

DOI: 10.11779/CJGE20240012

上海黏性土水平基床比例系数 m 的反演取值及工程验证

顾晓强^{1,2}, 周赫宸^{1,2}, 何平³, 张中杰⁴, 徐中华^{5,6}, 王卫东^{1,5,6}

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 3. 中冶赛迪上海工程技术有限公司, 上海 200940; 4. 上海市城市建设设计研究总院(集团)有限公司, 上海 200125; 5. 上海基坑工程环境安全控制工程技术研究中心, 上海 200011; 6. 华东建筑设计研究院有限公司上海地下空间与工程设计研究院, 上海 200011)

摘要: 水平基床比例系数 m 是弹性地基梁法计算基坑变形的最关键参数, 然而既有规范提供的 m 取值范围大, 且尚未合理反映土体力学特性和基坑尺寸的影响。讨论了现有不同规范中 m 值规定的差异和不足, 指出比例系数 m 本质上是一个简化的工程土体变形计算参数。对于基坑工程, m 应当与土性参数、基坑开挖深度及宽度等相关。基于土体小应变硬化模型及合理的参数取值方法, 通过数值计算获取了大量基坑算例的变形数据, 再通过反分析建立了一套考虑土体参数(初始孔隙比)、基坑开挖深度及宽度的上海黏性土 m 值的实用取值方法。基于该取值方法, 采用弹性地基梁法计算了上海地区 25 个实际基坑工程围护结构的变形。结果表明, 基坑围护墙最大水平位移的计算值与实测值较为接近, 平均误差为 2.6%。该方法解决了上海地区实际基坑工程中黏性土 m 值如何准确且快速取值的难题, 也为其他地区建立类似取值方法提供了有益的借鉴。

关键词: 基坑变形; 弹性地基梁法; 水平基床比例系数 m ; 取值方法; 反演分析

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2025)06-1199-11

作者简介: 顾晓强(1981—), 男, 博士, 教授, 主要从事土的基本特性、土动力学和宏微观土力学等方面的研究工作。

E-mail: guxiaoqiang@tongji.edu.cn.

Inverse value of proportional coefficient of horizontal subgrade reaction m for Shanghai clayey soils and its engineering verification

GU Xiaoliang^{1,2}, ZHOU Hechen^{1,2}, HE Ping³, ZHANG Zhongjie⁴, XU Zhonghua^{5,6}, WANG Weidong^{1,5,6}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. CISDI Shanghai Engineering Co., Ltd., Shanghai 200940, China; 4. Shanghai Urban Construction Design & Research Institute (Group) Co., Ltd., Shanghai 200125, China; 5. Shanghai Engineering Research Center of Safety Control for Facilities Adjacent to Deep Excavations, Shanghai 200011, China; 6. Shanghai Underground Space Engineering Design & Research Institute, East China Architecture Design & Research Institute Co., Ltd., Shanghai 200011, China)

Abstract: The proportional coefficient of horizontal subgrade reaction m is a key parameter to calculate the deformation of retaining wall in excavations using the method for beams on elastic subgrade. However, the range of m value recommended in the existing design codes is quite large and does not consider the effects of soil properties and excavation dimensions. In this study, the differences and deficiencies of m value in different codes are firstly discussed, pointing out that actually m is a simplified parameter for deformation calculation in practice. For excavation, m should be related to the soil properties and excavation width and depth. Through the numerical analyses using HSS model and the appropriate soil parameters, lots of excavation deformation data are obtained by changing the excavation dimensions and void ratio of soils. Then inverse calculation is performed, and an empirical formula for m is proposed. By means of this method, the m values of the soils in 25 excavation projects in Shanghai are determined, and the associated deformations are calculated. The results show that the calculated maximum horizontal displacements of retaining wall are close to the measured ones, with an average error of 2.6%. The proposed method provides an accurate and efficient approach for determining m value for Shanghai clayey soils as well as an important reference for determining m value in other regions.

Key words: excavation deformation; method for beam on elastic subgrade; proportional coefficient of horizontal subgrade reaction; parameter determination; inverse analysis

基金项目: 国家自然科学基金项目(52178344)

收稿日期: 2024-01-04

0 引言

基坑围护结构的变形控制是基坑设计的关键内容之一。随着城市地下空间的大规模开发,为减少对邻近建构筑物的影响,基坑设计逐渐从强度控制转为变形控制^[1]。平面竖向弹性地基梁法^[2-3]以其模型简单、计算参数少而广泛用于基坑工程的变形计算。弹性地基梁法的关键是准确选取表征基坑被动区土弹簧刚度的参数,即土体水平基床系数。水平基床系数通常假定为水平基床比例系数(下文称“比例系数”) m 与计算点至基坑开挖面垂直距离的乘积。显然,比例系数 m 是弹性地基梁法计算基坑变形的最关键参数。

学者们对土体 m 值的取值开展了大量的研究。冯俊福^[4]基于反分析方法统计得到了杭州典型土 m 值的大概范围,为实际工程提供取值参考。何平^[5]对多个上海基坑工程的实测变形进行反分析,给出上海地区 m 值的概率统计分布和取值范围。袁静等^[6]考虑了应力路径、应变方向和地下水位对 m 值的影响。沈健^[7]修正了 m 值取值方法以考虑软土的流变特性。王洪新等^[8]尝试建立原位旁压试验和扁铲侧胀试验结果与基坑非线性基床系数的关系。胡琦等^[9]和邓帅^[10]指出基坑宽度会影响基床系数和比例系数的取值,这也可能解释了不同学者^[11-12]对上海地区土层 m 值反分析的结果较上海基坑规范建议值^[3]明显偏大或偏小的“矛盾”现象(见后文表 4)。王卫东等^[13]和杨光华等^[14]进一步讨论了加固土的 m 值取值方法。目前上海基坑规范^[3]根据地基土类别给出了 m 的推荐值,但其范围较大。建筑基坑支护技术规程^[2]将 m 值与土体强度指标建立关系,但 m 作为表征地基土水平刚度的参数,理论上应与土体模量相关。综上所述,至今尚未建立 m 值与土体参数、基坑深度和宽度等的定量关系,缺乏实际基坑变形分析中准确且快速的土体 m 值取值方法。

本文对比了国内不同规范对 m 值取值方法的优缺点,指出现有 m 值取值方法未能考虑基坑开挖深度、宽度的影响。采用 PLAXIS 有限元软件和小应变硬化(hardening soil model with small strain, 下文简称 HSS)模型^[15]建立基坑数值模型,通过改变基坑深度、宽度和土体参数计算了大量基坑算例变形,并根据基坑变形反演上海地区典型黏性土(②至⑤层)的 m 值。基于反演值,提出了一个能综合考虑土体特性、基坑开挖深度及宽度的 m 值经验公式,并通过上海地区 25 个实际基坑工程验证了该 m 值取值方法的合理性。

1 现有比例系数 m 的取值方法

1.1 相关规范的建议

《建筑基坑支护技术规程: JGJ 120—2012》^[2]规定:土的水平反力系数的比例系数宜按桩的水平荷载试验及地区经验取值,缺少试验和经验时,可按下列经验公式计算:

$$m = \frac{0.2\varphi^2 - \varphi + c}{v_b} \quad (1)$$

式中: m 为土的水平反力系数的比例系数 (MN/m^4); c , φ 分别为土的黏聚力 (kPa)、内摩擦角 ($^\circ$)。对黏性土采用水土合算,土的抗剪强度指标应采用三轴固结不排水抗剪强度指标 c_{cu} , φ_{cu} 或直剪固结快剪强度指标 c_{cq} , φ_{cq} (下文统称总应力指标); v_b 为挡土墙在坑底处的水平位移量 (mm), 小于 10 时取为 10。

《建筑桩基技术规范: JGJ 94—2008》^[16]规定:桩侧土水平抗力系数的比例系数 m , 宜通过单桩水平静载试验成果按下式(2)确定,当无静载试验资料时,可按表 1 取值:

$$m = \frac{\left(\frac{H_{cr}}{x_{cr}} v_x\right)^{\frac{5}{3}}}{b_0 (EI)^{\frac{2}{3}}} \quad (2)$$

式中: H_{cr} 为单桩水平临界荷载 (MN); x_{cr} 为临界荷载对应的水平位移 (m); v_x 为桩顶位移系数, 通常取 2.441; b_0 为桩身计算宽度 (m); EI 为桩身抗弯刚度 ($\text{MN}\cdot\text{m}^2$)。

表 1 《建筑桩基技术规范》^[16] m 取值规定

Table 1 m values in China's technical code for building pile foundations

地基土类别	预制桩、钢桩		灌注桩	
	$m/$ ($\text{MN}\cdot\text{m}^{-4}$)	位移/ mm	$m/$ ($\text{MN}\cdot\text{m}^{-4}$)	位移/ mm
淤泥、淤泥质土; 饱和湿陷性黄土	2~4.5	10	2.5~6	6~12
流塑、软塑状黏性土; $e>0.9$ 粉土; 松散粉细砂; 松散、稍密填土	4.5~6.0	10	6~14	4~8
可塑状黏性土、湿陷性黄土; $e=0.75\sim 0.9$ 粉土; 中密填土; 稍密细砂	6.0~10	10	14~35	3~6
硬塑、坚硬状黏性土、湿陷性黄土; $e<0.75$ 粉土; 中密的中粗砂; 密实老填土	10~22	10	35~100	2~5
中密、密实的砾砂、碎石类土			100~300	1.5~3

注: ①位移指单桩地面处水平位移, 当桩顶位移大于表列数值或灌注桩配筋率较高 ($\geq 0.65\%$) 时, m 值应适当降低, 当预制桩的水平位移小于 10 mm 时, m 值可适当提高; ②当水平荷载为长期或经常出现的荷载时, 应将表列数值乘以 0.4 采用。

上海市《基坑工程技术标准: DG/TJ 08—61—

2018》^[3]规定：水平向基床系数沿深度增大的比例系数，可根据地基土的性质，按表 2 选用。需要指出的是，上海规范对砂性土和黏性土均采用水土分算的方法，但土的抗剪指标采用总应力指标。

表 2 上海市《基坑工程技术标准》^[3] m 取值规定

Table 2 m values in Shanghai's technical code for excavation

engineering		
地基土分类		$m/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-4})$
流塑的黏性土		1~2
软塑的黏性土、松散的粉性土和砂土		2~4
可塑的黏性土、稍密~中密的粉性土和砂土		4~6
坚硬的黏性土、密实的粉性土、砂土		6~10
水泥土搅拌桩加	水泥掺量<8%	2~4
固，置换率>25%	水泥掺量>13%	4~6

由上可见，式（1）中 m 值与土体抗剪强度指标以及坑底变形大小有关，实际使用中需通过迭代求解 m 值。式（2）将 m 值与桩径和桩身模量以及桩顶位移等建立关系，但未考虑土体分层的情况，是桩侧土层抗力系数的综合体现，其实质表明 m 值是一个根据桩基变形反演的模型参数，同时其在基坑工程中的适用性也有待进一步商榷。表 1 中依据土的类别和桩顶变形量选取土体 m 值，桩顶位移越大， m 值越小，土的基床系数也越小，在一定程度上反映了土体模量随变形（或应变）增大而降低的非线性特性。

1.2 不同规范 m 取值的对比与讨论

表 3 总结了上述 3 部规范中关于 m 取值方法的优点与不足，并以上海第②层黏性土（软塑， $c_{\text{cu}}=24.2$ kPa， $\varphi_{\text{cu}}=18.4^\circ$ ，见后文表 5）为例，对比了不同规范建议的 m 值。由表 3 可见，依据式（1）、表 1、2 确定的 m 值有较大差异，必然导致实际工程中 m 值的合理选用存在较大难度。

目前对 m 值存在两种不同的观点，部分学者认为，

m 值主要根据土的种类和土的物理力学指标来确定，见表 1，2，对于同一种地基土， m 值应选取同一个值^[17]。另一种观点认为 m 值是一个综合参数，随土的种类、桩的刚度、水平位移的大小、荷载作用方式及荷载大小等因素的变化而改变^[16]，见式（2）。本文认为尽管理论上比例系数 m 是一个土体参数，但其本质上是一个假定和简化的土体变形计算参数，根据不同的测试手段（如桩的水平荷载试验和旁压试验）与应用工程类别（如桩基工程和基坑工程），其取值均会不同。若采用单桩水平荷载试验确定， m 必然与水平受荷桩的桩径、桩身抗弯刚度等有关。若采用旁压试验确定（测定水平基床系数），那么 m 值则只与土体本身物理力学性质有关，但由于旁压试验与实际工程的尺寸效应和边界条件不同，通过旁压测得的基床系数可能无法直接应用在具体工程中。涂启柱^[18]曾对原位旁压试验结果进行修正，考虑了基础尺寸的影响，推导了基础工程水平基床系数的取值方法，该成果已被纳入铁路工程相关规程^[19]。

对于基坑工程，目前上海基坑规范^[3]已给出了 m 值的建议取值区间（见表 2），总体而言，土质越硬， m 值越大，符合 m 值与土层基本物理力学性质相关的预期。但现有 m 值取值范围较大，导致取值的主观性大、准确性判断难，因此亟需建立 m 值与土性参数的经验关系式，方便其快速和准确取值。

另一方面，目前平面弹性地基梁法仅考虑了基坑宽度对等效支撑刚度大小的影响，忽略了宽度对 m 值的影响。根据第 2 节 PLAXIS 有限元计算可知，其它条件相同时，基坑宽度从 10 m 增至 200 m，其最大变形相应从 21.8 mm 增加至 80.9 mm，那么根据变形反演得到的 m 值必然也随之改变，实质上为土体模量(m

表 3 现有规范 m 取值的对比

Table 3 Comparison of m values in existing technical codes

不同方法	优点	不足	$m/(\text{MN}\cdot\text{m}^{-4})$
式（1）	m 与土体参数（抗剪强度指标）有定量关系； m 与坑底变形量相关，体现了一定的非线性	①基坑坑底处变形未知，通常取 $v_b=10$ 或迭代计算； ② m 作为表征土体水平刚度的参数，理论上应与土体模量参数相关。	7.35 (假设 $v_b=10$ mm)
式（2）	m 与桩基临界荷载、临界位移及桩身参数等建立定量关系	①水平受荷桩与基坑卸荷开挖，二者的受力机制不同，建筑桩基技术规范中 m 取值方法可能不适用于基坑工程中； ②未能考虑土体分层的情况，计算出的 m 值实质上是一个综合参数； ③板式支护结构最大变形一般在坑底附近，而非地面桩顶处。	—
表 1	根据地基土类别、桩的类型和位移给出经验取值区间；与桩顶变形量相关，体现非线性	①取值区间范围较大； ②板式支护结构最大变形一般在坑底附近，而非地面桩顶处； ③水平受荷桩与基坑开挖中围护结构的受力机制不同。	5.25 (取表 1 平均值)
表 2	根据地基土类别，给出经验取值区间	①取值区间范围较大； ②未能建立 m 值与土性参数的定量关系。	3.0 (取表 2 平均值)

值)的非线性特性。

表 4 列出了上海地区某两个不同宽度基坑工程的土体 m 值反演结果^[11-12]。由表 4 可见,对于同一层土,若不考虑基坑宽度的影响,其反演的 m 值结果将差异巨大。基坑工程中,基坑的开挖卸荷量、开挖时间和坑底隆起与基坑宽度密切相关。增大基坑宽度,通常会引起基坑开挖卸荷量、开挖时间和坑底隆起的增加,从而导致基坑变形的增大,进而影响基于变形反演得到的 m 值。

表 4 上海不同宽度基坑工程 m 反演值对比

Table 4 Comparison of m values obtained from inverse analyses of two excavations with different widths				
基坑名称	基坑宽度/m	土层编号	m 反演值/($\text{MN}\cdot\text{m}^{-4}$)	规范参考值 ^[3] /($\text{MN}\cdot\text{m}^{-4}$)
上海银行大厦基坑 ^[11]	86	④	1.10	1~2
		⑤	1.29	2~4
		⑥	1.96	4~6
长寿路基坑 ^[12]	20	④	6.00	1~2
		⑤	6.00	2~4
		⑥	8.00	4~6

2 上海典型土层比例系数 m 反演取值

本文采用有限元数值模拟结合反分析方法建立工程实用的 m 值取值方法,即通过 PLAXIS 有限元分析计算产生大量上海基坑案例的变形数据,之后根据计算的基坑变形数据,利用 ABAQUS 弹性地基梁模型结合 UCODE^[20-21]反分析软件反演 m 值,进一步建立反演的 m 值与土体初始孔隙比、基坑宽度和开挖深度的经验关系,并通过实际基坑工程进行验证。主要技术路线见下图 1。

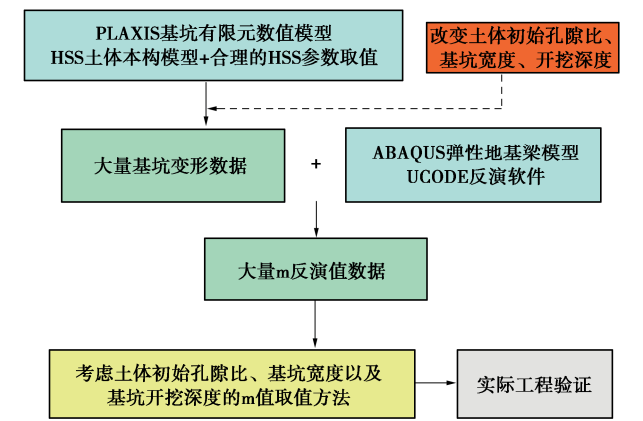


图 1 本文主要技术路线

Fig. 1 Main technical route

2.1 数值模型

图 2 给出了典型均质土基坑算例的示意图。基坑开挖深 11 m,分 5 步开挖,围护采用 0.8 m 厚的地下连续墙,竖向共设置两道支撑。为简化分析计算,采用 PLAXIS 二维数值模型,根据 Finno 等^[22]和楼春晖^[23]

研究,对于沿海地区典型软土内支撑式基坑,当基坑长度大于 5 倍开挖深度后,使用二维分析的误差可控制在 10%以内,可忽略长度方面的空间效应。

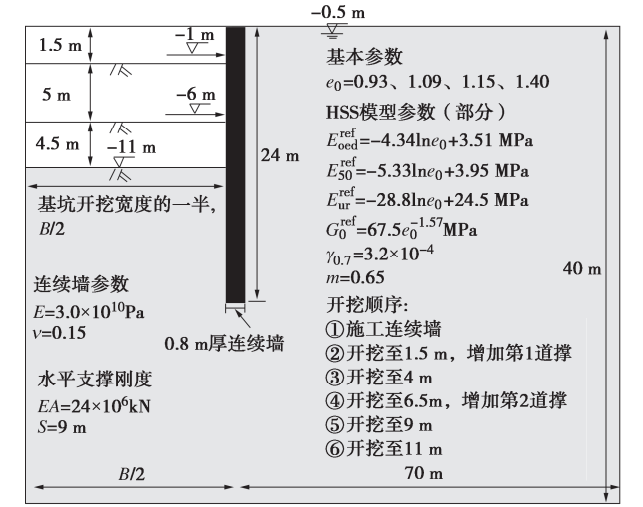


图 2 基坑有限元分析模型示意图

Fig. 2 Schematic of finite element model for excavation

土体本构采用 HSS 模型,模型参数的选取参考了顾晓强等^[24],采用其推荐的上海地区 HSS 模型参数取值方法,能较好地预测上海地区实际基坑工程的变形。因此,本研究采用该方法准确获取上海典型地层条件下基坑计算案例的变形数据,这是保证建立的 m 值取值方法准确和合理的前提。

已有研究^[24]表明,土体初始孔隙比 e_0 可较好地表征土体刚度参数的影响,因此模型中选择 e_0 作为土体基本参数。根据何平^[5]统计分析结果,上海②~⑤层黏性土的初始孔隙比 e_0 的平均值分别为 0.93, 1.15, 1.40, 1.09, 相应的黏聚力和内摩擦角可见表 5。坑外地下水位设为地表以下 0.5 m,坑内地下水位设为开挖面以下 1 m。

表 5 上海典型黏性土参数

Table 5 Typical soil parameters for Shanghai clayey soils					
土层	初始孔隙比 e_0	重度 $\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	压缩模量 E_{s1-2}/MPa	黏聚力 c_{cu}/kPa	内摩擦角 $\varphi_{cu}/(^{\circ})$
②	0.93	18.4	4.63	24.2	18.4
③	1.15	17.5	3.29	9.8	17.4
④	1.40	16.8	2.27	11.9	13.2
⑤ ₁	1.09	17.7	3.72	18.6	16.4
⑤ ₃	0.99	18.0	4.63	20.9	18.0

注:表中参数均为文献[5]统计的上海各黏性土层的平均值。

有限元计算模型的网格划分根据 Ou 等^[25]建议,在坑内采用较密的网格,有利于计算的收敛。经计算分析,坑内采用超细网格(粗糙系数 0.5),坑外采用超细网格(粗糙系数 0.7)时能够满足网格收敛性。

计算不同土层(对应不同 e_0)和不同基坑宽度 B (从 10 m 至 200 m)条件下,基坑开挖深度 H_c 分别为 1.5, 4, 6.5, 9, 11 m 时的基坑最大侧向变形,如

图3所示。

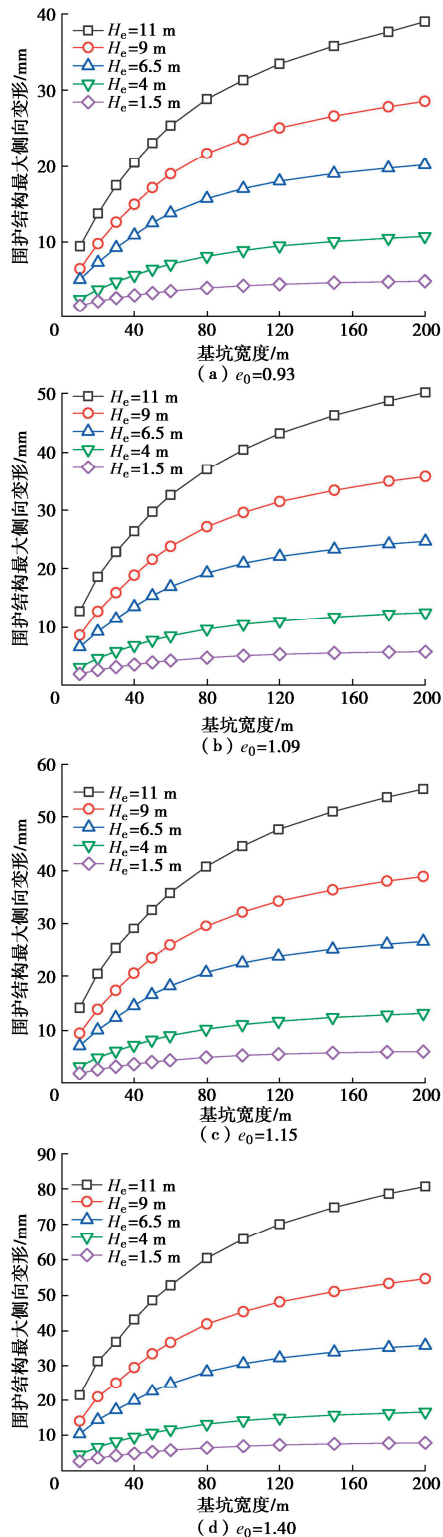


图3 不同孔隙比和基坑宽度下各开挖阶段基坑围护结构最大侧向变形

Fig. 3 Maximum staged lateral deformations of excavation under different void ratios and excavation widths

由图3可知,土体初始孔隙比相同时,同一开挖深度下,基坑最大变形随着基坑宽度增大而增大,这主要是由于基坑宽度的增加引起了基坑坑底隆起的增加,进而增大了围护结构的侧向变形;基坑宽度相同

时,同一开挖深度下,基坑最大变形随着土体初始孔隙比增大而增大。

2.2 变形反分析

在 ABAQUS 中建立平面竖向弹性地基梁模型,如图4所示。在 ABAQUS 中采用 B21 梁单元模拟基坑围护墙,采用 SPRING 2 弹簧单元模拟支撑,采用 SPRING A 弹簧单元模拟被动区土体。结合 UCODE 反演软件,对2.1节中计算得到的240个基坑算例变形数据进行反分析。具体的模型建立方法及变形反分析流程可参见文献[5]。

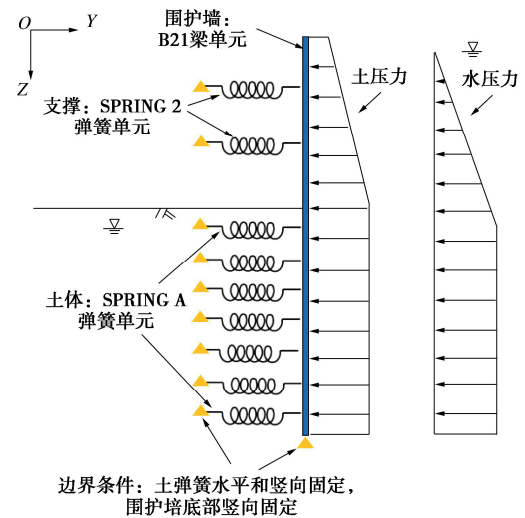


图4 基坑弹性地基梁模型示意图

Fig. 4 Method for beams on elastic subgrade of excavation

本文基坑弹性地基梁法计算均按照上海市《基坑工程技术标准》的规定,即采用水土分算,抗剪强度指标则采用总应力指标,根据表5取值。

弹性地基梁法的微分方程如下:

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} - p(z) = 0 \quad (0 < z < H) \quad (3)$$

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + b_0 m (z - H) y - p(z) = 0 \quad (H \leq z \leq H + D) \quad (4)$$

式中: EI 为围护结构的抗弯刚度 ($\text{kN} \cdot \text{m}^2$); y 表示围护结构的侧向位移 (m); z 表示计算点深度 (m); $p(z)$ 表示深度 z 处的基坑侧向荷载 (kN/m), 水土分算下为主动土压力和静水压力的总和; H 为开挖深度 (m); D 为围护结构插入深度 (m); b_0 为计算宽度 (m)。

基坑支撑反力按下式计算:

$$T_i = K_{Bi} (y_i - y_{0i}) \quad (5)$$

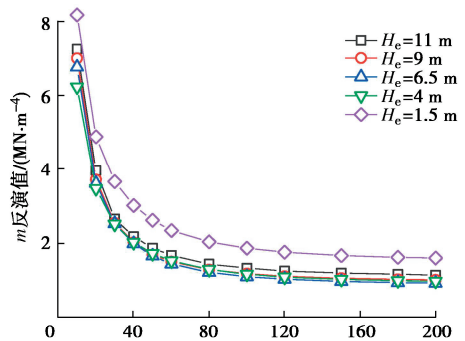
$$K_{Bi} = \frac{EA}{LS} \quad (6)$$

式中: T_i 为第 i 道支撑的弹性支座反力 (kN/m); K_{Bi} 为第 i 道支撑的弹簧刚度 (kN/m^2); $y_i - y_{0i}$ 为支撑设置后第 i 道支撑处的侧向位移 (m); E 为支撑结构弹性模量 (kN/m^2); A 为支撑截面积 (m^2); L 为支撑的计算长度 (m), 取支撑长度的一半; S 为支撑的水平间距 (m)。

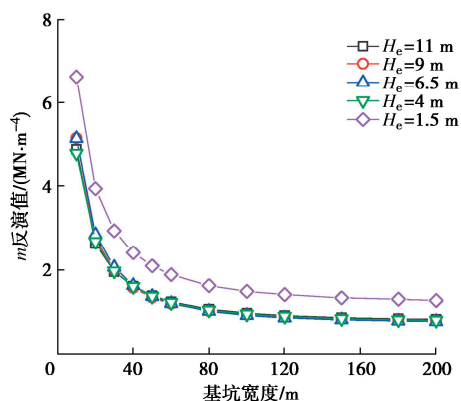
综合式(3)~(6)可知,现有基坑弹性地基梁法的变形与 m 值、水土侧向压力、围护墙抗弯刚度以及支撑弹簧刚度有关,由于后三项在反分析过程中均为已知的输入项,因此不同基坑宽度和土体初始孔隙比对变形的影响将反映在比例系数 m 上。即本文反演 m 值时综合考虑了水土侧向压力作用下产生的围护结构水平变形,以及基坑坑底隆起等因素引起的围护结构水平变形。

图5给出了不同宽度和孔隙比条件下基于基坑变形反演得到的 m 值。

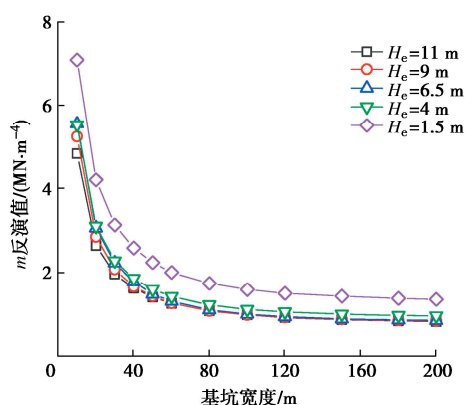
由图5可见,比例系数 m 随着基坑宽度、初始孔隙比 e_0 及基坑开挖深度 H_e 的增大而减小,反映了土体水平基床比例系数 m 的非线性特性。然而,目前规范方法未能揭示 m 与基坑宽度、开挖深度以及土性参数的变化关系。



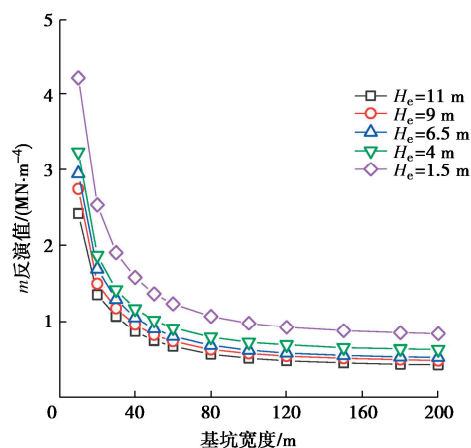
(a) $e_0=0.93$



(b) $e_0=1.09$



(c) $e_0=1.15$



(d) $e_0=1.40$

图5 不同孔隙比和基坑宽度下各开挖阶段 m 反演值

Fig. 5 The inverse calculated m -values under different conditions

3 考虑基坑尺寸和土性的 m 取值方法

根据图5结果,建立 m 值与基坑宽度 B 、初始孔隙比 e_0 、开挖深度 H_e 这3个参数的经验拟合关系:

$$\left. \begin{aligned} m &= 0.805 \cdot \left(A_1 \exp\left(-\frac{H_e}{A_2}\right) + m_{ult} \right)^{1.184}, \\ A_1 &= 3.6 \times \exp\left(-\frac{B}{36.85e_0^{2.4}}\right) + 1.6576e_0^{-2.509}, \\ A_2 &= 0.114 \times \exp(2.49e_0), \\ m_{ult} &= (50.32 - 29.645e_0) \times B^{-0.6}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: m , B , H_e 的单位分别为 MN/m^4 , m , m 。

图6对比了式(7)拟合与反演计算得到的 m 值大小,拟合误差总体小于20%,表明该经验公式拟合程度较好。

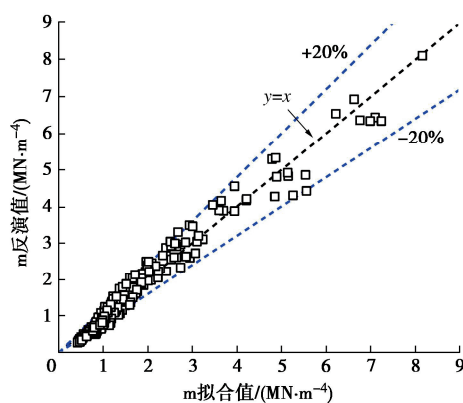


图6 拟合与反演 m 值的对比

Fig. 6 Comparison of fitted and inverse m values

4 工程验证

为验证上述 m 值取值方法的合理性,对上海地区25个实际基坑工程基于弹性地基梁法进行了变形分析,并与实测数据进行比较。以下采用两个工程为例

进行介绍, 其中计算涉及的所有参数均根据已有文献和勘察报告确定。

4.1 上海航头 H-4 地块基坑

上海航头 H-4 地块基坑^[5]面积约为 6600 m², 普遍区域开挖深度为 9.5 m, 基坑宽度约 56.4 m, 采用深 22.5 m 的钻孔灌注桩作为围护结构, 基坑西侧灌注桩桩径 850 mm, 东侧灌注桩桩径 900 mm, 地下水位位于自然地坪以下 0.5 m, 竖向共布设两道混凝土支撑, 见图 7。第一道支撑弹簧刚度为 94.6 MN/m², 第二道为 104.0 MN/m²。根据图 7 的土层信息, 按式 (7) 确定各土层 m 值见表 6。

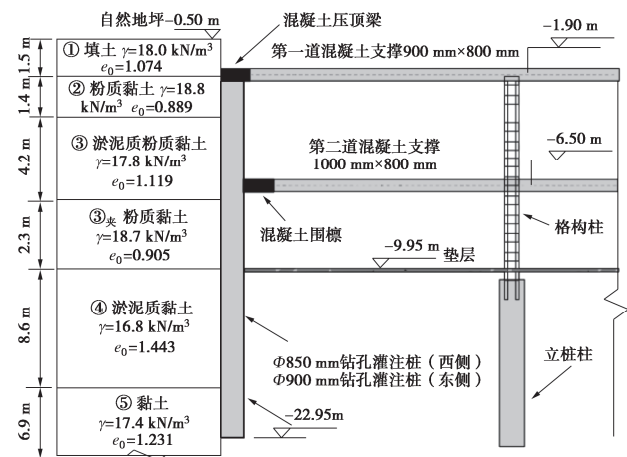


图 7 上海航头 H-4 地块基坑剖面图^[5]

Fig. 7 Profile of excavation of Shanghai Hangtou H-4 project^[5]

表 6 上海航头 H-4 地块基坑土层计算参数和 m 值

Table 6 Parameters of soils of Hangtou H-4 area

土层	重度 γ / ($\text{kN}\cdot\text{m}^{-3}$)	e_0	c / kPa	φ / ($^\circ$)	m / ($\text{MN}\cdot\text{m}^{-4}$)	规范推荐 值 ^[3] / ($\text{MN}\cdot\text{m}^{-4}$)
①填土	18.0	1.074	0	22.0	1.46	2~4
②粉质黏土	18.8	0.889	22	20.0	1.97	2~4
③淤泥质粉质黏土	17.8	1.119	13	18.0	1.34	1~2
④粉质黏土	18.7	0.905	6	30.0	1.93	2~4
⑤淤泥质黏土	16.8	1.443	11	11.5	0.57	1~2
⑥黏土	17.4	1.231	13	12.0	1.06	2~4

图 8 对比了围护结构东侧 CX1 测点和西侧 CX4 测点水平变形的实测值和计算值, 测点和计算剖面均位于基坑中间部位, 详细位置可见文献^[5]。其中, CX1 测点实测最大变形为 55.4 mm, 若 m 值按规范推荐区间的平均值计算, 最大变形为 33.0 mm, 误差为 -40.5%。按本文取值方法计算得到的最大变形为 56.7 mm, 与实测值较为接近, 误差为 2.3%。CX4 测点实测最大变形为 62.0 mm, 规范推荐值计算结果为 36.2 mm, 误差为 -41.6%。本文取值方法计算的围护结构

最大位移为 62.6 mm, 与实测值较为接近, 误差为 1.0%, 验证了本文 m 值取值方法的合理性。

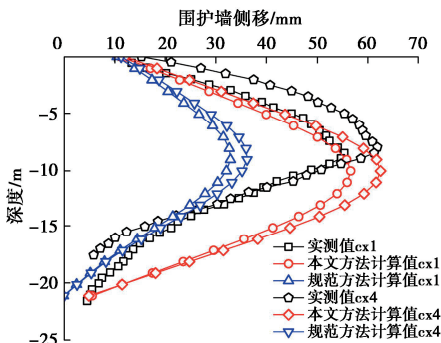


图 8 围护墙侧移的计算值和实测值的比较

Fig. 8 Calculated and measured lateral deformations

4.2 上海银行大厦基坑

上海银行大厦基坑^[11]面积约为 7454 m², 分析剖面开挖深度为 14.95 m, 基坑宽度约 86 m, 采用 28.6 m 深、0.8 m 厚地连墙作为围护结构, 地下水位位于自然地坪以下 0.5 m, 竖向共布设三道混凝土支撑, 见图 9。第一道支撑弹簧刚度为 39.7 MN/m², 第二道和第三道支撑均为 52.4 MN/m²。根据图 9 的土层信息, 按式 (7) 确定各土层 m 值见表 7。

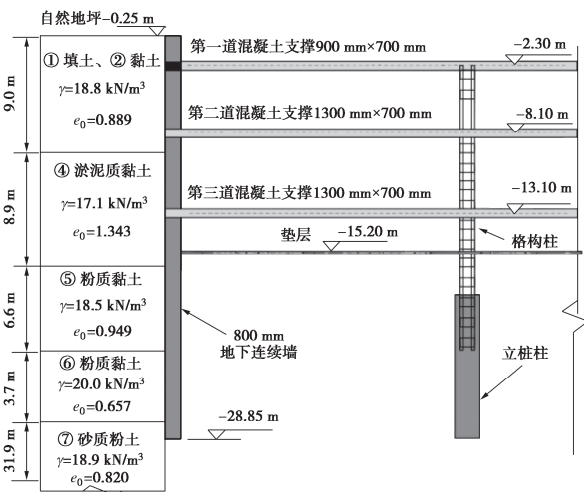


图 9 上海银行大厦基坑剖面图^[24]

Fig. 9 Profile of excavation of Shanghai Bank building^[24]

表 7 上海银行大厦基坑土层计算参数和 m 值

Table 7 Parameters of soils of Shanghai Bank building

土层	重度 γ / ($\text{kN}\cdot\text{m}^{-3}$)	e_0	c / kPa	φ / ($^\circ$)	m / ($\text{MN}\cdot\text{m}^{-4}$)	规范推荐 值 ^[3] / ($\text{MN}\cdot\text{m}^{-4}$)
①填土	18.8	0.889	6	31.0	1.46	2~4
②黏土	18.8	0.889	6	31.0	1.46	2~4
④淤泥质黏土	17.2	1.343	14	12.0	0.56	1~2
⑤粉质黏土	18.5	0.949	15	22.0	1.33	2~4
⑥粉质黏土	20.0	0.657	51	19.0	1.97	4~6
⑦ ₁ 砂质粉土	18.9	0.82	3	22.8	1.61	4~6

图 10 对比了基坑围护结构 J2 测点水平变形的实测值和计算值, 测点位于基坑中部, 具体可见文献[11]。基坑围护墙实测最大变形为 72.9 mm, 若 m 值按规范推荐区间的平均值计算, 最大变形为 56.5 mm, 误差为-22.5%。按本文 m 取值方法计算得到的围护墙最大变形为 85.7 mm, 与实测值较为接近, 误差为 17.6%, 进一步验证了本文 m 取值方法的合理性。

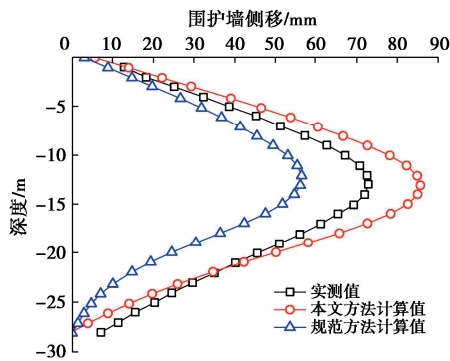


图 10 围护墙侧移的计算值和实测值的比较

Fig. 10 Calculated and measured lateral deformations

4.3 案例分析结果汇总

为进一步验证本文方法的普适性, 将 25 个上海基坑工程的变形计算值 (本文方法) 与实测值进行了对比, 其中基坑宽度涵盖 18 m 至 90 m, 开挖深度从 6.35 m 至 24.8 m, 支撑道数从 1 道至 7 道。

基坑被动区加固土体的 m 值, 根据王卫东等^[13]反演结果按下表 8 取值, 本文为简化考虑, 取相应土层的平均值。

表 8 上海地区加固土层 m 值^[13]

Table 8 m values of soils after ground improvement^[13]

加固土层	原状土性质	m 加固后/(MN·m ⁴)
③	流塑, 高压缩性	2.7~3.9, 平均值 3.3
④	流塑-软塑	2.7~3.9, 平均值 3.3
⑤ ₁	软塑	3.7~5.8, 平均值 4.8

计算结果如表 9 所示, 表明采用本文方法的基坑变形计算值与实测值总体较为接近, 25 个工程的平均误差为 2.6%。25 个工程案例中, 仅有申能能源大厦基坑的变形相对误差超过 30%, 为 32.5%, 但其绝对误差仅为 6.5 mm。

图 11 对比了 m 采取上海基坑规范推荐区间的平均值和本文所提取值方法的基坑变形计算结果。本文方法计算结果与实测值误差总体小于 30%, 而规范方法由于未能考虑基坑宽度和土性参数的影响, 导致其计算结果误差很大, 尤其当基坑变形较大时。与现有规范方法相比, 本文方法计算结果更为合理。

图 12 进一步列出了本文方法基坑变形计算值与实测值的相对误差分布区间, 25 个工程案例中, 24 个工程的相对误差小于 30%, 占比 96%; 21 个工程的相对误差小于 20%, 占比 84%。

表 9 围护墙最大侧移的计算值和实测值的比较

Table 9 Calculated and measured maximum lateral deformations

序号	基坑名称	宽度 B /m	深度 H_0 /m	实测值/ mm	计算值/ mm	相对 误差/%
1	航头 H-4 -CX1 ^[5]	56.4	9.5	62.0	62.6	1.0
2	航头 H-4 -CX4 ^[5]	56.4	9.5	55.4	56.7	2.3
3	上海银行大厦 ^[11]	86.0	14.95	72.9	85.7	17.6
4	地铁 9 号线商城 路站-B7* ^[26]	18.4	16.0	31.6	27.3	-13.6
5	地铁 9 号线商城 路站-B20* ^[26]	18.4	16.0	24.0	27.3	13.8
6	王宝和大酒店 ^[27]	60.0	14.6	70.2	64.1	-8.7
7	南京西路 1788 号 ^[27]	90.0	14.2	73.0	69.7	-4.5
8	陆家嘴 X3-2 ^[27]	76.0	21.9	72.9	77.2	5.9
9	由由国际广场 * ^[27-28]	74.0	14.6	28.3	33.2	17.3
10	兴业银行* ^[27-28]	80.0	12.2	34.0	37.0	8.8
11	申能能源大厦 * ^[29]	66.0	9.65	20.0	26.5	32.5
12	华山医院* ^[30]	34.0	10.8	21.9	25.9	18.3
13	复旦光华楼 ^[31]	46.0	9.3	31.6	25.7	-18.7
14	永银大厦* ^[32]	54.0	10.8	46.2	38.8	-16.0
15	上海证券大厦 ^[33]	67.0	12.0	70.0	70.3	0.4
16	兰馨公寓* ^[34]	50.0	9.9	17.7	21.8	23.2
17	地铁 9 号线嘉善 路站-B4* ^[35]	21.8	24.8	39.2	31.6	-19.4
18	地铁 9 号线嘉善 路站-B5* ^[35]	21.8	24.8	35.5	31.6	-11.0
19	中山医院 ^[36]	80.0	15.5	64.3	72.4	12.6
20	田林路下穿中环 线 CX14* ^[37]	18.6	8.9	20.0	19.5	-2.5
21	亚龙总部大厦* ^[38]	40	13.5	24.1	31.0	28.6
22	上海某基坑 ^[39]	30	6.35	27.0	20.0	-25.9
23	太平洋广场* ^[40]	56	10.2	27.0	26.7	-1.1
24	上海某地铁车站 ^[41]	18	14.6	45.8	43.2	-5.7
25	地铁 6 号线某基 坑* ^[42]	28	16	43.3	47.8	10.4
平均误差						2.6%

注: *表示该基坑案例被动区存在加固。

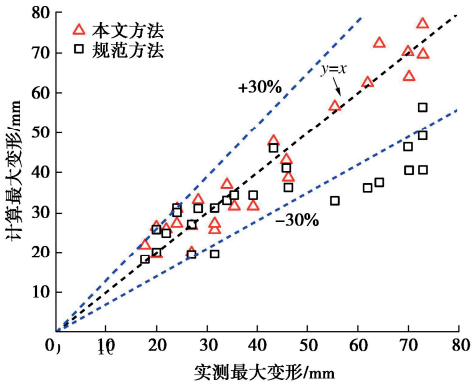


图 11 围护墙最大侧移的计算值和实测值的比较(25 个基坑)

Fig. 11 Calculated and measured maximum lateral deformations (25 excavations)

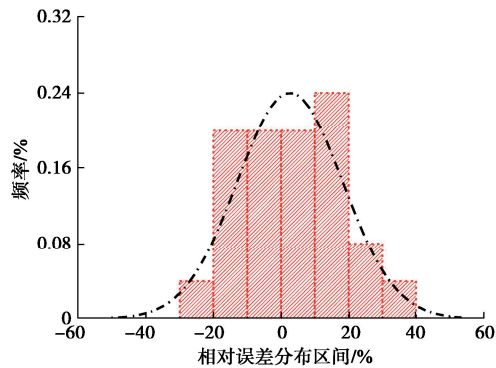


图12 变形计算值与实测值相对误差分布直方图

Fig. 12 Histogram of relative error distribution between calculated and measured deformations

5 结 论

本文首先讨论了不同规范对水平基床比例系数 m 取值的相关规定,之后通过有限元计算产生了大量的基坑变形数据,并基于基坑变形数据的反分析建立了一个综合考虑土体初始孔隙比,基坑宽度以及基坑开挖深度的 m 值经验公式,最后依据25个实际基坑工程的实测变形数据进行了验证。主要得到以下3点结论。

(1) 现有不同规范对比例系数 m 的取值规定有较多差异和不足,导致取值的主观性大、准确性判断难。比例系数 m 本质上是一个简化的工程土体变形计算参数,不同的测试手段与工程应用其取值均会不同,在基坑工程中, m 值应与土性参数和基坑尺寸等相关。

(2) 数值分析结果表明,增大基坑宽度、开挖深度和土体孔隙比 e_0 均会导致基坑变形的增大,导致 m 反演值的降低,反映了土体水平基床比例系数 m 的非线性特性,表明实际基坑工程的 m 值并非一个定值,与基坑尺寸、土层参数密切相关。基于大量基坑变形数据的反演分析,提出一个综合考虑基坑宽度、开挖深度及土体初始孔隙比的上海地区黏性土 m 值取值经验公式。

(3) 对上海地区25个实际基坑工程的变形计算分析结果表明,采用本文 m 值取值方法计算的基坑变形值与实测值较为接近,平均误差为2.6%,相对误差总体小于30%,且21个工程的误差小于20%,验证了本文方法的合理性,也为其他地区建立类似的经验公式提供了有益的借鉴。

参考文献:

[1] 徐中华,王卫东. 敏感环境下基坑数值分析中土体本构模型的选择[J]. 岩土力学, 2010, **31**(1): 258-264, 326. (XU Zhonghua, WANG Weidong. Selection of soil constitutive models for numerical analysis of deep excavations in close

proximity to sensitive properties[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(1): 258-264, 326. (in Chinese))

[2] 建筑基坑支护技术规程: JGJ 120—2012[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2012. (Technical Specification for Retaining and Protection of Building Foundation Excavations: JGJ 120—2012[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2012. (in Chinese))

[3] 基坑工程技术标准: DG/TJ 08—61—2018[S]. 上海: 同济大学出版社, 2018. (Technical Code for Excavation Engineering DG/TJ 08—61—2018[S]. Shanghai: Tongji University Press, 2018. (in Chinese))

[4] 冯俊福. 杭州地区地基土 m 值的反演分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2004. (FENG Junfu. Inversion Analysis of m Value of Foundation Soil in Hangzhou Area[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2004. (in Chinese))

[5] 何平. 上海黏土强度变形特性研究及其在基坑工程分析中的应用[D]. 上海: 同济大学, 2019. (HE Ping. Strength and Deformation Characteristics of Shanghai Clay and its Application in the Analysis of Excavation Engineering[D]. Shanghai: Tongji University, 2019. (in Chinese))

[6] 袁静,刘兴旺,益德清. 基坑开挖过程中 m 参数的选取分析[J]. 工业建筑, 2000, **30**(9):46-51. (YUAN Jing, LIU Xingwang, YI Deqing. Determination of m coefficient during excavation[J]. Industrial Construction, 2000, **30**(9):46-51. (in Chinese))

[7] 沈健. 基于“ m ”法的软土地区基坑工程时空效应研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2006. (SHEN Jian. Research on Time-Space Effect in Soft Soil Excavations Based on “ m ” Method[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2006. (in Chinese))

[8] 王洪新,李雪强,杨石飞,等. 对“应用于基坑围护结构变形计算的非线性土体弹簧模型及参数研究”讨论的答复[J]. 岩土工程学报, 2020, **42**(12): 2351-2352. (WANG Hongxin, LI Xueqiang, YANG Shifei, et al. Reply to discussion on “Nonlinear soil spring model and parameters for calculating deformation of retaining structure of foundation pits”[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, **42**(12): 2351-2352. (in Chinese))

[9] 胡琦,凌道盛,陈云敏. 基于Melan解的水平基床系数分析方法及工程运用[J]. 岩土力学, 2009, **30**(01):33-39. (HU Qi, LING Daosheng, CHEN Yunmin. Analytical method and engineering application of horizontal coefficients of subgrade reaction based on Melan’s solution[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(01):33-39. (in Chinese))

[10] 邓帅. 管廊基坑中PC组合钢管桩受力变形特性及计算方法研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2020. (DENG Shuai.

- Study on Deformation and Stiffness of PC Composite Steel Pile in Construction of Pile Gallery[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2020. (in Chinese))
- [11] 徐中华, 李靖, 王卫东. 基坑工程平面竖向弹性地基梁法中土的水平抗力比例系数反分析研究[J]. 岩土力学, 2014, **35**(增刊 2): 398-404, 411. (XU Zhonghua, LI Jing, WANG Weidong. Back analysis of proportional coefficient of horizontal resistance in vertical elastic subgrade beam method for deep excavations[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(S2): 398-404+411. (in Chinese))
- [12] 赵香山. 基坑工程变形计算的土层参数确定方法分析[D]. 上海: 上海交通大学, 2015. (ZHAO Xiangshan. Analysis of Determination Method of Soil Parameters for Deformation Calculation of Foundation Pit Engineering[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2015. (in Chinese))
- [13] 王卫东, 李青, 徐中华. 软土地层邻近隧道深基坑变形控制设计分析与实践[J]. 隧道建设(中英文), 2022, **42**(2): 163-175. (WANG Weidong, LI Qing, XU Zhonghua. Design and application of deformation control techniques for deep foundation pits adjacent to existing tunnels in soft soil[J]. Tunnel Construction, 2022, **42**(2): 163-175. (in Chinese))
- [14] 杨光华, 张文雨, 陈富强, 等. 软土基坑被动区土体不同加固宽度的 m 值计算方法研究[J]. 广东水利水电, 2020(2): 13-19. (YANG Guanghua, ZHANG Wenyu, CHEN Fuqiang, et al. Study on calculation method of m -values for different widths of passive zone reinforcement in soft soil foundation pit[J]. Guangdong Water Resources and Hydropower, 2020(2): 13-19. (in Chinese))
- [15] BENZ T. Small Strain Stiffness of Soils and Its Numerical Consequences[D]. Stuttgart: University of Stuttgart, 2006.
- [16] 建筑桩基技术规范: JGJ 94—2008[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008. (Technical Code for Building Pile Foundations: JGJ 94—2008[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2008. (in Chinese))
- [17] 胡人礼. 桥梁桩基础分析和设计[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1987. (HU Renli. Analysis and Design of Bridge Pile Foundation[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1987. (in Chinese))
- [18] 涂启柱. 旁压试验确定水平基床系数方法研究[J]. 铁道工程学报, 2018, **35**(10): 20-26. (TU Qizhu. Research on the testing method for determining the coefficient of horizontal subgrade reaction with the pressuremeter test[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2018, **35**(10): 20-26. (in Chinese))
- [19] 铁路工程地质原位测试规程: TB 10018—2018[S]. 北京: 中国铁道出版社, 2018. (Code for In-Site Testing of Railway Engineering Geology: TB 10018—2018[S]. Beijing: China Railway Publishing House, 2018. (in Chinese))
- [20] POETER E P, HILL M C. Documentation of UCODE: A Computer Code for Universal Inverse Modeling[M]. Denver, Colorado: DIANE Publishing, 1998.
- [21] POETER E P, HILL M C, LU D, et al. UCODE_2014, with New Capabilities to Define Parameters Unique to Predictions, Calculate Weights Using Simulated Values, Estimate Parameters with SVD, Evaluate Uncertainty with MCMC, and More[R]. Golden, Colorado: Integrated Groundwater Modeling Center (IGWMC) of the Colorado School of Mines, 2014.
- [22] FINNO R J, BLACKBURN J T, ROBOSKI J F. Three-dimensional effects for supported excavations in clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, **133**(1): 30-36.
- [23] 楼春晖. 软土地区深开挖空间变形特性及环境影响分析[D]. 杭州: 浙江大学, 2019. (LOU Chunhui. Investigation of Spatial Deformation Characteristics and Environmental Effects Due to Deep Excavation in Soft Soil Area[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2019. (in Chinese))
- [24] 顾晓强, 吴瑞拓, 梁发云, 等. 上海土体小应变硬化模型整套参数取值方法及工程验证[J]. 岩土力学, 2021, **42**(3): 833-845. (GU Xiaoqiang, WU Ruituo, LIANG Fayun, et al. On HSS model parameters for Shanghai soils with engineering verification[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, **42**(3): 833-845. (in Chinese))
- [25] OU C Y, CHOIU D C, WU T S. Three-dimensional finite element analysis of deep excavations[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **122**(5): 337-345.
- [26] TAN Y, WEI B. Observed behaviors of a long and deep excavation constructed by cut-and-cover technique in shanghai soft clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, **138**(1): 69-88.
- [27] 王浩然. 上海软土地区深基坑变形与环境影响预测方法研究[D]. 上海: 同济大学, 2012. (WANG Haoran. Prediction of Deformation and Response of Adjacent Environment of Deep Excavations in Shanghai Soft Deposit[D]. Shanghai: Tongji University, 2012. (in Chinese))
- [28] 徐中华. 上海地区支护结构与主体地下结构相结合的深基坑变形性状研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2007. (XU Zhonghua. Study on Deformation Behavior of Deep Foundation Pit Combined with Supporting Structure and Main Underground Structure in Shanghai Area[D]. Shanghai:

- Shanghai Jiao Tong University, 2007. (in Chinese))
- [29] 王浩然, 徐中华. 复杂环境条件下的基坑工程设计与实测分析[J]. 地下空间与工程学报, 2011, 7(5): 968-976. (WANG Haoran, XU Zhonghua. Design and monitoring of the deep excavation in complicated environment[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2011, 7(5): 968-976. (in Chinese))
- [30] 王浩然, 王卫东, 徐中华. 基坑开挖对邻近建筑物影响的三维有限元分析[J]. 地下空间与工程学报, 2009, 5(增刊 2): 1512-1517. (WANG Haoran, WANG Weidong, XU Zhonghua. Three dimensional analysis of the influence of deep excavation on adjacent building[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 5(S2): 1512-1517. (in Chinese))
- [31] 刘 征. 深基坑支护时间效应的有限差分法分析[D]. 上海: 同济大学, 2005. (LIU Zheng. Analysis of Time Effect of Deep Excavation by Finite Difference Method[D]. Shanghai: Tongji University, 2005. (in Chinese))
- [32] 陈 洋. 深基坑开挖数值模拟与实测研究[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 1999. (CHEN Yang. Numerical Simulation and Measurement of Deep Excavation[D]. Xi'an: Xi'an University of Architecture and Technology, 1999. (in Chinese))
- [33] 赵锡宏, 陈志明, 胡中雄, 等. 高层建筑深基坑围护工程实践与分析[M]. 上海: 同济大学出版社, 1996. ZHAO Xihong, CHEN Zhiming, HU Zhongxiong, et al. Practice and Analysis of Deep Foundation Pit Enclosure Engineering of High-Rise Building[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1996. (in Chinese))
- [34] 李进军, 王卫东, 邸国恩, 等. 基坑工程对邻近建筑物附加变形影响的分析[J]. 岩土力学, 2007, 28(增刊 1): 623-629. (LI Jingjun, WANG Weidong, DI Guo'en, et al. Analysis of the influence of excavation engineering on additional deformation of adjacent buildings[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(S1): 623-629. (in Chinese))
- [35] TAN Y, ZHU H H, PENG F L, et al. Characterization of semi-top-down excavation for subway station in Shanghai soft ground[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2017, 68(1): 244-261.
- [36] 王国粹, 梁志荣, 魏 祥. 上海中山医院基坑逆作法施工时间效应分析[J]. 岩土力学, 2014, 35(增刊 2): 495-500. (WANG Guocui, LIANG Zhirong, WEI Xiang. Study of time effect on top-down excavation of Shanghai Zhongshan Hospital[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(S2): 495-500. (in Chinese))
- [37] 李雪强. 基坑围护结构变形计算中的非线性土体弹簧及工程应用[D]. 上海: 上海大学, 2020. (LI Xueqiang. Nonlinear Soil Spring in Deformation Calculation of Foundation Pit Retaining Structure and its Engineering Application[D]. Shanghai: Shanghai University, 2020. (in Chinese))
- [38] 顾开云, 许 磊. 复杂条件下基坑变形控制——亚龙总部大楼基坑工程设计研究[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(增刊 1): 1577-1581. (GU Kaiyun, XU Lei. Displacement control under deep foundation pits complicated conditions—Design of the foundation pit of Yalong General Headquarters Building[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(S1): 1577-1581. (in Chinese))
- [39] 王 健. 上海某基坑 SMW 围护的实测与分析[J]. 工业建筑, 2001, 31(2): 27-30. (WANG Jian. Measurement and analysis of internal forces and deformations for a certain deep excavation SMW supporting structure in Shanghai[J]. Industrial Construction, 2001, 31(2): 27-30. (in Chinese))
- [40] 陈光敬, 胡中雄, 于 立. 采用分层地基系数的多支撑支护结构分析[J]. 岩土力学, 1997, 18(4): 1-7. (CHEN Guangjing, HU Zhongxiong, YU Li. Analysis of multi-braced retaining structure for layered soil based upon soil coefficient method[J]. Rock and Soil Mechanics, 1997, 18(4): 1-7. (in Chinese))
- [41] 史世雍. 软土地区深基坑支护体系安全性状动态分析[D]. 上海: 同济大学, 2007. (SHI Shiyong. Dynamic Analysis of Safety Characteristics of Deep Foundation Pit Supporting System in Soft Soil Area[D]. Shanghai: Tongji University, 2007. (in Chinese))
- [42] 刘 燕, 刘国彬, 孙晓玲, 等. 考虑时空效应的软土地区深基坑变形分析[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(增刊 1): 1433-1436. (LIU Yan, LIU Guobin, SUN Xiaobin, et al. Analysis of deformation laws by using the rule of time-space effect in soft soil excavation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(S1): 1433-1436. (in Chinese))