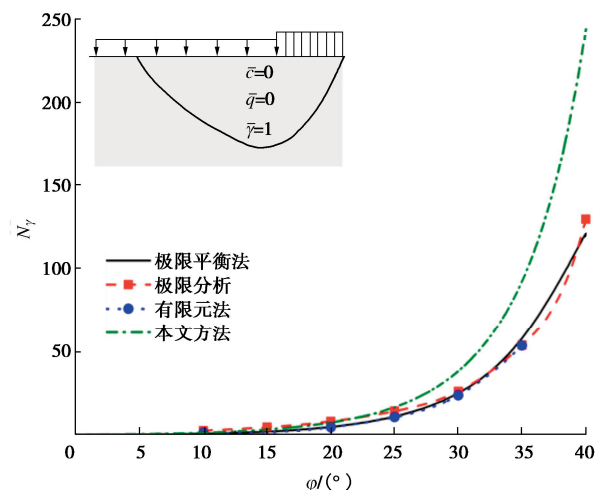


图4 承载力系数 N_γ 变化曲线

Fig. 4 Variation curves of bearing capacity coefficient N_γ

通过表 1 和图 2 可以看出, 本文得到的承载力系数 N_c 与 Terzaghi^[1] (极限平衡法)、Wang^[5] (极限分析上限解) 和 Manoharan^[10] (有限元法) 的结果都是随着内摩擦角 φ 值的增大呈递增的趋势, 并且当 $\varphi \leq 15^\circ$ 时, 不同方法得到的 N_c 系数相差范围最大为 2.6%。随着内摩擦角 φ 值的进一步增加, 本文的结果和 Terzaghi 的解答基本一致, 且比极限分析上限解和有限元得到的值大, 当 $\varphi=40^\circ$ 时, N_c 系数的最大相对误差为 15.5%。

从表 1 和图 3 可以看出, 不同方法得到的承载力系数 N_q 随着土体内摩擦角 φ 的变化趋势与系数 N_c 相似, 均呈现指数递增的趋势。本文得到的系数 N_q 与 Terzaghi 的解答基本相吻合, 而比 Wang 等^[5] 和 Manoharan 等^[10] 的结果偏大, 且这种差别随着 φ 值的增加有越来越大的趋势, 当 $\varphi=40^\circ$ 时, N_q 系数的最大相对误差为 21.8%。

目前, 对于地基土重量引起的承载力系数 N_γ 没有公认的计算表达式, 众多学者提出了各自的近似或数值结果^[7]。通过分析表 1 和图 4 可以发现, 不同方法得到的承载力系数 N_γ 都随着土体内摩擦角 φ 的增大成指数型增大, 且当 $\varphi \leq 15^\circ$ 时, 不同方法得到的 N_γ 系数相差较小, 但随着内摩擦角 φ 值增加, 本文的解答明显大于其它结果。

2.2 极限承载力分析

在不考虑地基土重度的情形下, Prandtl 和 Reissner 给出的承载力系数在理论上是精确解^[22], 即

$$N_c = \cot \varphi \left[\exp(\pi \tan \varphi) \tan^2(45^\circ + \varphi/2) - 1 \right], \quad (21a)$$

$$N_q = \exp(\pi \tan \varphi) \tan^2(45^\circ + \varphi/2) \quad (21b)$$

为了验证本文方法的有效性, 图 5 绘出了不考虑土体自重下的无量纲化极限承载力, 并与 Prandtl-

表 1 承载力系数计算结果及比较

| $\Phi/(^{\circ})$ | 极限平衡法 | | | 极限分析上限解 | | | 有限单元法 | | | 本文方法 | | |
|-------------------|-------|-------|--------------|---------|-------|--------------|-------|-------|--------------|--------|-------|--------------|
| | N_c | N_q | N_{γ} | N_c | N_q | N_{γ} | N_c | N_q | N_{γ} | N_c | N_q | N_{γ} |
| 0 | 5.70 | 1 | 0 | — | — | — | — | — | — | 5.52 | 1 | 0 |
| 5 | 7.34 | 1.64 | 0.10 | — | — | — | — | — | — | 7.09 | 1.62 | 0.38 |
| 10 | 9.60 | 2.69 | 0.54 | 9.74 | 1.98 | 2.41 | 5.22 | 2.42 | 1.20 | 9.31 | 2.64 | 1.27 |
| 15 | 12.86 | 4.45 | 1.66 | 12.47 | 3.39 | 4.53 | — | — | — | 12.53 | 4.36 | 3.12 |
| 20 | 17.69 | 7.44 | 4.22 | 16.13 | 5.81 | 8.01 | 8.77 | 6.72 | 4.44 | 17.39 | 7.33 | 7.32 |
| 25 | 25.13 | 12.72 | 9.84 | 21.83 | 10.74 | 14.12 | 15.77 | 11.28 | 10.54 | 25.02 | 12.67 | 16.52 |
| 30 | 37.16 | 22.46 | 22.30 | 31.7 | 18.75 | 25.97 | 21.82 | 18.70 | 23.68 | 37.60 | 22.71 | 38.07 |
| 35 | 57.75 | 41.44 | 50.97 | 50.18 | 35.66 | 53.60 | 31.90 | 35.65 | 53.47 | 59.65 | 42.77 | 92.46 |
| 40 | 95.66 | 81.27 | 121.24 | 85.56 | 70.62 | 129.66 | — | — | — | 101.31 | 86.01 | 243.87 |

表 2 地基极限承载力的试验结果与计算结果比较

| 序号 | 基础埋深/ m | 基础宽度/ m | 黏聚力/ kPa | 内摩擦角/ ($^{\circ}$) | 重度/ ($\text{kN}\cdot\text{m}^{-3}$) | 试验结果 | 极限承载力 | | | |
|----|------------|------------|-------------|-------------------------|--|--------|-----------|--------|--------|--------|
| | | | | | | | Meryerhof | Hansen | Vesic | 本文解 |
| 1 | 1.5 | 0.60 | 19.2 | 0.0 | 18.00 | 30.93 | 39.63 | 35.56 | 26.85 | 24.63 |
| 2 | 1.5 | 0.75 | 19.2 | 0.0 | 18.00 | 21.04 | 29.78 | 28.00 | 21.48 | 19.70 |
| 3 | 1.5 | 0.90 | 19.2 | 0.0 | 18.00 | 16.79 | 23.70 | 22.96 | 17.90 | 16.42 |
| 4 | 1.5 | 1.05 | 19.2 | 0.0 | 18.00 | 13.44 | 19.68 | 19.37 | 15.34 | 14.07 |
| 5 | 0.0 | 0.71 | 33.5 | 0.0 | 18.00 | 31.30 | 32.24 | 32.24 | 32.24 | 28.94 |
| 6 | 0.0 | 0.71 | 24.6 | 0.0 | 18.00 | 23.47 | 23.63 | 23.63 | 23.63 | 21.25 |
| 7 | 0.0 | 0.71 | 43.1 | 9.0 | 19.30 | 72.98 | 63.78 | 64.07 | 64.51 | 80.10 |
| 8 | 0.0 | 0.50 | 30.0 | 20.0 | 20.00 | 150.40 | 128.20 | 129.20 | 130.60 | 113.60 |
| 9 | 0.0 | 0.71 | 9.8 | 20.0 | 17.06 | 36.33 | 36.66 | 36.16 | 37.65 | 36.95 |
| 10 | 0.3 | 0.71 | 9.8 | 20.0 | 17.06 | 42.44 | 46.07 | 50.20 | 44.91 | 43.22 |
| 11 | 0.4 | 0.71 | 12.8 | 22.0 | 17.70 | 65.25 | 70.34 | 78.46 | 66.68 | 64.79 |
| 12 | 0.5 | 0.71 | 14.7 | 25.0 | 17.65 | 87.78 | 110.28 | 125.12 | 102.14 | 96.16 |

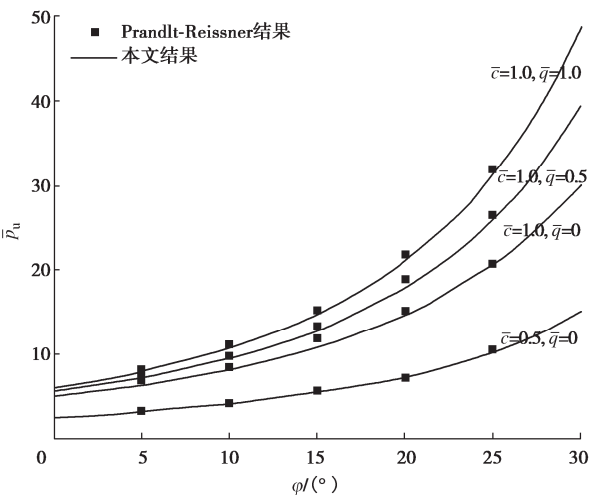


图 5 不考虑土体重度时极限承载力比较

Fig. 5 Comparison of ultimate bearing capacity without considering soil weight

Reissner 计算公式 (21) 的结果进行了比较。可以看出二者非常吻合。

为了进一步验证本文方法的有效性,表 2 将所计算的无量化地基承载力与文献[23]中收集的 12 个静载荷试验数据进行了对比,并与 Meryerhof、Hansen 和 Vesic 公式的结果进行了比较。图 6 绘出了极限承载力试验结果与不同计算方法的误差 $\varepsilon = |\text{计算值} - \text{试验值}| / \text{试验值}$ 。

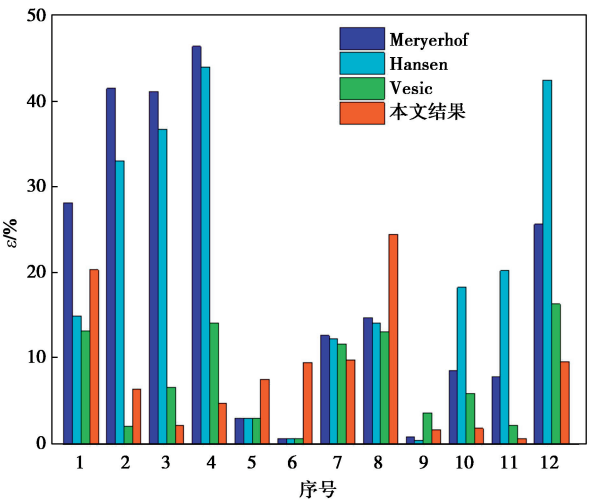


图 6 极限承载力试验结果与理论计算误差

Fig. 6 Errors between experimental and theoretical results of ultimate bearing capacity

分析表 2 和图 6 可以发现,与 Meryerhof、Hansen 和 Vesic 公式的结果相比较,本文计算结果与试验结果的误差控制在 25% 以内,说明本文提出的方法能够较好的给出地基极限承载力,可为地基承载力预测提供一定的参考。

为了分析利用变分极限平衡法求解条形基础的极限承载力以及滑移面的变化情况,选取参数 $\bar{c} = \bar{q} = \bar{\gamma} = 1$,图 7 绘出了土体内摩擦角 ϕ 值分别为 0° ,

10°, 20°, 25° 时, 地基中滑移面的位置以及滑移面上法向正应力的分布情况。通过对比滑移面形状, 从图中可以看出, 随着 φ 值的增加, 滑移面水平方向的范围明显增大, 并且滑移面的深度也随之增加。由图中数据可见, 滑移面上的基础边缘 x_1 处法向应力及地基的极限承载力随内摩擦角的增大有很大程度的增加, 说明内摩擦角对地基承载力的影响很大, 而对滑移面另一端点 x_2 处的法向应力影响不大。

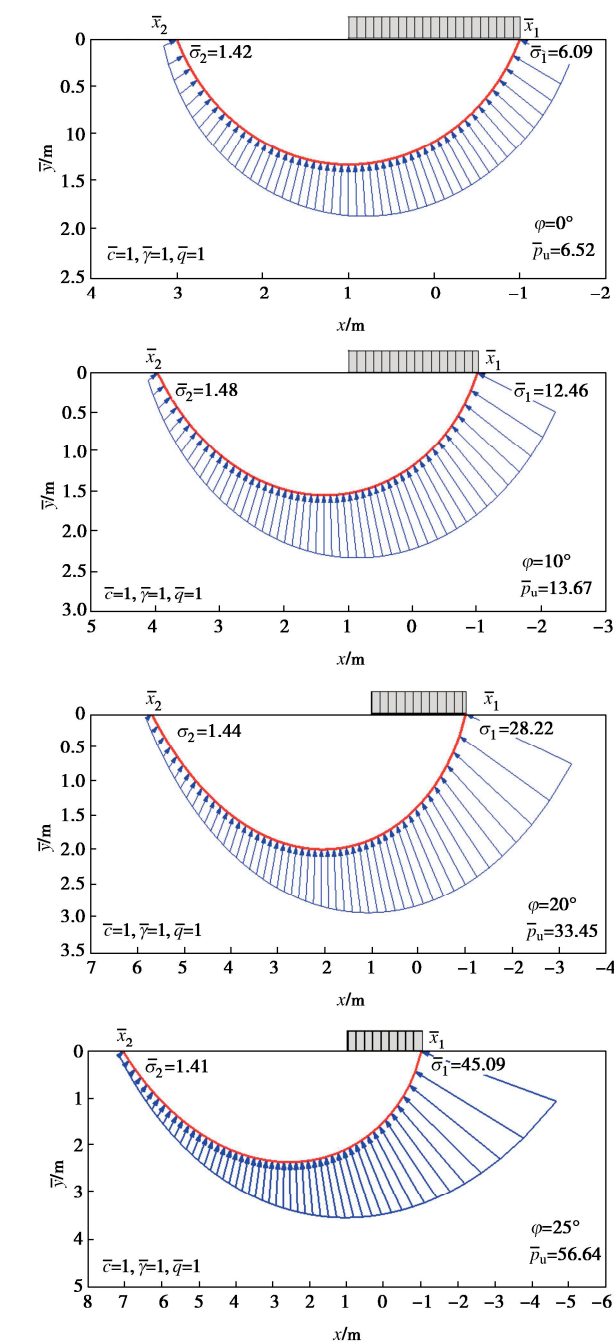


图 7 不同内摩擦角下地基滑移面与应力分布

Fig. 7 Slip surfaces and stress distribution of foundations under different internal friction angles

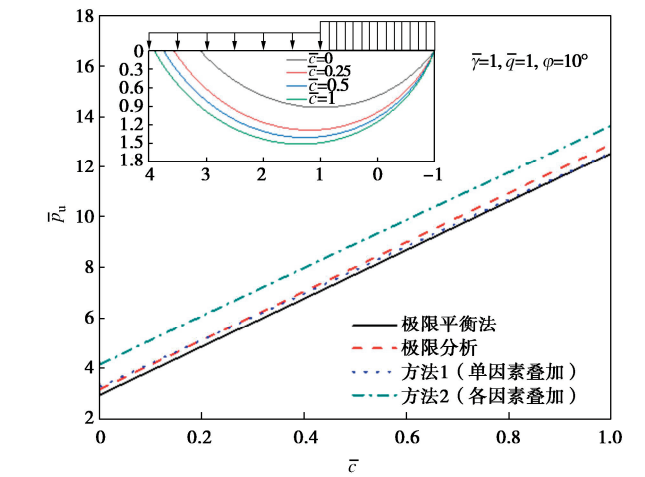
为了比较不同方法得到的地基承载力, 表 3 分别

给出了采用公式 (1) 的单因素叠加方法 (方法 1) 以及各因素联合分析 (方法 2) 的地基极限承载力值, 并与 Terzaghi^[1]、极限分析上限解^[5]、有限单元法^[10]的计算结果进行了比较。通过表 3 可以看出, 由于没有考虑地基土重量、强度以及超载之间对承载力的相互影响, 叠加方法得到的地基承载力要小于联合分析的值, 并且随着内摩擦角的增加, 两者之间的差值将越大。基于变分极限平衡法得到的结果与有限元方法得到的结果基本一致。

表 3 地基极限承载力比较

| $\varphi /(^{\circ})$ | Terzaghi 结果 | 极限分 析结果 | 有限元 结果 | 本文结果 | |
|-----------------------|----------------|------------|-----------|-------|-------|
| | | | | 方法 1 | 方法 2 |
| 0 | 6.70 | — | 6.98 | 6.52 | 6.62 |
| 10 | 12.56 | 9.62 | 14.07 | 12.58 | 13.67 |
| 15 | 18.14 | 14.15 | — | 18.49 | 20.90 |
| 20 | 27.24 | 21.89 | 31.83 | 28.38 | 33.45 |
| 25 | 42.77 | 35.78 | 51.00 | 45.94 | 56.64 |
| 30 | 70.77 | 60.57 | 85.67 | 79.34 | 88.73 |

图 8 绘出了地基极限承载力随黏聚力、重度、内摩擦角和表面超载的变化曲线以及相应的滑移面形状。从图 8 中可以看出, 极限承载力与地基土黏聚力、重度以及表面超载呈线性相关关系, 而与内摩擦角为非线性关系。地基黏聚力和内摩擦角对滑移面形状有着显著的影响, 随着黏聚力和内摩擦角的增加, 滑移面范围在水平方向和深度方向均将增大; 地基土重度对滑移面的影响正好相反, 随着重度的增加, 滑移面范围将有所减小; 表面超载对滑移面形状的影响不大, 但对承载力有着显著的影响, 这是因为表面超载影响了滑移面上法向应力的分布。另外, 从图中还可以发现, 采用叠加法得到的承载力值与 Terzaghi 公式的结果基本一致, 但由于没有考虑地基土黏聚力、重度以及表面超载之间的相互影响, 使得极限承载力值偏小。



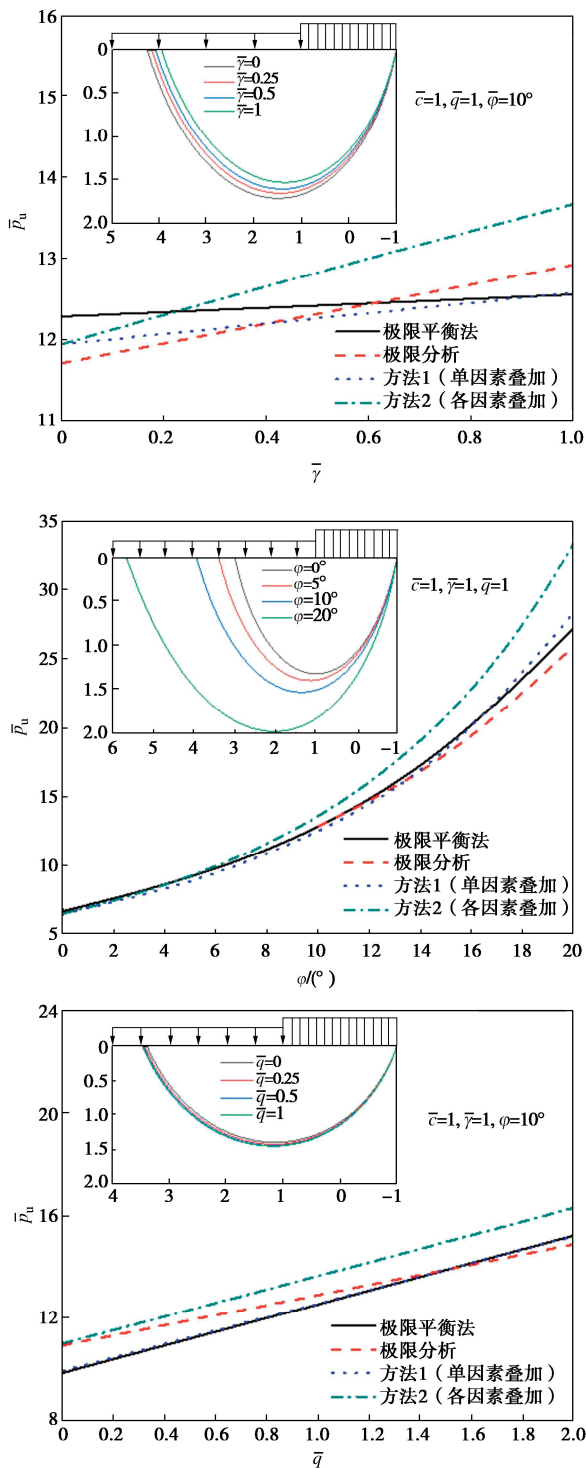


图8 地基极限承载力变化曲线

Fig. 8 Variation curves of the ultimate bearing capacity of foundations

3 结 论

针对条形基础地基极限承载力问题, 基于变分极限平衡法, 建立了问题的状态方程, 并利用打靶法分析了地基承载力和滑移面以及法向应力分布。通过数值算例, 分析了土体黏聚力、重度、内摩擦角和表面超载等因素对地基极限承载力的影响, 主要得到以下

3 点结论。

(1) 变分极限平衡法结合打靶法可以有效求解条形基础的承载力问题, 并与试验数据对比表明, 本文方法可以较好地计算地基极限承载力、滑移面形状以及滑面上法向应力的分布。

(2) 极限承载力随着地基土黏聚力、内摩擦角、重度以及表面超载的增大而增大, 其中内摩擦角的影响最为显著。

(3) 地基黏聚力和内摩擦角对滑移面形状有着显著的影响, 随着黏聚力和内摩擦角的增加, 滑移面范围在水平方向和深度方向均将增大, 随着重度的增加, 滑移面范围将有所减小, 表面超载对滑移面形状的影响不大。

参考文献:

- [1] KARL T. Theoretical Soil Mechanics[M]. New York: Wiley, 1943.
- [2] MEYERHOF G G. The ultimate bearing capacity of foundations[J]. Géotechnique, 1951, 2(4): 301-332.
- [3] SAHA A, GHOSH S. Pseudo-dynamic analysis for bearing capacity of foundation resting on c - ϕ soil[J]. International Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 9(4): 379-387.
- [4] SOUBRA A H. Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1999, 125(1): 59-68.
- [5] WANG Y J, YIN J H, CHEN Z Y. Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, 25(8): 841-851.
- [6] LI S, HUANG M S, YU J. Continuous field based upper-bound analysis for the undrained bearing capacity of strip footings resting near clay slopes with linearly increased strength[J]. Computers and Geotechnics, 2019, 105: 168-182.
- [7] KUMAR J. N_γ for rough strip footing using the method of characteristics[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(3): 669-674.
- [8] CASCONE E, CASABLANCA O. Static and seismic bearing capacity of shallow strip footings[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2016, 84: 204-223.
- [9] 李承超, 关云飞, 蔡正银, 等. 基于严格滑移线场理论临坡条形基础地基极限承载力分析[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(8): 1408-1416. (LI Chengchao, GUAN Yunfei, CAI Zhengyin, et al. Ultimate bearing capacity of strip footings placed near slopes determined by rigorous slip line field theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021,

- 43(8): 1408-1416. (in Chinese))
- [10] MANOHARAN N, DASGUPTA S P. Bearing capacity of surface footings by finite elements[J]. Computers & Structures, 1995, 54(4): 563-586.
- [11] NGUYEN H C, VO-MINH T. The use of the node-based smoothed finite element method to estimate static and seismic bearing capacities of shallow strip footings[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2022, 14(1): 180-196.
- [12] 王冬勇, 陈曦, 于玉贞, 等. 基于二阶锥规划有限元增量加载法的条形浅基础极限承载力分析[J]. 岩土力学, 2019, 40(12): 4890-4896, 4924. (WANG Dongyong, CHEN Xi, YU Yuzhen, et al. Ultimate bearing capacity analysis of shallow strip footing based on second-order cone programming optimized incremental loading finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(12): 4890-4896, 4924. (in Chinese))
- [13] KOPASCY J. Three-dimensional stress distribution and slip surfaces in earth works at rupture[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, 1957.
- [14] BAKER R, SHUKHA R, OPERSTEIN V, et al. Stability charts for pseudo-static slope stability analysis[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2006, 26(9): 813-823.
- [15] 周凤玺, 朱顺望, 梁玉旺, 等. 变分极限平衡法对土质边坡稳定性的精确分析[J]. 岩土工程学报, 2023, 45(7): 1341-1346. (ZHOU Fengxi, ZHU Shunwang, LIANG Yuwang, et al. Exact analysis of soil slope stability by using variational limit equilibrium method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, 45(7): 1341-1346. (in Chinese))
- [16] LI X G, LIU W N. Study on the action of the active earth pressure by variational limit equilibrium method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, 34(10): 991-1008.
- [17] 陈建功, 胡日成, 许明. 考虑合力作用点位置的主动土压力计算[J]. 工程力学, 2016, 33(11): 132-139. (CHEN Jiangong, HU Richeng, XU Ming. Active earth pressure calculation considering force point location[J]. Engineering Mechanics, 2016, 33(11): 132-139. (in Chinese))
- [18] DIXIT R K, MANDAL J N. Bearing capacity of geosynthetic-reinforced soil using variational method[J]. Geotextiles and Geomembranes, 1993, 12(6): 543-566.
- [19] 陈榕, 栾茂田, 郝冬雪, 等. 加筋地基极限承载力的变分解法[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(5): 774-779. (CHEN Rong, LUAN Maotian, HAO Dongxue, et al. The ultimate bearing capacity of reinforced foundation by variational solution[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(5): 774-779. (in Chinese))
- [20] ZHOU F X, MA Q. Exact solution for capillary interactions between two particles with fixed liquid volume[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(12): 1597-1606.
- [21] ZHOU F X, LI S R, LAI Y M. Three-dimensional analysis for transient coupled thermoelastic response of a functionally graded rectangular plate[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(16): 3990-4001.
- [22] 宋二祥, 付浩, 李贤杰. 地基承载力机理及新计算方法[J]. 岩土工程学报, 2022, 44(1): 37-44. (SONG Erxiang, FU Hao, LI Xianjie. Mechanism and new calculation method for bearing capacity of foundations[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(1): 37-44. (in Chinese))
- [23] 蒋益平, 熊巨华. 方形和圆形基础地基极限承载力分析[J]. 岩土力学, 2005, 26(12): 1991-1995. (JIANG Yiping, XIONG Juhua. Analysis of ultimate bearing capacity of square and circular foundations[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(12): 1991-1995. (in Chinese))