

DOI: 10.11779/CJGE2023S20016

# WIB 在动力机器荷载激励下的远场被动隔振分析

陈 娟<sup>1,2</sup>, 吴昱洁<sup>1,2</sup>, 高广运<sup>\*3</sup>, 宋 耀<sup>1,2</sup>

(1. 山东建筑大学土木工程学院, 山东 济南 250101; 2. 山东建筑大学建筑结构加固改造与地下空间工程教育部重点实验室, 山东 济南 250101;  
3. 同济大学土木工程学院, 上海 200092)

**摘 要:** 为研究波阻板在动力机器荷载作用下的被动隔振效果, 通过数值模拟的方法, 建立了动力机器基础-WIB-土体的三维有限元模型, 计算分析动力机器激励作用下埋置波阻板对远场地表振动传递阻隔的效果, 研究不同参数条件对波阻板隔振效果的影响。结果表明: 竖向动力机器荷载作用下, 在被保护体下方地基中设置波阻板对地表竖向和水平向振动具有一定的阻隔作用, 整体隔振效果竖向优于水平向; 调整波阻板厚度、宽度及埋深均对被动隔振效果有影响, 随波阻板厚度增加, 波阻板上方地表的隔振效果基本呈增加趋势; 波阻板宽度增大对上方地表振动的阻隔区域有扩张趋势, 达到 4 倍瑞利波长则会明显放大波阻板区域的地表振动; 波阻板浅埋时能够有效阻隔振动波, 波阻板后方地表的隔振效果明显优于波阻板上方。

**关键词:** 动力机器基础; WIB; ABAQUS; 三维有限元模型; 隔振

**中图分类号:** TU411 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2023)S2-0128-06

**作者简介:** 陈 娟(1989—), 女, 博士, 讲师, 硕士生导师, 主要从事环境振动控制与屏障隔振方面的研究工作。E-mail: chenjuanj@126.com。

## Far-field passive vibration isolation of WIB under dynamic machine loads

CHEN Juan<sup>1,2</sup>, WU Yujie<sup>1,2</sup>, GAO Guangyun<sup>3</sup>, SONG Yao<sup>1,2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China; 2. Key Laboratory of Building Structural Retrofitting and Underground Space Engineering (Shandong Jianzhu University), Ministry of Education, Jinan, 250101, China; 3. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai, 200092, China)

**Abstract:** In order to study the passive vibration isolation effects of wave impeding block(WIB) under dynamic machine load, a 3D finite element model for power machine foundation-WIB-soil is established by using the numerical simulation method. The effects of the buried WIB used for dynamic machine excitation on far field surface vibration transmission barrier are calculated and analyzed, and the influences of different parameters on the vibration isolation effects of the WIB are studied. The results show that under the vertical dynamic machine loads, the WIB installed in the foundation under the protected body has certain barrier effects on the vertical and horizontal vibrations of the surface, and the overall vibration isolation effects is better in the vertical than in the horizontal. Adjusting the thickness, width and buried depth of the WIB has effects on the passive vibration isolation effects. With the increase of the thickness of the WIB, the vibration isolation effects of the surface above the WIB basically increase. When the width of the WIB increases, the barrier region of the surface vibration above the WIB expands. When the depth of the WIB up to 4 times the Rayleigh wavelength, the surface vibration in the region of the WIB will be amplified obviously. When it is shallowly buried, the WIB can effectively block the vibration waves, and the vibration isolation effects behind the WIB are obviously better than those above the WIB.

**Key words:** dynamic machine foundation; WIB; ABAQUS; 3D finite element model; vibration isolation

## 0 引 言

随着中国工业领域的不断发展, 对大型动力设备(如大型超重力离心机、地震模拟振动台等科研设备, 轴流压缩机等工业设施)的使用需求逐渐提高, 大型动力设备应用所引发的环境振动问题出现地也愈发频繁, 这对人们的生产生活都造成了许多不利影响, 如

破坏邻近建筑物及地下管线, 影响人们的身体健康、精密仪器设备的正常使用等。因此, 对大型动力机器

**基金项目:** 国家自然科学基金面上项目(51978510, 42277130); 山东省自然科学基金青年项目(ZR2020QE264); 山东省高等学校青年创新团队发展计划项目(2023KJ123)

**收稿日期:** 2023-11-30

**\*通信作者** (E-mail: gaoguangyun@263.net)

引发的环境振动问题进行控制, 采取有效的隔减振措施具有重要意义。

波阻板作为一种连续屏障, 能够对土体中的振动波进行有效控制, 学者们已做了不少研究。最初, Chouw 等<sup>[1]</sup>提出了截止频率的概念, 可用一种人工刚性岩对土体中的振动波进行阻隔, 并通过二维频域边界元法验证了这种人工刚性岩的隔振效果优于空沟。Schimid 等<sup>[2]</sup>将其命名为波阻板, 比较分析了其主动隔振与被动隔振的隔振效果, 结果证明当 WIB 放置于被保护的建筑物下方时也有具有隔振效果。Takemiya 等<sup>[3]</sup>提出了一种蜂窝状波阻板 (honeycomb WIB) 的概念, 证明其对高铁低频振动能够有效阻隔。Peplow 等<sup>[4]</sup>采用边界积分方程法研究了二维双层波阻板的主动隔振效果。高广运等<sup>[5-8]</sup>、Gao 等<sup>[9-10]</sup>利用薄层法对弹性地基中波阻板的主动隔振效果进行了研究; 考虑了土与结构的相互作用, 分别建立二维和三维层状地基的半解析边界元模型, 分析了波阻板在层状地基中的隔振效果; 研究了轨道交通荷载作用下, 波阻板被安置于轨道下方的路基中时的隔振性能; 建立了多种形式动力机器基础荷载作用下波阻板主动隔振的数值模型, 并开展了波阻板隔振现场模型试验研究。李宁等<sup>[11]</sup>通过现场试验研究了水平激振作用下波阻板的主动隔振效果, 并得出了波阻板埋深较浅时隔振效果更好的结论。周凤玺等<sup>[12]</sup>、马强等<sup>[13]</sup>、Ma 等<sup>[14]</sup>提出梯度波阻板、含液饱和波阻板以及空沟-波阻板联合隔振屏障的概念, 并研究了其地面振动控制的效果。高盟等<sup>[15]</sup>提出一种带孔 WIB 与 Duxseal 材料相结合的波阻板 (DXWIB), 并展开现场试验, 分析得出其在竖向激振下有效提高了减振频宽。江烨等<sup>[16]</sup>通过建立含波阻板的非饱和地基数学模型, 研究了 P 波入射下波阻板在非饱和地基中的隔振效果。时刚等<sup>[17]</sup>通过频域弹性边界元法研究了波阻板对弹性地基中瑞利波的远场阻隔效果, 得出了波阻板设置在被保护体下方能起到明显隔振效果的结论。

振动波传播至波阻板界面会发生复杂的反射、干涉等现象, 目前针对波阻板的研究多集中于主动隔振, 远场被动隔振仅有理论解, 仍缺少具有针对性的被动隔振试验及数值模拟的相关工作。本文利用数值模拟的方法研究大型动力机器激励下波阻板的被动隔振效果, 并考虑波阻板尺寸及埋深因素对隔振效果的影响, 本文成果将为波阻板被动隔振的工程应用提供参考。

# 1 计算模型的建立

## 1.1 模型参数

本文中模型各部件均为各向同性的均质线弹性

体, 相关材料参数按表 1 取值。为更好地模拟振动波在地基中经几何阻尼和材料阻尼影响而发生的衰减情况, 参考文献[18]对各部件设定瑞利阻尼, 土体黏滞阻尼比取为  $\zeta=0.05$ , 相关的阻尼系数经计算一同列于表 1 中, WIB 部分参数计算方式见 1.2 节。基础采用强度等级为 C30 的混凝土, 波阻板采用 C25 混凝土。

表 1 模型材料参数表

| Table 1 Parameters of model materials |  |      |              |          |                 |
|---------------------------------------|--|------|--------------|----------|-----------------|
| 材料                                    | 密度/<br>( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) | 泊松比  | 弹性模量/<br>MPa | $\alpha$ | $\beta/10^{-4}$ |
| 土体                                    | 1800                                     | 0.35 | 124          | 2.42     | 1.53            |
| 基础                                    | 2500                                     | 0.2  | 28           | 1.45     | 0.92            |
| WIB                                   | 2400                                     | 0.22 | 2240         | 1.45     | 0.92            |

## 1.2 模型建立

基于有限元计算软件 ABAQUS, 建立大型动力机器基础-WIB-土体三维模型, 整体模型见图 1。考虑到模型为理想弹性土体, 可将振源设置在模型中央, 一侧作为自由场, 一侧设置 WIB 进行隔振性能考察, 选定土体模型尺寸为  $X$  向 240 m,  $Y$  向 40 m,  $Z$  向 30 m。动力机器基础尺寸为 20 m $\times$ 15 m $\times$ 8 m, 中间挖空 6 m $\times$ 6 m $\times$ 3 m 以放置动力设备。根据前述对波阻板主动隔振的已有研究成果, 波阻板对低频振动的阻隔效果较优, 因此本文主要分析波阻板在低频荷载作用下的表现, 在基础质心设置一 16 Hz (土中瑞利波速  $v_R=150$  m/s) 的竖向正弦荷载, 大小为 1 kN。

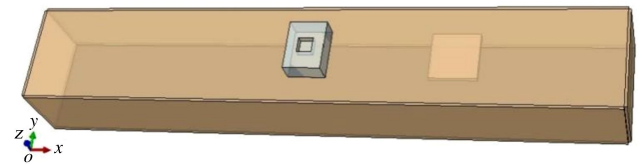


图 1 动力机器基础-WIB-土体三维模型

Fig. 1 Three-dimensional model for power machine foundation-WIB- soil

采用土体瑞利波波长 ( $L_R=9.33$  m) 对波阻板的相关参数进行无量纲处理: 无量纲埋深  $H = h/L_R$ , 无量纲边长  $W=w/L_R$ , 无量纲厚度  $T= t/L_R$ 。本文中 WIB 的无量纲基本尺寸依据文献[2]按表 2 取值。

表 2 WIB 基本参数

| Table 2 Basic parameters of WIB |              |        |
|---------------------------------|--------------|--------|
| 参数                              | 无量纲尺寸(单位: 1) | 模型尺寸/m |
| 波阻板埋深                           | 0.1          | 0.9    |
| 波阻板厚度                           | 0.2          | 1.9    |
| 波阻板厚度                           | 2            | 18.7   |

模型采用八节点六面体单元 (C3D8) 进行网格划分, 为保证计算精度的同时提高计算效率, 将振源附

近及观测区域的网格尺寸设置 0.5 m, 较远处区域网格尺寸放宽至 3 m, 得到基础模型 18336 个单元, 含 WIB 的土体模型共 277106 个单元。



图 2 模型网格划分

Fig. 2 Model meshing

本文主要研究波阻板的隔振效果, 故将基础简单明置, 基础底部与土体的接触面属性设置采用“罚”函数, 设置摩擦系数, WIB 与土体间采用绑定接触。为消除模型边界反射振动波所致对计算结果的影响, 采用等效一致三维黏弹性边界单元<sup>[19]</sup>, 单元厚度取为 1 m。

## 2 模型验证

为验证本文模型建立方法的正确性, 依据上文建模方法建立三维模型, 与王贻荪对 Lamb 问题的精确解答<sup>[20]</sup>进行对比。结果如图 3 所示, 模型计算结果与王贻荪解相对吻合, 得以验证本文模型的建立方法是正确的。

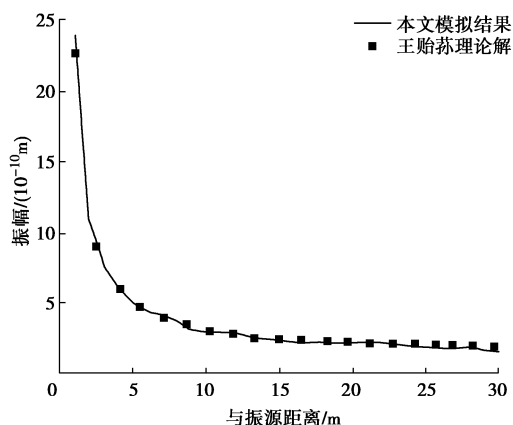


图 3 模型验证结果对比

Fig. 3 Verification of proposed model

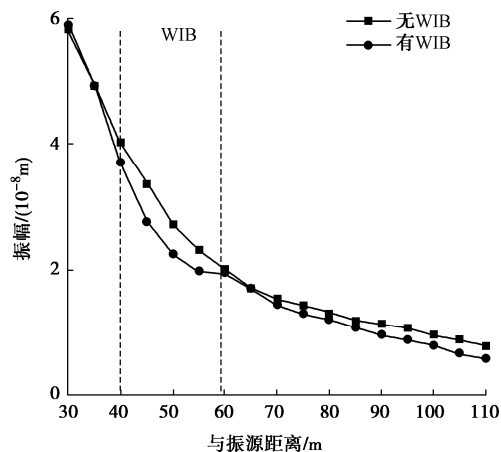
## 3 有限元计算分析及结果

### 3.1 波阻板被动隔振分析

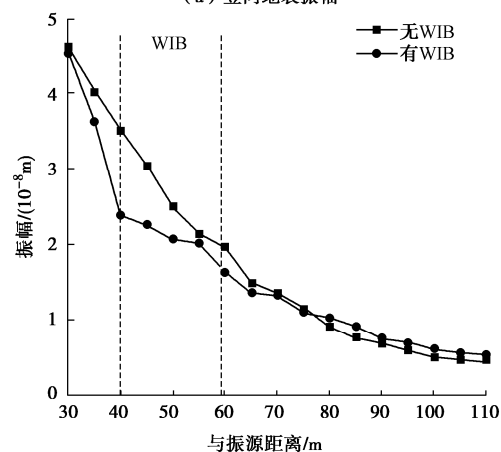
采用上述基本参数进行模拟计算, 图 4 为自由场及设置 WIB 后的地表振幅对比。

由图 4 的计算结果可看出, 设置 WIB 后的竖向、

水平向地表振幅均有所减小, 且 WIB 上方对振动波的阻隔效果最好, 此处水平向的隔振效果明显优于竖向, 振动幅值减小近 35%, 而 WIB 界面前方的竖向振幅、WIB 后方的水平向振幅都出现了高于自由场的现象, 这是由于振动波在传播至 WIB 边缘时发生反射、散射等, 致使这部分区域没有隔振效果, 甚至有可能将振动放大。



(a) 竖向地表振幅



(b) 水平向地表振幅

图 4 竖向激振作用下设置 WIB 前后地表振幅对比

Fig. 4 Comparison of surface amplitudes before and after WIB set under vertical excitation

总体而言, 当利用 WIB 进行远场隔振时, WIB 对方地表具有一定的隔振效果, 下面便将分别讨论波阻板宽度、厚度、埋深及剪切模量对 WIB 被动隔振效果的影响。

### 3.2 参数分析

为研究分析各因素对波阻板远场被动隔振效果的影响, 在分析模型中某一参数影响时, 其余参数固定不变。隔振效果评价采用振幅衰减系数  $A_R$ <sup>[21]</sup>来衡量:

$$A_R = \frac{\text{有屏障时测点的振幅}}{\text{无屏障时测点的振幅}}$$

#### (1) WIB 厚度对隔振效果的影响

图 5, 6 为 WIB 无量纲厚度分别取  $T=0.1, 0.2, 0.4, 0.6$  时, 振幅衰减系数随与振源距离的变化曲线。

由图 5, 6 可见, WIB 上方地表的竖向振幅衰减系数随着波阻板厚度的增大基本呈现减小的趋势, 厚度较小 (即  $T=0.1$ ) 时, 对地表上方的隔振效果甚微, 波阻板边缘还使振动出现了放大的现象, 说明波阻板厚度的选取不宜过小; 当无量纲厚度  $T>0.1$  时, 波阻板对上方地表的竖向振动隔振效果明显,  $T=0.6$  时振动衰减系数可达 0.74, 较无量纲厚度为 0.4 时的隔振效果提高了 11%; 波阻板后方地表的竖向隔振效果随与振源的距离增大而提高, 不过无量纲厚度为 0.6 时, 与振源距离 90 m 后竖向振动的隔振效果开始减弱。波阻板对上方地表水平向振动的隔振效果随无量纲厚度变化得并不明显, 后方地表基本没有有隔振效果, 并出现无量纲厚度增大振动反而增大的现象。

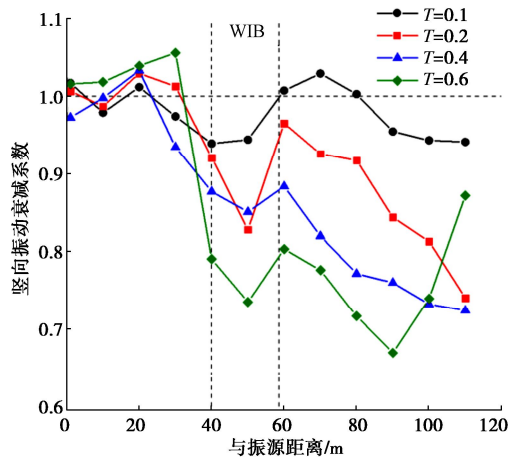


图 5 不同 WIB 厚度时竖向  $A_R$  随距离的变化曲线

Fig. 5 Variation curves of vertical  $A_R$  with distance under different WIB thicknesses

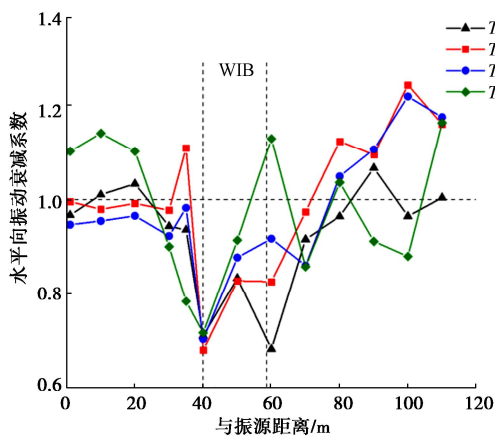


图 6 不同 WIB 厚度时水平向  $A_R$  随距离的变化曲线

Fig. 6 Variation curves of horizontal  $A_R$  with distance under different WIB thicknesses

综上, 增加波阻板厚度可以提升波阻板的远场隔振效果, 但结合上述分析以及成本问题, 波阻板应用在远场中应尽可能将无量纲厚度控制在 0.1~0.4 之

间。

### (2) WIB 宽度对隔振效果的影响

考虑到振动波在土体中的传播特性及波阻板的隔振原理, 此部分主要讨论波阻板宽度, 即波阻板沿振动波由振源向被保护体径传递方向 ( $X$  向) 的长度。波阻板无量纲宽度  $W$  分别取为 0.5, 1, 2, 4, 计算结果见图 7, 8。

根据结果, 无量纲宽度小于 2 时对竖向振动的隔振效果影响不大, 对上方地表水平向振动的阻隔区域有随宽度增大而扩张的趋势, 隔振效果也随之提升, 对波阻板后方地表基本未起到阻隔作用; 无量纲宽度  $W=4$  时竖向振动发生明显增大, 振动衰减系数在波阻板边缘处甚至达到 1.37, 这种现象可能是由于波阻板尺寸过大, 振动波在板表面反射产生次生波, 未经土体完全衰减便传播至地表而发生。

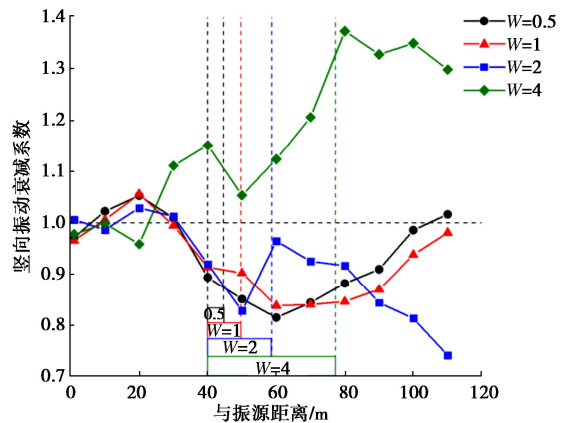


图 7 不同 WIB 宽度时竖向  $A_R$  随距离的变化曲线

Fig. 7 Variation curves of vertical  $A_R$  with distance under different WIB widths

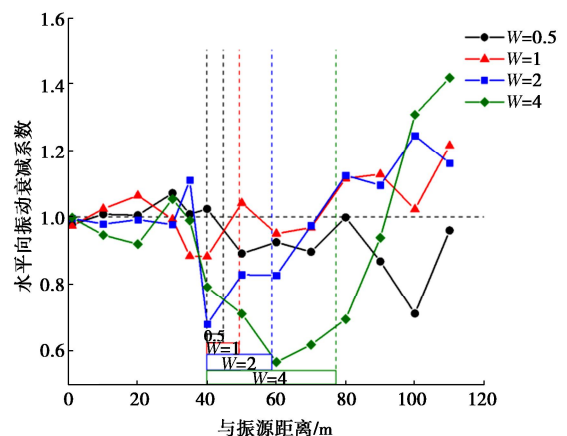


图 8 不同 WIB 宽度时水平向  $A_R$  随距离的变化曲线

Fig. 8 Variation curves of horizontal  $A_R$  with distance under different WIB widths

### (3) WIB 埋深对隔振效果的影响

WIB 无量纲埋深分别取为 0.05, 0.1, 0.2, 0.4 时, 振幅衰减系数随与振源距离的变化曲线见下图 9, 10。



从图 9, 10 中可以看出, 不同波阻板埋深时振动衰减系数随与振源距离的变化趋势基本一致, 将波阻板浅埋 (即  $H < 0.2$ ) 时, 波阻板对方地表竖向振动的阻隔作用并不显著, 隔振效果主要体现在波阻板后方地表; 埋深较大 ( $H=0.6$ ) 时, 竖向和水平向的振动衰减系数都呈现大幅度的波动, 土体中的振动情况较为复杂。因此, 波阻板应进行适当浅埋, 以实现较好的隔振效果。

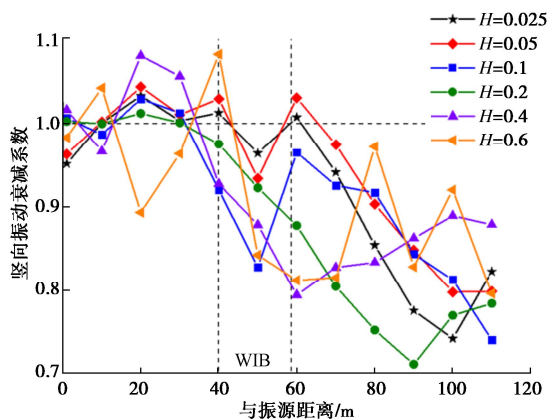


图 9 不同 WIB 埋深时竖向  $A_R$  随距离的变化曲线

Fig. 9 Variation curves of vertical  $A_R$  with distance under different WIB depths

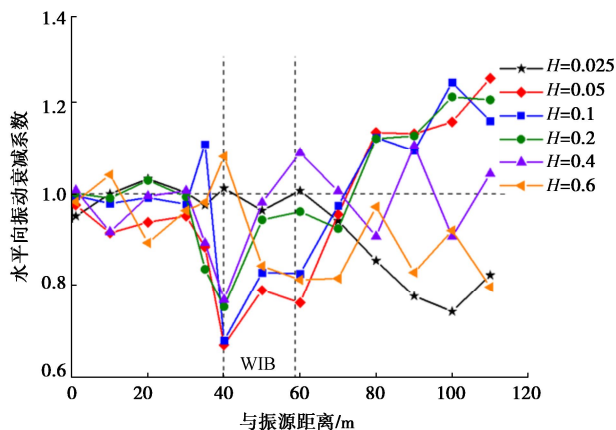


图 10 不同 WIB 埋深时水平向  $A_R$  随距离的变化曲线

Fig. 10 Variation curves of horizontal  $A_R$  with distance under different WIB depths

## 4 结 论

本文基于有限元计算软件 ABAQUS 建立了动力机器基础-WIB-土体三维有限元模型, 对竖向动力机器荷载作用下波阻板的被动隔振效果以及波阻板尺寸、埋深对隔振效果的影响进行了计算分析, 得出以下结论。

(1) 竖向动力机器荷载作用下, 在被保护体下方地基中设置波阻板对地表竖向和水平向振动具有一定

的阻隔作用, 对波阻板上方地表的隔振效果优于后方地表, 整体而言竖向隔振效果要优于水平向。

(2) 调整波阻板厚度、宽度及埋深均对被动隔振效果有影响, 随波阻板厚度增加, 波阻板上方地表的隔振效果基本呈增加趋势; 波阻板后方 10 m 内地表的隔振效果略弱, 竖向上在波阻板 10 m 之后的隔振效果超过上方地表的, 对水平向则出现振动放大。

(3) 波阻板宽度增大对振动波的阻隔并无明显的提升效果, 仅可见对方地表振动的阻隔区域有扩张趋势, 宽度较小时对波阻板后方地表基本未起到阻隔作用; 宽度达到 4 倍瑞利波长时竖向振动在整个波阻板区域及后方的地表都明显放大, 因此需合理设计波阻板尺寸, 不宜过大。

(4) 波阻板埋置深度较大时土体中的振动情况较为复杂, 振幅随与距离变化出现较大波动; 波阻板浅埋时能够有效阻隔振动波, 波阻板后方地表的隔振效果明显优于波阻板上方。

## 参考文献:

- [1] CHOUW N, LE R, SCHMID G. Propagation of vibration in a soil layer over bedrock[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 1991, 8(3): 125-131.
- [2] SCHMID G, CHOU W N, LE R. Shielding of structures from soil vibrations[C]// Soil Dynamic and Earthquake Engineering V, Proc Int Conf on Soil Dynamics and Earthquake Engineering. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1991: 651-662.
- [3] TAKEMIYA H, JIANG J Q. Wave impeding effect by buried rigid block and response reduction of dynamically excited pile foundation[J]. Doboku Gakkai Ronbunshu, 1993, 1993(477): 45-52.
- [4] PELOW A T, JONES C J C, PETYT M. Surface vibration propagation over a layered elastic half-space with an inclusion[J]. Applied Acoustics, 1999, 56(4): 283-296.
- [5] 高广运, 李 伟. 二维地基波阻板隔振分析[J]. 地震工程与工程振动, 2005, 25(2): 130-135. (GAO Guangyun, LI Wei. 2-D analysis of ground vibration isolation using wave impeding block[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2005, 25(2): 130-135. (in Chinese))
- [6] 高广运, 冯世进, 李 伟, 等. 二维层状地基波阻板隔振分析[J]. 振动工程学报, 2007, 20(2): 174-179. (GAO Guangyun, FENG Shijin, LI Wei, et al. 2-D analysis of vibration isolation by wave impeding block in layered ground[J]. Journal of Vibration Engineering, 2007, 20(2): 174-179. (in Chinese))

- [7] 高广运, 冯世进, 李 伟, 等. 三维层状地基竖向激振波阻板主动隔振分析[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(4): 471-476. (GAO Guangyun, FENG Shijin, LI Wei, et al. 3D analysis of active vibration isolation with wave impeding block in layered ground under vertical loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(4): 471-476. (in Chinese))
- [8] 高广运, 陈功奇, 张 博. 列车荷载下竖向非均匀地基波阻板主动隔振分析[J]. 振动与冲击, 2013, **32**(22): 57-62. (GAO Guangyun, CHEN Gongqi, ZHANG Bo. Active vibration isolation using WIB in non-uniform ground under train loadings[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, **32**(22): 57-62. (in Chinese))
- [9] GAO G Y, LI N, GU X Q. Field experiment and numerical study on active vibration isolation by horizontal blocks in layered ground under vertical loading[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2015, **69**: 251-261.
- [10] GAO G Y, CHEN J, GU X Q, et al. Numerical study on the active vibration isolation by wave impeding block in saturated soils under vertical loading[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2017, **93**: 99-112.
- [11] 李 宁, 高广运, 郑建国. 水平激振下波阻板主动隔振试验与数值计算[J]. 地下空间与工程学报, 2010, **6**(1): 90-95. (LI Ning, GAO Guangyun, ZHENG Jianguo. Field experimental and numerical study on active vibration isolation by WIB under horizontal loading[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2010, **6**(1): 90-95. (in Chinese))
- [12] 周凤玺, 马 强, 周志雄. 二维地基中空沟-波阻板联合隔振屏障分析[J]. 岩土力学, 2020, **41**(12): 4087-4092, 4115. (ZHOU Fengxi, MA Qiang, ZHOU Zhixiong. 2D analysis of vibration-isolation efficiency of an open trench-wave impedance block barrier[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(12): 4087-4092, 4115. (in Chinese))
- [13] MA Q, ZHOU F X. Analysis of isolation ground vibration by graded wave impeding block under a moving load[J]. Journal of Engineering, 2018, **2018**: 4989584.
- [14] ZHOU F X, ZHOU Z X, MA Q. Study on the vibration isolation performance of an open trench-wave impedance block barrier using perfectly matched layer boundaries[J]. Journal of Vibration and Control, 2022, **28**(3/4): 329-338.
- [15] 高 盟, 张致松, 王崇革, 等. 竖向激振力下 WIB-Duxseal 联合隔振试验研究[J]. 岩土力学, 2021, **42**(2): 537-546. (GAO Meng, ZHANG Zhisong, WANG Chongge, et al. Field test on vibration isolation performance by WIB-Duxseal under vertical excitation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, **42**(2): 537-546. (in Chinese))
- [16] 江 烨, 马 强. 非饱和土地基中波阻板隔振屏障对 P 波的隔离效应 [J/OL]. 工程力学, 1-12[2023-10-23]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.O3.20230510.1320.002.html>. (JIANG Ye, MA Qiang. Isolation effect of wave impeding barrier on P-wave in unsaturated ground foundation[J/OL]. Engineering Mechanics, 1-12[2023-10-2]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.O3.20230510.1320.002.html>. (in Chinese))
- [17] 时 刚, 李永辉. 弹性地基中波阻板对入射 Rayleigh 波的远场被动隔振研究[J]. 世界地震工程, 2019, **35**(2): 11-17. (SHI Gang, LI Yonghui. Passive vibration isolation effectiveness of wave impedance block under incident Rayleigh wave in elastic foundation[J]. World Earthquake Engineering, 2019, **35**(2): 11-17. (in Chinese))
- [18] 邓亚虹, 夏唐代, 陈敬虞. 车辆荷载作用下隔震沟隔震效率影响因素分析[J]. 岩土力学, 2007, **28**(5): 883-887, 894. (DENG Yahong, XIA Tangdai, CHEN Jingyu. Analysis of efficiency of vibration isolating groove subjected to vehicle load[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(5): 883-887, 894. (in Chinese))
- [19] 谷 音, 刘晶波, 杜义欣. 三维一致黏弹性人工边界及等效黏弹性边界单元[J]. 工程力学, 2007, **24**(12): 31-37. (GU Yin, LIU Jingbo, DU Yixin. 3d consistent viscous-spring artificial boundary and viscous-spring boundary element[J]. Engineering Mechanics, 2007, **24**(12): 31-37. (in Chinese))
- [20] 王贻荪. 半无限体表面在竖向集中谐和力作用下表面竖向位移的精确解[J]. 力学学报, 1980, **12**(4): 386-391. (WANG Yisun. Exact solution for the dynamic vertical surface displacement of the elastic half-space under vertical harmonic point load[J]. Acta Mechanica Sinica, 1980, **12**(4): 386-391. (in Chinese))
- [21] WOODS R D. Screening of surface wave in soils[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1968, **94**(4): 951-979.

(编校: 孙振远)