

DOI: 10.11779/CJGE20231285

考虑地形效应的群桩竖向动力阻抗

瞿立明¹, 李雄¹, 丁选明², 杨长卫³, 廖昕¹, 陈治良¹

(1. 西南交通大学地球科学与工程学院, 四川省环青藏高原交通廊道地质灾害生态化防治工程技术研究中心, 四川 成都 611756;
2. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400450; 3. 西南交通大学土木工程学院, 四川 成都 610031)

摘要: 基于哈密顿最小作用量原理推导单桩竖向阻抗理论公式, 考虑振动波传播的方向性差异, 提出合理的斜坡双桩相互作用因子计算方法, 最后结合承台变形协调条件和力学平衡方程获得群桩竖向阻抗。开展参数分析, 研究了不同桩长径比、桩-土刚度比、不同桩间距条件下相互作用因子和群桩动阻抗。结果表明, 相互作用因子和群桩动阻抗随频率的变化规律具有明显的波动特征, 地形效应对群桩阻抗的影响强弱依赖于频率, 在特定频率处, 地形效应较为显著, 且陡坡、长桩、硬土中的群桩动阻抗与平地群桩差异更为明显, 忽略地形效应可能会给斜坡群桩动阻抗计算结果带来较大的误差。

关键词: 群桩; 动力阻抗; 相互作用因子; 理论解; 地形效应

中图分类号: TU473 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2025)08-1607-12

作者简介: 瞿立明(1994—), 男, 博士, 讲师, 主要从事极端环境桩基动力学的研究工作。Email: hustqlm@163.com。

Vertical dynamic impedance of pile groups considering topographic effects

QU Liming¹, LI Xiong¹, DING Xuanming², YANG Changwei³, LIAO Xin¹, CHEN Zhiliang¹

(1. Faculty of Geosciences and Environmental Engineering, Southwest Jiaotong University, Sichuan Province Engineering Technology

Research Center of Ecological Mitigation of Geohazards in Tibet Plateau Transportation Corridors, Chengdu, 611756, China; 2. College of Civil Engineering, Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Chongqing University, Chongqing 400450, China; 3. College of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031, China)

Abstract: In this study, the theoretical equations for vertical impedance for single piles are deduced based on the Hamilton's principle. The reasonable method for calculating the pile-to-pile interaction is proposed considering the vibration difference with respect to the propagation direction. Finally, the impedance of pile groups is solved by combining the deformation coordination condition and mechanical equilibrium of piles and cap. The parameter studies are carried out to investigate the topography effects on the dynamic impedance of pile groups in sloping ground with various pile slenderness ratios, pile-soil modulus ratios and pile spacings. The results show that the interaction factor and pile group impedance fluctuate a lot with frequency. The extent of topography effects depends on frequency and can be significant at specific frequencies. The difference between the impedances for the pile groups in sloping ground and the horizontal ground increases as the slope angle, pile length, and soil stiffness increase, which indicates that neglecting the topography effects may bring considerable error to the dynamic impedance of pile groups in slopes.

Key words: pile group; dynamic impedance; interaction factor; theoretical solution; topography effect

0 引言

动阻抗可以用单位动荷载作用下的位移表示, 形式上是一个复数, 其实部为动刚度^[1], 虚部反映动力过程中的阻尼耗散作用。桩基动阻抗具有明显的频率相关性, 与桩基承载力^[1-2]、桩基质量完整性^[3-4]、桥梁等上部结构动力响应^[5]紧密关联。确定群桩动阻抗

是开展高速列车荷载作用下桥梁精细化动力建模分析的基础^[6-8]。单桩阻抗的计算理论主要有平面应变模型^[9]、Winkler 模型^[10]和连续介质模型^[11]三大类。平面应变模型忽略了土中竖向应力梯度, 不能考虑应力波的竖向传播; 而传统 Winkler 模型将土对桩的作用简化为分布式弹簧和黏壶, 不能得到桩周土的衰减规

基金项目: 国家自然科学基金项目 (52208370) This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.52208370).

收稿日期(Received): 2023-12-28 修回日期(Revised): 2025-04-15 接受日期(Accepted): 2025-04-23 网络出版日期(Online): 2025-04-24

律。因此克服了以上两种不足的连续介质模型逐渐成为当下单桩动力阻抗计算的主流方法。计算群桩动力阻抗时常采用 Dobry 等^[12]提出的“三步法”，即先计算单桩阻抗，然后计算桩间相互作用因子，最后根据叠加原理建立动力平衡方程求解群桩阻抗。目前均质土中的单桩和群桩竖向阻抗的系列计算公式已经较为完善^[13]，桩基动阻抗的研究逐渐朝着考虑非均质地层、土体非线性和土体三相性^[14-19]等方向发展，但仍多集中在水平场地中。

随着沿海平原地区的铁路网日益完善，中国铁路网建设正快速向中西部山区延伸。山区地形地质条件复杂，铁路桥梁里程占比高，且大量铁路桥墩采用了斜坡群桩的基础形式^[20]。已有研究表明，当存在非水平的土域边界条件时，场地中的振动波衰减规律具有方向性差异，与平地有明显不同^[21-22]。由于覆土不对称，同一承台下不同位置处的桩基阻抗不同，桩间相互作用十分复杂。为准确评估山区高铁桥梁桩基的服役性能^[23]，迫切需要针对群桩动阻抗的地形效应开展研究。Qu 等^[24]通过数值仿真研究了斜坡场地中振动波传播规律，提出了斜坡群桩竖向动力阻抗的简化计算方法，但该方法在计算单桩阻抗时采用传统 Winkler 模型，在计算双桩相互作用因子时使用了基于平面应变模型的土体衰减公式，使得该方法高估了低频时的桩间相互作用。由于桩周土体材料非线性会显著削弱桩间相互作用^[19]且实际桥梁桩基常处于非线性受力状态，因此高估低频时桩间作用的理论解可能与实际工程有一定偏差。

本文沿用“三步法”，首先基于连续介质理论建立单桩竖向振动计算模型以求解单桩阻抗和桩周土衰减系数，然后采用不同方法求解被动桩控制方程，分别将连续介质模型、Winkler 模型与有限元方法进行对比，确定了斜坡场地桩间相互作用因子的合理计算方法，最终通过叠加原理获得了考虑地形效应的群桩竖向动阻抗实用解，并进行了模型试验验证。在此基础上开展参数分析，研究桩基长细比和桩土模量比对地形效应的影响，以期为越来越多在建和拟建的山区铁路桥梁群桩动力设计和运营提供参考。

1 斜坡群桩竖向动阻抗理论公式

1.1 斜坡中单桩竖向动阻抗

假设斜坡桩基底部为端承条件^[25]，坡底侧桩基存在长度为 H_0 的自由段。地形倾斜会使得桩侧一定深度范围内的土体弱化，但目前斜坡中桩周土弱化程度难以定量，本文暂不考虑浅部土体弱化效应，此时斜坡单桩本身的竖向振动响应与平地桩基没有明显差异^[26]。因

此，本文采用水平场地中单桩竖向阻抗来近似斜坡单桩竖向阻抗。基于连续介质理论建立水平均质土中单桩竖向振动响应模型如图 1 所示，桩顶受竖向谐和荷载 $P(t)=P_0e^{i\omega t}$ 作用，其中 P_0 、 ω 、 t 、 i 分别表示动荷载幅值，荷载角频率，时间和虚数单位。桩基弹性模量、密度、半径、直径、横截面面积和长度分别表示为 E_p 、 ρ_p 、 r_p 、 d 、 A 和 H_1 。土体为黏弹性材料，其弹性模量、泊松比、密度和滞回阻尼比分别为 E_s 、 ν_s 、 ρ_s 和 β_0 。假设桩土系统受力处于线弹性变形阶段，桩土界面处没有滑移和脱开现象。土体的复弹性模量 E_s^* ，拉梅第一常数 λ_s^* 和第二常数 G_s^* 分别为

$$E_s^* = E_s(1 + 2i\beta_0) \quad , \quad (1a)$$

$$\lambda_s^* = E_s^* \nu_s / [(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)] \quad , \quad (1b)$$

$$G_s^* = E_s^* / [2(1 + \nu_s)] \quad . \quad (1c)$$

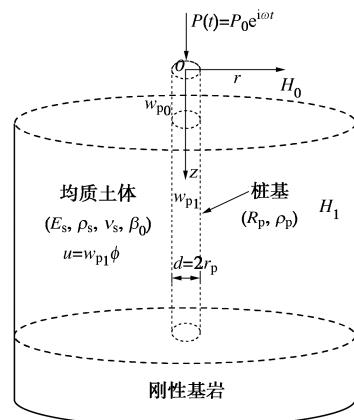


图 1 基于连续介质理论的桩基轴向受荷模型

Fig. 1 Axial load model for pile foundations based on continuum medium model

由于在竖向振动中径向位移和环向位移相对较小，可将其忽略。记桩基自由段为第#0 桩段，基桩埋入段为第#1 桩段，桩基自由段和埋入段的轴向位移分别为 $w_{p0}(z, t)$ 和 $w_{p1}(z, t)$ 。引入复数域内的无量纲化衰减函数 $\phi(r)$ 来定量表示土体振动沿径向的衰减程度，该函数的幅值在 $[0, 1]$ 区间内，且满足下列边界条件：

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 & (0 \leq r \leq r_p) \\ 0 & (r \rightarrow \infty) \end{cases} \quad . \quad (2)$$

桩周土竖向位移 u 是径向距离 r ，深度 z 和时间 t 的函数，表达式为

$$u(r, z, t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq z < H_0) \\ w_{p1}(z, t)\phi(r) & (H_0 \leq z \leq H_1) \end{cases} \quad . \quad (3)$$

考虑谐和激励条件，根据连续介质的最小作用量原理可以得到桩基自由段的频域控制方程为

$$E_p A \frac{\partial^2 w_{p0}}{\partial z^2} + \rho_p A \omega^2 w_{p0} = 0 \quad . \quad (4)$$

基桩埋入段的控制方程为^[11]

$$(E_p A + \vartheta) \frac{\partial^2 w_{pl}}{\partial z^2} - [k - (\alpha + \rho_p A) \omega^2] w_{pl} = 0 \quad (5)$$

其中, ϑ , α , k 为与土体性质相关的临时变量, 可由下式计算:

$$\vartheta = \pi(\lambda_s^* + 2G_s^*) \int_{r_p}^{\infty} \phi^2 r dr \quad , \quad (6a)$$

$$\alpha = 2\pi\rho_s \int_{r_p}^{\infty} \phi^2 r dr \quad , \quad (6b)$$

$$k = 2\pi G_s^* \int_{r_p}^{\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 r dr \quad . \quad (6c)$$

式 (4), (5) 的位移通解可统一表示为

$$w_{pi}(z) = B_i e^{\lambda_i z} + C_i e^{-\lambda_i z}, (i=0, 1) \quad . \quad (7)$$

其中, B_i , C_i 为待定系数; λ_i 由下式计算:

$$\lambda_i = \begin{cases} \sqrt{[k - (\alpha + \rho_p A) \omega^2]/(E_p A + 2\vartheta)} & (i=1) \\ \sqrt{-\rho_p \omega^2/E_p} & (i=0) \end{cases} \quad . \quad (8)$$

第 i 桩段的轴力 $Q(z)$ 可表示为

$$Q_i(z) = -\zeta_i B_i e^{\lambda_i z} + C_i \zeta_i e^{-\lambda_i z} \quad (i=0, 1) \quad . \quad (9)$$

其中, 临时变量 ζ_i 可表示为

$$\zeta_i = \begin{cases} \sqrt{[k - (\alpha + \rho_p A) \omega^2]/(E_p A + 2\vartheta)} & (i=1) \\ \omega A \sqrt{-\rho_p E_p} & (i=0) \end{cases} \quad . \quad (10)$$

根据桩顶荷载边界条件和桩底零位移边界条件可得到

$$C_0 = \frac{P_0}{\zeta_0 \left(1 - \frac{B_0}{C_0} \right)} \quad , \quad (11a)$$

$$\frac{B_1}{C_1} = -e^{-2\lambda_1 H_1} \quad . \quad (11b)$$

根据 $z=H_0$ 截面处相邻两桩段的轴力和位移连续条件可得:

$$C_1 = C_0 \frac{\frac{B_0}{C_0} + e^{(\lambda_1 - \lambda_0)H_0}}{e^{2\lambda_1 H_0} \frac{B_1}{C_1} + 1} \quad , \quad (12a)$$

$$\frac{B_0}{C_0} = \frac{-\frac{B_1}{C_1} \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0} + 1 \right) e^{2\lambda_1 H_0} + \frac{\zeta_1}{\zeta_0} - 1}{\frac{B_1}{C_1} \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0} - 1 \right) e^{2(\lambda_1 + \lambda_0)H_0} - \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0} + 1 \right) e^{2\lambda_0 H_0}} \quad . \quad (12b)$$

类似地, 衰减函数的控制方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \beta^2 \phi = 0 \quad . \quad (13)$$

其中,

$$\beta = \sqrt{(n_{s1} - n_{s2} \omega^2)/m_s} \quad , \quad (14a)$$

$$m_s = \int_{H_0}^{H_1} 2\pi G_s^* w_{pl}^2 dz \quad , \quad (14b)$$

$$n_{s1} = \int_{H_0}^{H_1} 2\pi (\lambda_s^* + 2G_s^*) \left(\frac{\partial w_{pl}}{\partial z} \right)^2 dz \quad , \quad (14c)$$

$$n_{s2} = \int_{H_0}^{H_1} 2\pi \rho_s w_{pl}^2 dz \quad , \quad (14d)$$

求解方程 (13) 可得衰减函数 $\phi(r)$ 的通解为

$$\phi(r) = c_1 I_0(\beta r) + c_2 K_0(\beta r) \quad . \quad (15)$$

其中, I_0 和 K_0 分别是修正的第一类和第二类零阶贝塞尔函数。将方程 (2) 代入方程 (15) 得到

$$\phi(r) = K_0(\beta r)/K_0(\beta r_p) \quad . \quad (16)$$

从而任意深度 z 处的桩身动阻抗 $K_d(z)$ 为

$$K_d(z) = \frac{-B_i \zeta_i e^{\lambda_i z} + C_i \zeta_i e^{-\lambda_i z}}{B_i e^{\lambda_i z} + C_i e^{-\lambda_i z}}, (i=0, 1) \quad . \quad (17)$$

文献[27]指出, 可以通过对土体第一拉梅常数进行适当修正的方式来适当补偿因忽略径向位移带来的桩-土系统刚度增加, 其方法是令式 (6a) 和 (14c) 中 $\lambda_s^* + 2G_s^* = 2/(1-\nu_s)G_s^*$ 。在此基础上, 本文采用不动点迭代法按如下步骤进行求解^[11]: ①首先假设出 β 的初始值, 一般可取为 1.0 或 1.0+II, 然后根据式 (16) 计算出衰减函数 $\phi(r)$; ②根据式 (11b) 和 (12b) 求出未知数 B_i/C_i , 结合 (11a) 和 (12a), 依次求出 C_0 , C_1 , 进而可获得所有的 B_i 和 C_i ; ③根据式 (7) 和式 (9) 求出桩基位移、轴力等动力响应, 在此基础上采用式 (14b) ~ (14d) 计算系数 m_s , n_{s1} , n_{s2} ; ④根据式 (14a) 计算 β 的新值, 以新值作为初始值重复上述 (1) ~ (3) 过程直至 β 收敛。采用收敛后的 β 值求出单桩阻抗和衰减函数。

1.2 斜坡中双桩动力相互作用因子

主动桩振动会对周围土体施加动剪切应力, 使得被动桩做受迫振动, 合理考虑双桩相互作用是正确计算群桩效应的关键。定义双桩相互作用因子 $\chi_{ij}(s)$ 间距 s 的被动桩 i 与主动桩 j 的竖向位移之比。参考 Mylonakis 等^[10]的研究, 埋入段的桩-桩相互作用因子 χ 可采用场地土振动衰减系数 ϕ 和被动桩发散系数 ξ 的乘积来表示, 即

$$\chi_{ij}(s) = \phi_{ij} \xi_{ij} \quad . \quad (18)$$

斜坡场地桩-桩动力相互作用因子的计算依赖于斜坡中振动波的传播过程。假设桩顶不发生水平位移和转动, 振动波在斜坡中的传播路径依然以水平方向为主, 且桩基非埋入段不影响埋入段的影响因子。图 2 是主动桩位于坡顶侧且被动桩位于坡底侧时的群桩相互作用过程示意。假设 2×2 群桩为正方形布置, 桩

间距为 s ; #1 桩受荷时自身的位移为 w_{11} ; #1 桩振动引起的#2 桩、#3 桩和#4 桩位移分为 w_{21} , w_{31} , w_{41} ; 斜坡场地中仅有#1 桩时, 不同位置坡体表面处的土体位移为 $u_1(r, \theta, z)$, 相对应地#1 桩埋设在水平场地时土体表面的位移为 $u_2(r, L_{11})$ 。文献[24]的研究表明, 同一高程的两根桩由于埋入段长度一致, 衰减系数与平地时基本相同, 且斜坡场地中沿坡底侧传播的土振动衰减系数与水平场地中的振动衰减系数较为接近, 即

$$\left. \begin{aligned} \phi_{21} &= u_1(s, 90^\circ, L_{21}) / w_{11}(L_{11}) = u_2(s, L_{11}) / w_{11}(L_{11}), \\ \phi_{31} &= u_1(s, 0^\circ, L_{31}) / w_{11}(L_{11}) = u_2(s, L_{11}) / w_{11}(L_{11}), \\ \phi_{41} &= u_1(s, 45^\circ, L_{41}) / w_{11}(L_{11}) = u_2(\sqrt{2}s, L_{11}) / w_{11}(L_{11}). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

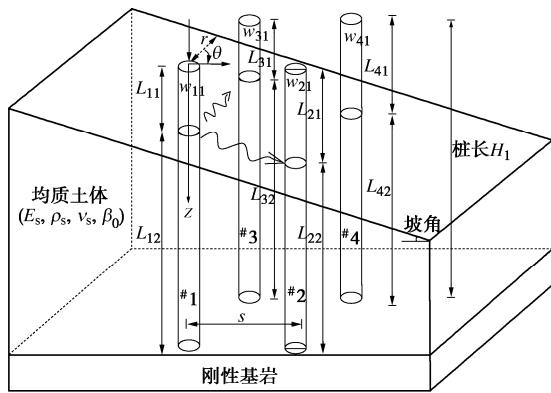


图 2 桩-桩相互作用因子计算简图 (振动波朝坡顶侧传播)

Fig. 2 Diagram for calculating pile-to-pile interaction factor

根据上述假设和近似关系, 可将沿坡底侧传播的衰减系数用水平场地中的衰减系数进行近似, 乘以被动桩的发散系数, 得到沿坡底侧传播的相互作用因子, 然后根据位移互等定理求出沿坡顶侧传播的相互作用因子, 最终计算斜坡中桩-桩相互作用因子的问题可转化为计算多个水平地层桩-桩相互作用因子的问题。

先以#1 桩和#3 桩为例推导主动桩和被动桩具有相同埋入段长度时的双桩相互作用因子。参考上一节的分析方法, 可得水平场地中#1 主动桩振动引起的#3 被动桩位移 w_{31} 需满足下列控制方程:

$$(E_p A + 2\vartheta_i) \frac{\partial^2 w_{31,i}}{\partial z^2} + \rho_p A \omega^2 w_{31,i} - (k_i - \alpha_i \omega^2)(w_{31,i} - u_2) = 0 \quad (i=0,1) \quad (20)$$

其中: $i=0$ 表示自由段, 而 $i=1$ 表示埋入段。由于自由段没有桩土相互作用, 故 ϑ_0 , k_0 , α_0 均为 0, 而 ϑ_1 , α_1 , k_1 可分别用公式 (6a), (6b) 和 (6c) 计算。土体位移 u_2 可用下式计算:

$$u_2 = \phi(s) w_{11}(z) = \phi(s) (B_1 e^{\lambda_1 z} + C_1 e^{-\lambda_1 z}) \quad (21)$$

方程 (20) 的通解是:

$$w_{31,i} = \frac{k_i - \alpha_i \omega^2}{2\lambda_i(E_p A + 2\vartheta_i)} \phi(r) z (-B_i e^{\lambda_i z} + C_i e^{-\lambda_i z}) + D_i e^{\lambda_i z} + F_i e^{-\lambda_i z} \quad (22)$$

从而得#3 被动桩的轴力 $Q_{31,i}$ 为

$$\begin{aligned} Q_{31,i}(z) &= -(E_p A + 2\vartheta_i) \frac{\partial w_{31,i}}{\partial z} \\ &= -\frac{k_i - \alpha_i \omega^2}{2\lambda_i} \phi(r) [-(1 + \lambda_i z) B_i e^{\lambda_i z} + (1 - \lambda_i z) C_i e^{-\lambda_i z}] - \lambda_i D_i (E_p A + 2\vartheta_i) e^{\lambda_i z} + \lambda_i F_i (E_p A + 2\vartheta_i) e^{-\lambda_i z} \quad (23) \end{aligned}$$

代入桩顶零荷载边界条件、桩底零位移边界条件、以及 L_{31} 深度处截面的位移和轴力连续条件可得求解被动桩控制方程待定系数的矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ F_0 \\ D_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 H_1} & e^{-\lambda_1 H_1} \\ -e^{\lambda_0 H_0} & -e^{-\lambda_0 H_0} & e^{\lambda_1 H_0} & e^{-\lambda_1 H_0} \\ -E_p A_p \lambda_0 e^{\lambda_0 H_0} & E_p A_p \lambda_0 e^{-\lambda_0 H_0} & \lambda_1 (E_p A_p + 2t_1) e^{\lambda_1 H_0} & -\lambda_1 (E_p A_p + 2t_1) e^{-\lambda_1 H_0} \\ 0 & -\frac{k_1 - \alpha_1 \omega^2}{2\lambda_1 (E_p A + 2t_1)} \phi(s) H_1 (-B_1 e^{\lambda_1 H_1} + C_1 e^{-\lambda_1 H_1}) \\ 0 & -\frac{k_1 - \alpha_1 \omega^2}{2\lambda_1 (E_p A + 2t_1)} \phi(s) H_0 (-B_1 e^{\lambda_1 H_0} + C_1 e^{-\lambda_1 H_0}) \\ \frac{k_1 - \alpha_1 \omega^2}{2\lambda_1} \phi(r) [B_1 e^{\lambda_1 H_0} (\lambda_1 H_0 + 1) + C_1 e^{-\lambda_1 H_0} (\lambda_1 H_0 - 1)] \end{bmatrix} \quad (24)$$

从而可求解得到#3 被动桩的动力响应, 进而推导出水平场地中#1 主动桩引起的#3 被动桩发散系数和桩间相互作用因子分别为:

$$\xi_{31} = \frac{w_{31}(L_{31})}{w_{11}(L_{11}) \phi_{31}} \quad , \quad (25a)$$

$$\chi_{31} = \frac{w_{31}(L_{31})}{w_{11}(L_{11})} \quad . \quad (25b)$$

接下来以#1 桩和#2 桩为例推导主动桩和被动桩具有不同埋入段长度时的双桩相互作用因子。令 $K_d^1(L_{11})$ 为第#1 桩在深度 L_{11} 处的单桩动阻抗, 计算方法见公式 (17)。根据相互作用因子的定义和式 (18) 中的计算方法, 可得#1 主动桩和#2 被动桩之间的位移关系:

$$w_{21}(L_{21}) = \phi_{21} \xi_{21} w_{11}(L_{11}) = \phi_{21} \xi_{21} P_0 / K_d^1(L_{11}) \quad (26)$$

由式 (22) 和边界条件可将#2 被动桩顶部和入土截面处的位移关系写为

$$w_{21}(0) = \frac{2}{e^{\lambda_0 L_{21}} + e^{-\lambda_0 L_{21}}} w_{21}(L_{21}) \quad . \quad (27)$$

令 $K_d^1(0)$ 为第#1 桩在桩顶处竖向动阻抗, 结合式

(26) 可得

$$w_{21}(0) = \frac{2}{e^{\lambda_0 L_{21}} + e^{-\lambda_0 L_{21}}} \frac{\phi_{21} \xi_{21} P_0}{K_d^1(L_{11})}。 \quad (28)$$

则振动波朝坡底侧传播时的相互作用因子为

$$\chi_{21} = \frac{w_{21}(0)}{w_{11}(0)} = \frac{2\phi_{21} \xi_{21}}{e^{\lambda_0 L_{22}} + e^{-\lambda_0 L_{22}}} \frac{K_d^1(0)}{K_d^1(L_{11})}。 \quad (29)$$

根据位移互等定理, #1 桩振动在#2 桩处产生的位移与#2 桩振动在#1 桩处产生的位移相同。即

$$w_{21}(0) = w_{12}(0)。 \quad (30)$$

设 $K_d^2(0)$ 表示第#2 桩的桩顶竖向动阻抗。则当受荷桩位于坡底侧, 被动桩位于坡顶侧, 振动波朝坡顶侧传播时的双桩相互作用因子为

$$\chi_{12} = \frac{w_{12}(0)}{w_{22}(0)} = \chi_{21} \frac{K_d^2(0)}{K_d^1(0)}。 \quad (31)$$

在式 (25) ~ (29) 中计算场地土衰减系数时, 采用的是基于连续介质理论推导得到的计算公式 (16)。类似地, 可求出斜坡场地任意两根桩之间的相互作用因子。

值得注意的是, 为了推导和求解方便, 1.1 节和 1.2 节组建的能量方程是分别开展的, 在 1.2 节中建立被动桩控制方程时没有直接考虑主动桩中的振动能量, 可能会导致连续介质理论得到的被动桩发散系数存在偏差。为此本文采用连续介质理论计算主动桩振动响应以及场地土衰减系数, 采用 Winkler 模型计算被动桩发散系数, 称为部分连续介质法。Mylonakis 等^[10] 基于 Winkler 模型推导了端承条件下被动桩发散系数为

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\tilde{k}_s + i\omega c_s}{2(\tilde{k}_s + i\omega c_s - \rho_p A\omega^2)} \\ &\left[1 - \frac{2L_{22} \sqrt{\frac{\tilde{k}_s + i\omega c_s - \rho_p A\omega^2}{E_p A}}}{\sinh(2L_{22} \sqrt{\frac{\tilde{k}_s + i\omega c_s - \rho_p A\omega^2}{E_p A}})} \right]。 \end{aligned} \quad (32)$$

式中: \tilde{k}_s 和 c_s 为被动桩的 Winkler 模型中的弹性系数和黏性系数, 分别反映桩周土的剪切阻力和黏滞阻力, 一般可通过经验、试验测试或仿真结果反演得到。文献[28, 29] 分别给出的 \tilde{k} 和 c_s 的两种计算方法为

$$\begin{cases} \tilde{k} = 0.6E_s(1 + 0.5\sqrt{a_0}), \\ c_s = 2\beta_0 \tilde{k}_s / \omega + 2\pi a_0^{-0.25} \rho_s r_p v_s \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \tilde{k} = 0.6E_s(1 + 0.5\sqrt{a_0}), \\ c_s = 2\pi a_0^{-0.25} \rho_s r_p v_s \end{cases} \quad (34)$$

式中: $a_0 = \omega d/V_s$ 为无量纲化频率; v_s 为土体剪切波速,

$v_s = \sqrt{E_s / [2\rho_s(1 + v_s)]}$ 。本文将在公式验证部分对比完全连续介质法、部分连续介质法与有限元方法得到的桩间相互作用因子时, 并比较式 (33), (34) 的合理性。

1.3 群桩-承台动力变形协调方程

假设群桩为 n 行 n 列方形布置, 桩长为 H_1 , 由无质量刚性承台连接, 刚性承台的竖向位移与各桩桩顶位移均相等; 承台在顶部荷载 P_G 作用下产生竖向位移 w_G 。记 χ_{ij} 和 $w_{ij}(0)$ 分别为 j 桩振动引起的 i 桩的相互作用因子和桩顶位移; $w_j(0)$, P_j 和 $K_d^j(0)$ 分别为 j 桩桩顶的竖向位移、竖向荷载和竖向动阻抗。参考文献[24] 可列出矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \alpha_{v11} & \alpha_{v12} & \dots & \alpha_{v1n} \\ -1 & \alpha_{v21} & 1 & \dots & \alpha_{v2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \alpha_{vn1} & \alpha_{vn2} & \dots & \alpha_{vnn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_G \frac{E_p A}{H_1} \\ P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_G \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}。 \quad (35)$$

式中: $\alpha_{vij} = \chi_{ij} E_p A / [K_d^j(0) H_1]$ 。斜坡群桩的特征在于式 (35) 中每一个 α_{vij} 都互不相同。求解方程 (35) 后采用下列公式计算群桩竖向动阻抗 K_G :

$$K_G = P_G / w_G。 \quad (36)$$

2 公式验证

先将频率设为 0 Hz, 得到静力条件下的斜坡单桩位移, 并与有限元结果进行对比。设置桩长为 25 m, 非埋入段与埋入段长度为 2 : 3, 桩直径 1 m, 桩基弹性模量为 20 GPa, 不考虑桩体压缩产生的侧向应变; 土体弹性模量为 20 MPa, 泊松比 0.3, 土体阻尼比为 0.05。桩顶竖向荷载 1 kN。根据 1.1 节中计算得到的桩顶位移和入土截面处的位移分别为 1.51×10^{-6} m, 8.76×10^{-7} m。采用 Abaqus 有限元软件建立三维模型进行分析, C3D8 六面体单元模拟桩体和土体并赋予线弹性本构条件, 桩-土不设置接触面, 采用隐式算法计算。有限元结果表明桩顶和入土截面处的竖向位移分别为 1.41×10^{-6} , 8.17×10^{-7} m, 与有限元结果的对比误差分别为 7.1% 和 7.2%, 可见本论文提出的斜坡单桩动力响应计算公式可以较好地退化到静力状态。

图 3 是本论文方法得到的水平均质场地中单桩阻抗与文献[11]的对比, 其中无量纲化频率 $a = \omega H_1 / v_p$, v_p 为桩基纵波波速, $V_p = \sqrt{E_p / \rho_p}$ 。由图 3 可知, 两种方法得到阻抗实部和虚部均吻合较好, 得到的自振频率均为 $\omega \approx 0.07$ 。验证了本文单桩阻抗计算方法的可

靠性。

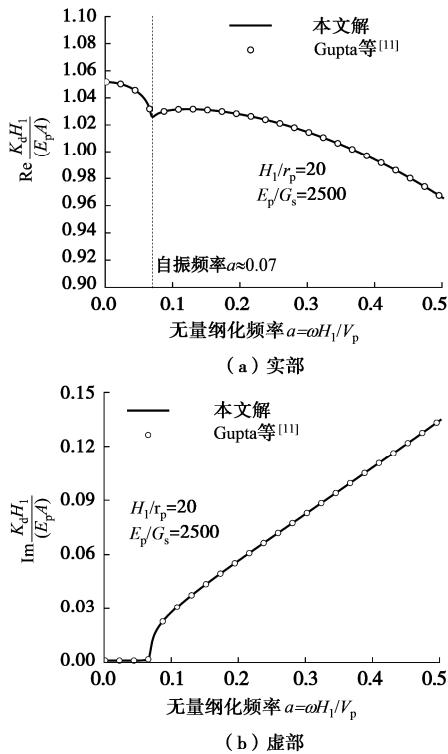


图 3 水平均质场地中单桩竖向动阻抗

Fig. 3 Vertical dynamic impedances of single pile in horizontal and homogenous soil

图 4 对比了 4 种方法得到的斜坡桩间相互作用因子幅值随频率的变化曲线。由图 4 可知, 3 种方法得到的结果均是上坡方向相互作用略强于下坡方向, 这是由于上坡方向的桩基埋入段更长的缘故。文献[26]在计算主动桩阻抗和被动桩发散系数时均采用了基于公式(34)的 Winkler 模型, 同时计算衰减系数时采用了平面应变模型。完全连续方法是采用 1.1、1.2 节中的连续介质方法分析主被主动桩的振动。而部分连续介质法则是用连续介质理论计算主动桩阻抗和场地振动衰减系数, 采用基于式(33)的 Winkler 模型计算被动桩发散系数。

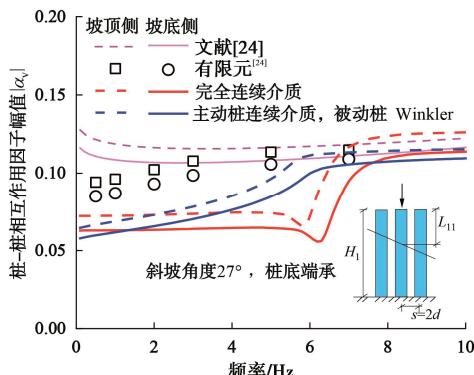


图 4 不同方法得到的相互作用因子对比 ($s=2d$, $E_p/E_s=100$, $H_1=25d$, $L_{11}=10d$)

Fig. 4 Comparison of pile-to-pile interaction factors produced by various methods

从图 4 可以看出, 完全连续介质法得到的相互作用因子在 6 Hz 以前随频率的变化较为缓慢, 在 6 Hz 附近“突然降低”, 随后快速增加。上述现象是由于本文中没有考虑土体径向位移的缘故; 部分连续介质法与有限元方法得到的频率变化规律较为相似, 在 5 Hz 以前均呈现缓慢上升的趋势。文献[24]得到的低频段相互作用因子则是下降趋势, 这是由于文献[24]采用了基于平面应变模型的经验衰减公式, 导致低频处桩周土振动衰减变慢的缘故。此外, 本文方法得到的相互作用因子整体上在自振频率以前低于弹性有限元, 主要原因在于本文忽略了土体径向位移, 实际上是人为增加了桩-土系统刚度, 导致被动桩受迫振动幅度减弱。随着频率增加, 部分连续介质法与有限元法吻合较好。

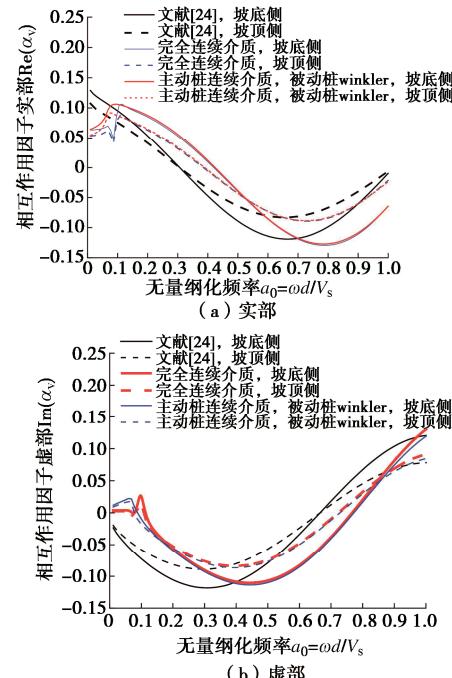


图 5 不同方法得到的相互作用因子对比($s=5d$, $L_{11}=0$, $H_1=40d$, $E_p/E_s=1000$, $\rho_s/\rho_p=0.75$, 坡角 60°)

Fig. 5 Comparison of pile-to-pile interaction factors produced by various methods for $s=5d$

图 5 对比了本文解与文献[24]在 $s=5d$ 时的桩间相互作用因子。从图 5(a)可知, 在无量纲化频率 $a_0 < 0.1$ 时, 部分连续介质法得到的结果更加平滑; 随着 a_0 继续增加, 完全连续介质法与基于公式(33)的部分连续介质法表现出较好的吻合趋势。两种方法得到的阻抗实部的波动程度稍强于文献[24], 且本文解得到的相互作用因子频率曲线的谷值频率较文献[24]有一定延迟。文献[24]中相互作用因子实部的谷值频率 a_0 在 $0.6 \sim 0.7$, 而本文解在 $0.7 \sim 0.8$ 。反映出文献[24]由于采用了式(34), 低估了桩-土系统的阻尼。由图 5(b)

可知, 在 $a_0 < 0.1$ 时, 本文得到的动阻尼几乎不随频率改变, 只有当频率继续增加后, 动阻尼才开始变化, 这也是导致文献[24]与连续介质方法得到的阻抗实部谷值频率有差异的原因。当频率较低时, 能量耗散主要由材料阻尼引起, 随着频率增加, 辐射阻尼开始占据主导作用, 而文献[24]不能区别上述两种阻尼的影响。

为了验证理论方法的可靠性, 本研究采用重庆大学土工模型试验系统开展了竖向荷载作用下斜坡群桩动力相互作用因子测试。试验几何布置如图 6 (a) 所示, 场地为 19° 斜坡, 由硬黏土填筑形成, 填土前在模型四周使用 5 mm 厚的聚乙烯泡沫板抑制边界振动反射的影响; 4 根素混凝土桩尺寸相同, 桩长 H_1 和桩径 d 分别为 1500, 100 mm, 采用同批次混凝土浇筑, 沿斜坡倾向以 $2d$ 桩间距依次埋置, 加载桩的自由段长度为 502 mm。桩基弹性模量 $E_p=18 \text{ GPa}$, 密度 $\rho_p=2400 \text{ kg/m}^3$; 土体弹性模量 $E_s=200 \text{ MPa}$, 密度 $\rho_s=1800 \text{ kg/m}^3$, 泊松比 $\nu=0.3$, 阻尼比 $\beta=0.05$ 。在桩基顶部布置顶杆式位移计, 采用液压伺服作动器对单桩进行位移加载, 依次施加 $1\text{--}10 \text{ Hz}$ 的简谐波并采集位移数据, 现场试验布置如图 6 (b) 所示。

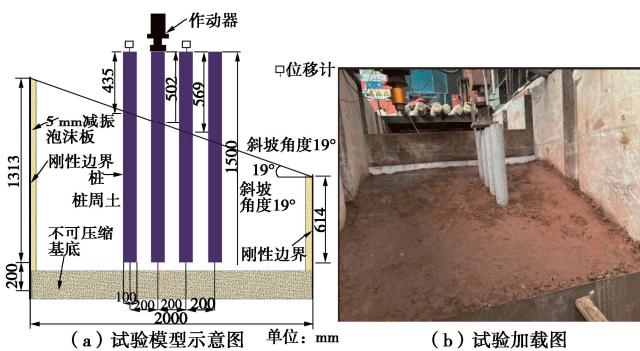


图 6 斜坡桩基相互作用因子试验测试布置图

Fig. 6 Layout diagram for testing pile-to-pile interaction factors in a slope

斜坡桩-桩相互作用因子理论结果与试验结果对比如图 7 所示。结果表明, 试验结果的离散性略大于理论方法, 这是由于实际斜坡土体的非均质性造成的。本文方法所得到的相互作用因子幅值随频率的变化趋势整体上与试验结果基本一致, 且均显示坡顶侧被动桩的相互作用因子略高于坡底, 证明了本文解的可靠性。

3 斜坡地形效应分析

3.1 双桩相互作用因子

假设图 2 中 $L_{11}=0$, $H_1/d=30$, $E_p/E_s=1000$, 土体密度为 1800 kg/m^3 , 泊松比为 0.3, 阻尼系数为 5%,

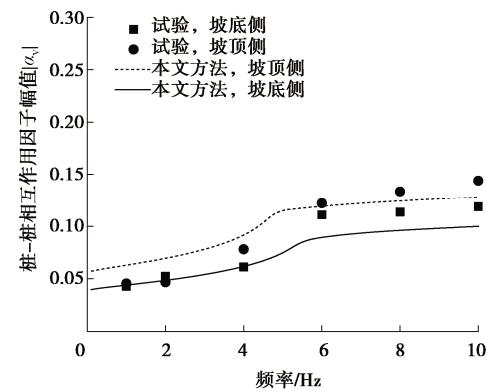


图 7 本文理论解与试验结果对比

Fig. 7 Comparison between proposed solutions and model tests
 $\rho_p=2400 \text{ kg/m}^3$, 分别计算坡角为 30° , 45° , 60° 时的双桩相互作用因子。图 8 是桩间距 2 倍桩径时双桩相互作用因子实部和虚部随无量纲化频率 $a_0=\omega d/V_s$ 的变化规律, 其中, 实部反映主动桩桩顶发生单位位移振动时被动桩桩顶处的位移水平, 虚部一定程度上可以反映主动桩和被动桩振动过程的相位差和阻尼耗散情况。

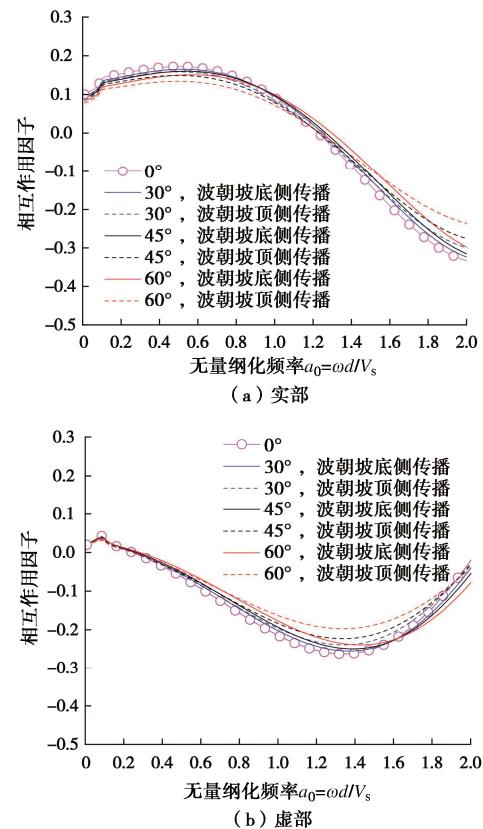


图 8 桩间距 $2d$ 时的动力相互作用因子随频率变化曲线

Fig. 8 Variation of dynamic interaction factor with frequency for pile spacing of $2d$

由图 8 (a) 可以看出, 不同地形坡度下的相互作用因子实部随频率增加呈现明显的波动规律, 在无量纲化频率 $a_0 \in [0, 2]$ 内, 相互作用因子均具有随频率先

增加后减小的变化特征,正向峰值出现在 $a_0=0.5$ 左右, $a_0=2$ 时出现负向极值,且 0° 场地中的负向峰值比正向峰值高出 80%以上。随着地形坡度增大,相互作用因子实部的波动幅度有变小的趋势, 60° 时的负向峰值约比 0° 度小了 30%,可以预见,忽略坡度的影响将给斜坡桩-土相互作用的计算带来不小的误差。地形效应还表现为,波朝下坡方向传播时的相互作用因子与波超上坡方向传播时的相互作用因子不同,二者并无明确的相对大小关系,但从图 8(a) 中可以看出,坡度越大,二者的差别就越大。由图 8(b) 可知,在给定的计算范围内,相互作用因子虚部绝对值随频率增加会先增加后减小, a_0 在 0 和 2 附近时,坡度对虚部几乎没有影响,当 $a_0 \approx 1.4$ 时虚部绝对值最大,此时不同坡度工况下的主被动桩之间的相位差也越大。

图 9,10 分别是桩间距 5 倍桩径和 10 倍桩径时的双桩相互作用因子随无量纲化频率 $a_0=\omega d/V_s$ 的变化规律。从图 9,10 中可看出,随着桩间距变大,相互作用因子波动幅值变小但波动加速。从坡度对相互作用因子实部峰值的削弱程度看, $5d$ 时, 60° 的正向峰值比 0° 小了约 55%, $10d$ 时的正向峰值比 0° 小约 83%。可见,随着桩间距变大,相同坡度条件下的地形效应会明显增强。

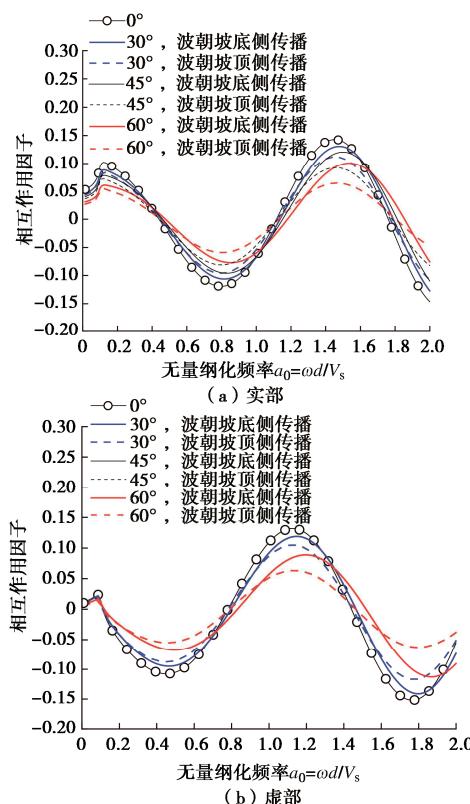


图 9 桩间距 $5d$ 时的动力相互作用因子随频率变化曲线

Fig. 9 Variation of dynamic interaction factor with frequency for pile spacing of $5d$

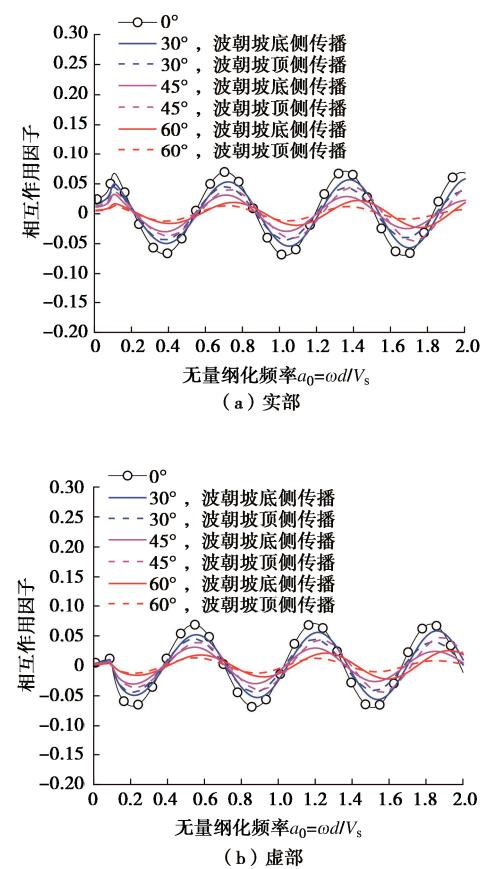
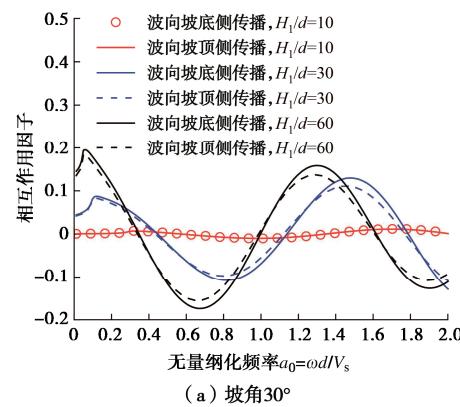


图 10 桩间距 $10d$ 时的动力相互作用因子随频率变化曲线

Fig. 10 Variation of dynamic interaction factor with frequency for pile spacing of $10d$

图 11 是不同桩长下的斜坡双桩相互作用因子实部随频率的变化曲线。由图 11 可知,桩长对双桩相互作用因子影响较大,桩长从 10 m 增加至 60 m 后,相互作用因子有明显增加。此外,桩身越长,振动波沿不同方向传播时的相互作用因子绝对差异就越大。对比图 11(a), (b) 可知,坡角 30° , 桩长径比为 60 时候的下坡向相互作用因子比上坡方向约增加了 17%;而坡角 60° , 桩长径比为 60 条件下的下坡向相互作用因子比上坡方向增加了约 54%。可见,对地形越陡峭,桩长径比越大,则地形效应越显著。



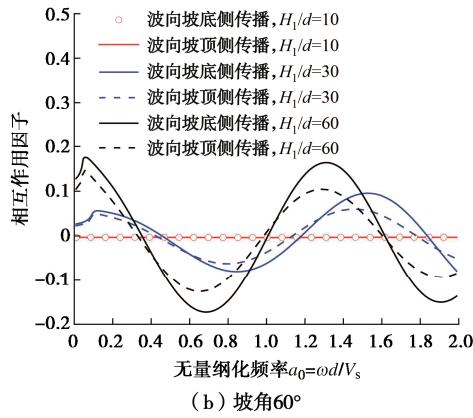


图 11 不同桩长下斜坡双桩相互作用因子随频率变化曲线 (桩间距 $5d$, $E_p/E_s=1000$)

Fig. 11 Variation of dynamic interaction factor between dual piles on a slope with different pile lengths with frequency (pile spacing of $5d$, $E_p/E_s=1000$)

图 12 是桩-土刚度比变化条件下的斜坡双桩相互作用因子实部随频率的变化曲线。固定桩身弹性模量为 20 GPa, 分别设置土体弹性模量为 20, 100, 200 MPa 进行计算分析。

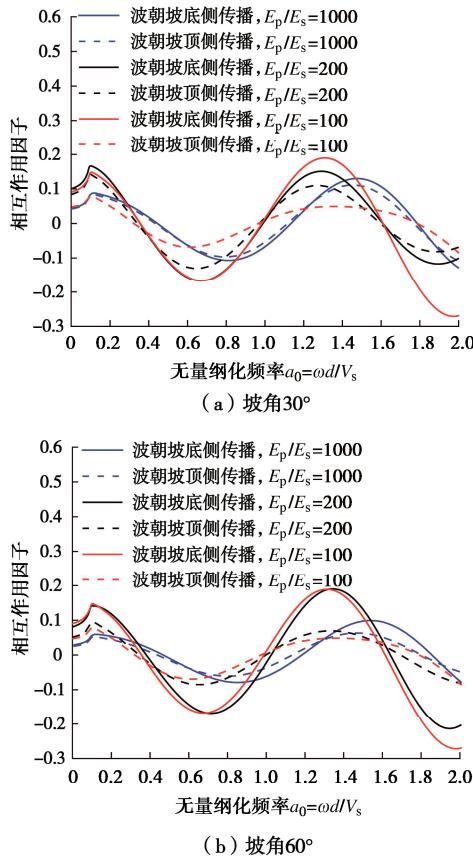


图 12 不同桩-土刚度比下斜坡双桩相互作用因子随频率变化曲线 (桩间距 $5d$, $H_1/d=30$)

Fig. 12 Variation of dynamic interaction factor between dual piles on a slope with different pile-soil stiffness ratios with frequency (pile spacing $s=5d$, $H_1/d=30$)

由图 12 可知, 地形效应表现在: 当桩土刚度比较小或土层较硬时, 双桩相互作用因子会比软土层中的结果大; 并且坡角越大, 桩-土刚度比对相互作用因子实部的影响就越显著, 且振动波的方向性差异也越显著。这主要是两个因素引起: 一方面是由于土层模量越高, 主动桩和被动桩之间的单桩阻抗差异就越大; 另一方面是土体模量增加后土中振动波传播速度加快, 波动特征更加明显。计算结果反映出土层条件较好的陡坡场地中的桩间相互作用受地形影响较为明显。

3.2 群桩竖向动阻抗

图 13, 14 分别是 2×2 群桩以 2 倍桩径间距和 5 倍桩径间距布置时的群桩竖向动阻抗。由图 13 (a) 可知, 群桩阻抗随频率的波动现象较为显著, 在无量纲化频率小于 1 以前, 不同坡度下的群桩阻抗实部差别不大, 随着频率继续增加, 地形效应开始增强。桩-土刚度比 200 时, 在无量纲频率 1.7 左右达到峰值, 此时地形效应最显著, 60° 斜坡群桩阻抗比平地情况削弱了 25% 左右; 桩-土刚度比 1000 时, 60° 斜坡群桩阻抗比平地削弱了 26% 左右。从图 13 (b) 反映出的规律与图 13 (a) 类似, 值得注意的是阻抗实部和虚部达到峰值时的频率并不一致。

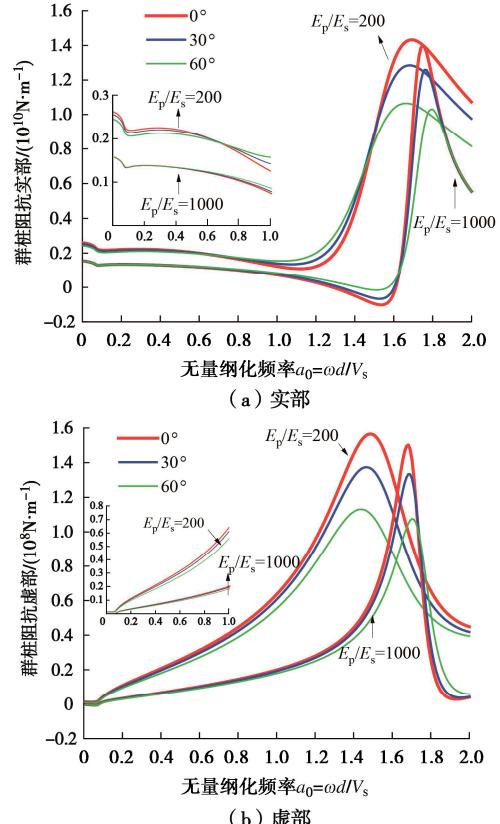


图 13 斜坡群桩频域动阻抗 ($pile\ spacing\ 2d$, $H_1/d=40$, $\rho_s/\rho_p=0.75$)

Fig. 13 Frequency-domain dynamic impedances of pile groups on sloping ground (pile spacing $2d$, $H_1/d=40$, $\rho_s/\rho_p=0.75$)

图14是桩间距5倍桩径布置时斜坡群桩动阻抗随频率的变化曲线。由图14(a)可知,在给定的范围内,阻抗实部出现了两个极大值,分别在无量纲化频率0.7和2.0左右,当荷载频率靠近这两个极值频率时,地形效应对阻抗的影响均会有明显的放大,桩-土刚度比200时,两个极值频率处60°斜坡群桩阻抗比平地情况分别削弱了28%和50%左右;桩-土刚度比1000时,极值频率处60°斜坡群桩阻抗比平地情况分别削弱了21%和42%左右。相应地,阻抗实部曲线有两个谷值,分别在无量纲化频率0.1和1.8左右,反映出此时群桩出现了共振现象,当荷载频率靠近这两个谷值频率时,地形效应会有减小趋势。桩-土刚度比1000时,两个谷值处的地形差异均较小,可以忽略;而桩-土刚度比200时,第二阶谷值频率处的60°斜坡阻抗与平地阻抗仍有较大差异。由此可见,桩土刚度比越小,场地土越硬,地形效应越强。因此,在进行山区硬土层中桩基动力设计时宜考虑地形效应影响,结合场地条件进行深入分析。

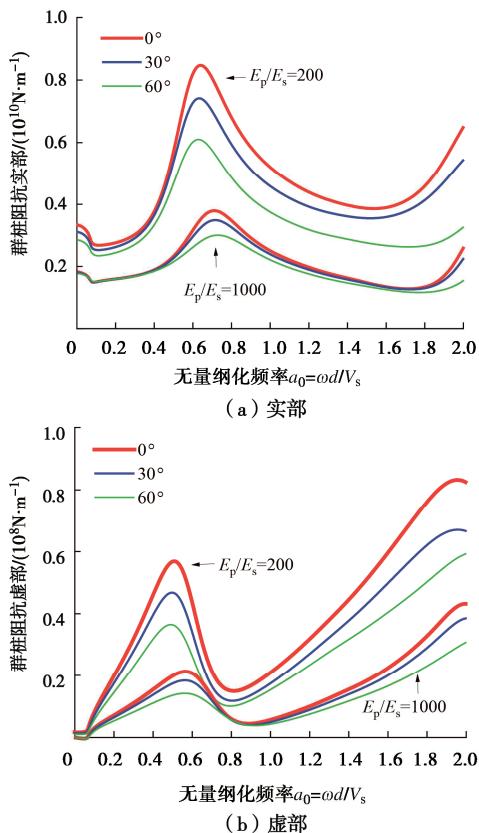


图14 斜坡群桩频域动阻抗 ($\text{桩间距 } 5d, H_1/d=40$)

Fig. 14 Frequency-domain dynamic impedances of pile groups on a slope (pile spacing of $5d, H_1/d=40$)

4 结 论

本文提出了山区斜坡场地中群桩基础竖向动力阻抗理论解,在推导过程中假设桩-土接触面不滑移不脱

开,故本论文结果不能考虑桩周土塑性大变形的情况。在本文理论解的基础上,分析了坡面倾角、桩-土刚度比和桩长径比等因素对双桩动力相互作用因子和桩顶动阻抗实部和虚部的频率变化规律,探究了群桩动力响应的地形效应,得到以下2点结论。

(1) 相互作用因子和频率的关系曲线具有明显的波动变化规律,导致地形效应也依赖于频率的变化。被动桩处于主动桩不同方位时,振动波的传播方式不同,会引起双桩动力相互因子的显著差异。对于双桩相互作用而言,波朝坡底侧传播时的动力相互作用因子的峰值会大于坡顶侧方向。

(2) 桩-土刚度比、桩基长径比和桩间距会显著影响地形效应。土体弹性模量和桩基设计长度越大,倾斜地形对桩基相互作用因子和群桩动阻抗的影响也越大,在某些特定频率处地形效应可能导致群桩动阻抗与平地情况相差近50%,建议在分析群桩动力响应时宜考虑地形效应。

利益冲突声明/Conflict of Interests: 所有作者声明不存在利益冲突。All authors disclose no relevant conflict of interest.

作者贡献/Authors' Contributions: 瞿立明撰写初稿并根据审稿意见修改论文; 李雄完成了试验操作、数据解释并与理论结果进行对比验证; 丁选明指导了论文的研究思路; 杨长卫、廖昕、陈治良参与了论文的撰写、修改和试验验证工作。所有作者均阅读并同意最终稿件的提交。The manuscript was drafted and revised by QU Liming based on the reviewers' comments. The experimental operations, data interpretation, and validation against the theoretical results of this study were conducted by LI Xiong. The study outline was instructed by DING Xuanming. The writing, revision and experimental validation of this manuscript were also done by LI Xiong, YANG Changwei, LIAO Xin, and CHEN Zhiliang. All the authors have read the last version of the paper and consented for submission.

参 考 文 献:

- [1] 刘建磊, 马蒙, 李林杰, 等. 基于实测动刚度的桥桩承载能力评估研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(S2): 571-576. (LIU Jianlei, MA Meng, LI Linjie, et al. Study of bearing capacity evaluation for bridge piles by measured dynamic stiffness[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(S2): 571-576. (in Chinese))
- [2] 陈凡, 温振统, 谢晓锋, 等. 对基桩动力载荷试验的重新审视[J]. 岩土工程学报, 2023, 45(8): 1723-1732. (CHEN Fan, WEN Zhentong, XIE Xiaofeng, et al. Re-examination of dynamic load tests on piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, 45(8): 1723-1732. (in Chinese))

- Geotechnical Engineering, 2023, **45**(8): 1723-1732. (in Chinese))
- [3] 邱欣晨, 王奎华, 吴君涛, 等. 高承台桩基无偏心竖向激励低应变测试方法研究[J]. 岩土力学, 2021, **42**(10): 2875-2884, 2894. (QIU Xincheng, WANG Kuihua, WU Juntao, et al. Research on low-strain test method of high-cap pile foundation without eccentric vertical excitation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, **42**(10): 2875-2884, 2894. (in Chinese))
- [4] 郑长杰, 丁选明, 施鲁宝, 等. 低应变瞬态荷载作用下基桩动力响应解析解[J]. 土木工程学报, 2019, **52**(11): 79-85. (ZHENG Changjie, DING Xuanming, LUAN Lubao, et al. Simplified analytical solution for the dynamic response of piles subjected to low-strain transient loadings[J]. China Civil Engineering Journal, 2019, **52**(11): 79-85. (in Chinese))
- [5] 梁发云, 李通达, 贾亚杰, 等. 垫层隔震基础动力阻抗薄层法求解及参数分析[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(5): 883-892. (LIANG Fayun, LI Tongda, JIA Yajie, et al. Thin-layer method for dynamic impedance of isolated foundation with cushions and its parameter analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(5): 883-892. (in Chinese))
- [6] 陈令坤, 蒋丽忠, 陶磊, 等. 考虑桩-土作用的高速列车-桥梁地震响应分析[J]. 岩土力学, 2012, **33**(10): 3162-3170. (CHEN Lingkun, JIANG Lizhong, TAO Lei, et al. Seismic response analysis of high-speed vehicle-bridge considering soil-structure interaction[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(10): 3162-3170. (in Chinese))
- [7] 熊辉, 江雅丰, 李玲. 群桩-土相互作用动力阻抗的简化有限元计算[J]. 铁道科学与工程学报, 2017, **14**(5): 928-934. (XIONG Hui, JIANG Yafeng, LI Ling. Simplified finite element calculation for dynamic impedance of pile-soil interaction[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2017, **14**(5): 928-934. (in Chinese))
- [8] 高广运, 李绍毅, 顾晓强. 列车运行引起高架桥群桩基础地面振动分析[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(10): 1751-1761. (GAO Guangyun, LI Shaoyi, GU Xiaoqiang. Ground vibration induced by moving train on viaduct with group pile foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(10): 1751-1761. (in Chinese))
- [9] NOVAK M, ABOUL-ELLA F, NOGAMI T. Dynamic soil reactions for plane strain case[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1978, **104**(4): 953-959.
- [10] MYLONAKIS G, GAZETAS G. Vertical vibration and additional distress of grouped piles in layered soil[J]. Soils and Foundations, 1998, **38**(1): 1-14.
- [11] GUPTA B K, BASU D. Dynamic analysis of axially loaded end-bearing pile in a homogeneous viscoelastic soil[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, **111**: 31-40.
- [12] DOBRY R, GAZETAS G. Simple method for dynamic stiffness and damping of floating pile groups[J]. Géotechnique, 1988, **38**(4): 557-574.
- [13] 吴志明, 黄茂松, 任青. 层状地基中群桩竖向振动及动内力[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2007, **35**(1): 21-26. (WU Zhiming, HUANG Maosong, REN Qing. Vertical vibration and internal forces of pile groups in layered soil[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2007, **35**(1): 21-26. (in Chinese))
- [14] ZHANG Y P, DI T Y, HESHAM EL NAGGAR M, et al. Modified Rayleigh-Love rod model for 3D dynamic analysis of large-diameter thin-walled pipe pile embedded in multilayered soils[J]. Computers and Geotechnics, 2022, **149**: 104853.
- [15] WANG B L, CUI C Y, XU C S, et al. A novel analytical solution for horizontal vibration of partially embedded offshore piles considering the distribution effect of wave loads[J]. Ocean Engineering, 2024, **307**: 118179.
- [16] 刘鑫, 吴文兵, 王立兴, 等. 大直径桩纵向振动广义轴对称连续圈层模型及其应用[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(9): 1916-1925. (LIU Xin, WU Wenbing, WANG Lixing, et al. Generalized axisymmetric continuous circle model for longitudinal vibration of large-diameter piles and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(9): 1916-1925. (in Chinese))
- [17] ANOYATIS G, FRANÇOIS S, ORAKCI O, et al. Soil-pile interaction in vertical vibration in inhomogeneous soils[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2023, **52**(14): 4582-4601.
- [18] KANELLOPOULOS K, GAZETAS G. Vertical static and dynamic pile-to-pile interaction in non-linear soil[J]. Géotechnique, 2020, **70**(5): 432-447.
- [19] 阮瑀, 任青, 喻孟初. 考虑土体非线性时大直径端承桩竖向振动研究[J]. 水资源与水工程学报, 2018, **29**(6): 214-222. (RUAN Yu, REN Qing, YU Mengchu. Research on vertical vibration of large-diameter end-bearing pile considering soil nonlinearity[J]. Journal of Water Resources and Water Engineering, 2018, **29**(6): 214-222. (in Chinese))
- [20] 郭辉, 严乃杰, 胡所亭, 等. 复杂艰险山区铁路大跨度

- 桥梁建造和运维挑战及对策分析[J]. 铁道标准设计, 2022, 66(1): 60-68. (GUO Hui, YAN Naijie, HU Suoting, et al. Analysis of challenges and countermeasures for the construction and operation-maintenance of long-span bridges on railways in challenging mountain areas[J]. Railway Standard Design, 2022, 66(1): 60-68. (in Chinese))
- [21] DING X M, QU L M, YANG J C, et al. Experimental study on the pile group-soil vibration induced by railway traffic under the inclined bedrock condition[J]. Acta Geotechnica, 2020, 15(12): 3613-3620.
- [22] 赵江涛, 牛晓凯, 苏洁, 等. 地铁致凸形地貌地表振动局部放大现象实测及机理分析[J]. 振动与冲击, 2022, 41(4): 287-293. (ZHAO Jiangtao, NIU Xiaokai, SU Jie, et al. In-situ measurement and mechanism analysis for local amplification phenomena of ground vibration in the protruding topography induced by subway[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(4): 287-293. (in Chinese))
- [23] 翟婉明, 赵春发, 夏禾, 等. 高速铁路基础结构动态性能演变及服役安全的基础科学问题[J]. 中国科学: 技术科学, 2014, 44(7): 645-660. (Zhai Wanming, Zhao Chunfa, Xia He, et al. Basic scientific issues on dynamic performance evolution of the high-speed railway infrastructure and its service safety[J]. Scientia Sinica (Technologica), 2014, 44(7): 645-660. (in Chinese))
- [24] QU L M, DING X M, KOUROUSSIS G, et al. Dynamic interaction of soil and end-bearing piles in sloping ground: Numerical simulation and analytical solution[J]. Computers and Geotechnics, 2021, 134: 103917.
- [25] 吴文兵, 蒋国盛, 窦斌, 等. 嵌岩特性对嵌岩桩桩顶纵向振动阻抗的影响研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(7): 51-57. (WU Wenbing, JIANG Guosheng, DOU Bin, et al. Influence of rock-socketed characteristics on vertical dynamic impedance at head of a rock-socketed pile[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(7): 51-57. (in Chinese))
- [26] QU L M, DING X M, WU C R, et al. Effects of topography on dynamic responses of single piles under vertical cyclic loading[J]. Journal of Mountain Science, 2020, 17(1): 230-243.
- [27] ANOYATIS G, MYLONAKIS G. Dynamic Winkler modulus for axially loaded piles[J]. Géotechnique, 2012, 62(6): 521-536.
- [28] GAZETAS G, FAN K, KAYNIA A. Dynamic response of pile groups with different configurations[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1993, 12(4): 239-257.
- [29] GAZETAS G, MAKRIS N. Dynamic pile-soil-pile interaction. part I: analysis of axial vibration[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1991, 20(2): 115-132.