

DOI: 10.11779/CJGE20230988

# 基于下限模型的临界滑动面理论与数值解法

郑颖人<sup>1</sup>, 张金良<sup>2</sup>, 尹德文<sup>2</sup>, 邵颖<sup>2</sup>, 苏凯<sup>3</sup>, 吴昊<sup>2</sup>, 张智沛<sup>2</sup>

(1. 陆军勤务学院, 重庆 400041; 2. 黄河勘测规划设计研究院有限公司, 河南 郑州 450002; 3. 武汉大学, 湖北 武汉 430072)

**摘要:** 临界滑动面对岩土工程的加固处理有着重要意义。目前对于临界滑动面的研究多采用上限法, 基于下限定理或下限模型的临界滑动面理论与数值解法目前尚未见到。在下限模型的基础上, 提出了基于下限模型的临界滑动面理论, 给出了相应的数值解法; 并以黏性土体直立边坡的临界高度问题为例, 验证了临界滑动面理论与数值解法的适用性。

**关键词:** 下限模型; 临界滑动面; 数值解法

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2025)02-0438-05

作者简介: 郑颖人(1933—), 男, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士, 主要从事岩土力学、岩土工程与地下工程领域的研究工作。E-mail: zhengl32@163.net。

## Critical sliding surface theorem and numerical solution method based on lower bound model

ZHENG Yingren<sup>1</sup>, ZHANG Jinliang<sup>2</sup>, YIN Dewen<sup>2</sup>, SHAO Ying<sup>2</sup>, SU Kai<sup>3</sup>, WU Hao<sup>2</sup>, ZHANG Zhipei<sup>2</sup>

(1. The PLA Army Service Academy, Chongqing 400041, China; 2. Yellow River Engineering Consulting Co., Ltd., Zhengzhou 450002, China; 3. Wuhan University, Wuhan 430072, China)

**Abstract:** The critical sliding surface is important for the reinforcement of geotechnical engineering in practice. The existing researches on the critical sliding surface are mostly based on the upper bound theorem, while the theorem and numerical solution method for the critical sliding surface based on the lower bound theorem or lower bound model are not available. In this study, the new critical sliding surface solution theorem is proposed based on the lower bound model, and the corresponding numerical solution method is also provided. The accuracy and reliability of the calculated results as well as the rationality and feasibility of its engineering applications are validated through the examples of an upright slope.

**Key words:** lower bound model; critical sliding surface; numerical solution method

## 0 引言

经典塑性力学中的下限定理由 Drucker 等<sup>[1]</sup>于 1951 提出, 下限定理认为, 对理想刚塑性材料, 任何一个静力许可应力场都构成极限荷载的一个下限解。陈惠发<sup>[2]</sup>在其 1969 年出版的专著《极限分析与土体塑性》中, 阐述了极限分析方法在土工问题中的应用。1970 年, Lysmer<sup>[3]</sup>基于有限单元法的基本思想和 Mohr-Coulomb 屈服准则的线性化, 建立了利用下限定理求解稳定性问题的线性规划模型。Sloan<sup>[4]</sup>于 1988 年基于最速下降主动集法, 对地基承载力问题进行了求解, 获得了稳定性问题的解答。

下限定理为岩土工程中的稳定性问题提供了一种特别有用的方法, 它避开了复杂的弹塑性分析过程, 同样获得了问题的解, 吸引了众多研究人员的兴趣<sup>[5-8]</sup>, 在边坡<sup>[9-11]</sup>、地下洞室<sup>[12-14]</sup>、基础<sup>[15-17]</sup>等各类

岩土问题中得到了广泛应用。

在工程实践中, 通常首先需要知道岩土工程的稳定性, 当岩土工程的稳定性不满足要求时, 需要对其进行加固处理, 此时还需要知道临界滑动面的形状与位置, 因此, 临界滑动面的确定对岩土工程有着重要意义。目前对于临界滑动面的研究多采用上限法, 基于下限定理或下限模型的临界滑动面理论与数值方法目前尚未见到。

本文在下限模型的基础上, 提出了基于下限模型的临界滑动面理论, 给出了基于下限模型的临界滑动面数值解法; 并以黏性土体直立边坡的临界高度问题为例, 验证了基于下限模型的临界滑动面数值解法的适用性。

## 1 下限定理与下限模型

### 1.1 应力场、平衡方程、应力边界条件与屈服准则

#### (1) 应力场

在研究对象所在区域内, 应力场可表示为

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_x(x, y, z), \\ \sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \\ \sigma_z = \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z), \\ \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z), \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z). \end{array} \right\} \quad (1)$$

将应力场  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})$  简记为  $\sigma$ 。

#### (2) 平衡方程

静力平衡微分方程为

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = F_x, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = F_y, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = F_z. \end{array} \right\} \quad (2)$$

将静力平衡微分方程简记为

$$E(\sigma) = F. \quad (3)$$

#### (3) 应力边界条件

在应力边界  $S_\sigma$  上, 设边界法方向为  $(l, m, n)$ , 在每一点给定了分布的表面力  $\bar{T}_x$ 、 $\bar{T}_y$  与  $\bar{T}_z$ , 应力边界条件可写为

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = \bar{T}_x, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = \bar{T}_y, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \bar{T}_z. \end{array} \right\} \quad (4)$$

将应力边界条件简记为

$$S(\sigma) = T. \quad (5)$$

#### (4) 屈服准则

屈服准则以应力形式表达, 一般地可写为

$$M(\sigma) \leq 0. \quad (6)$$

### 1.2 下限定理

下限定理可表述为: 任何一个静力许可应力场都构成极限荷载的一个下限解。

静力许可应力场是指同时满足如下条件的应力场: ①平衡方程; ②应力边界条件; ③屈服准则约束。

### 1.3 下限模型

与下限定理相应的数学模型简称为下限模型。下限模型可写为

$$\left. \begin{array}{l} \max Q(\sigma), \\ \text{st. } E(\sigma) = F, \\ S(\sigma) = T, \\ M(\sigma) \leq 0. \end{array} \right\} \quad (7)$$

式中:  $\sigma$  为应力场, 自变量;  $Q(\sigma)$  为目标函数;  $E(\sigma) = F$  为平衡方程;  $S(\sigma) = T$  为应力边界条件;  $M(\sigma) \leq 0$  为屈服准则。

下限模型是以应力场为变量, 以下限荷载为目标函数, 以平衡方程、应力边界条件和屈服准则为约束的最优化模型。

#### 1.4 下限模型特性

下限模型是一个最优化模型, 具有最优化模型的一般特性。

满足最优化模型全部约束条件的解称为可行解。目标函数的最大值称为最优值; 使得目标函数取得最优值的可行解, 称为最优解。对某一确定的最优化模型, 可行解可能存在, 也可能不存在。如果可行解不存在, 则最优值也就不存在; 如果可行解存在, 最优值可能存在(为有限值), 也可能不存在(为无限大)。如果最优值存在, 则最优解必然存在。最优值只有一个, 最优解可能为有限个, 也可能为无限多个。

## 2 基于下限模型的临界滑动面理论

下限模型的每一个可行解, 都对应着一个静力许可应力场。下限模型目标函数的最优值即为极限荷载。下限模型的每一个最优解, 都对应着极限荷载作用下的一个静力许可应力场。为论述方便, 称极限荷载作用下的静力许可应力场为极限许可应力场。也即下限模型的每一个最优解, 都对应着一个极限许可应力场。

对某一确定的下限模型, 静力许可应力场可能存在, 也可能不存在。如果静力许可应力场不存在, 则下限模型所描述的岩土问题是不稳定的, 此时极限荷载也就不存在; 如果静力许可应力场存在, 则下限模型所描述的岩土问题是稳定的, 此时极限荷载可能存在(为有限值), 也可能不存在(为无限大)。如果极限荷载存在, 则极限许可应力场必然存在。极限荷载只有一个, 极限许可应力场可能为有限个, 也可能为无限多个。

在某一给定的极限许可应力场中, 对某一点的应力而言, 该点应力要么处于屈服状态, 要么处于非屈服状态, 二者必居其一。如果某一点的应力在任一极限许可应力场中均处于屈服状态, 则称该点为下限塑性点。全部的下限塑性点的集合称为下限塑性区。下限塑性区即为下限模型的临界滑动面。

下限塑性点的直观物理意义就是在极限荷载作用

下不得不屈服的点；下限塑性区的直观物理意义就是在极限荷载作用下不得不屈服的区域。对二维平面问题，临界滑动面可能是一条二维曲线，也可能是一个二维区域；对三维问题，临界滑动面可能是一个三维曲面，也可能是一个三维区域。由于屈服准则的外凸性，下限塑性区内的应力分布具有唯一性，非下限塑性区内的应力分布不具有唯一性。

### 3 基于下限模型的临界滑动面数值解法

由于实际问题的复杂性，一般很难获得下限模型的解析解，工程中可考虑采用数值解法。以平面应变问题例，采用四边形单元进行网格划分，以全部的节点应力为自变量，并对目标函数、平衡方程、应力边界条件和屈服准则进行线性化处理，可得到一个线性化的下限模型（称之为下限线性规划模型），通过对下限线性规划模型的求解，可获得相应问题的极限荷载及临界滑动面，具体如下。

#### 3.1 网格划分

对平面应变问题，采用四边形单元进行网格划分。设网格共有  $N$  个节点， $M$  个单元。

#### 3.2 自变量

以全部节点的应力分量为自变量，记为  $\sigma_n$ 。因网格共有  $N$  个节点，故  $\sigma_n$  为一个  $3N$  维列向量。

#### 3.3 目标函数

采用线性化的目标函数，可一般地记为

$$C\sigma_n \quad \text{。} \quad (8)$$

式中： $C$  为目标向量。

#### 3.4 平衡方程

单元在体力与周边应力作用下，在  $x$  方向和  $y$  方向上应分别保持平衡。设单元周边应力为直线分布，单元边界上  $x$  方向的应力分布如图 1 所示，单元边界上  $y$  方向的应力分布如图 2 所示，则单元在  $x$  方向与  $y$  方向上的平衡方程可写为

$$[A^e][\sigma^e] = [b^e] \quad \text{。} \quad (9)$$

式中：

$$[A^e] = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & \zeta_1 & \eta_2 & 0 & \zeta_2 & \eta_3 & 0 & \zeta_3 & \eta_4 & 0 & \zeta_4 \\ 0 & \zeta_1 & \eta_1 & 0 & \zeta_2 & \eta_2 & 0 & \zeta_3 & \eta_3 & 0 & \zeta_4 & \eta_4 \end{bmatrix};$$

$$[\sigma^e] = \begin{bmatrix} \sigma_{x1} & \sigma_{y1} & \tau_{xy1} & \sigma_{x2} & \sigma_{y2} & \tau_{xy2} & \sigma_{x3} & \sigma_{y3} & \tau_{xy3} & \sigma_{x4} & \sigma_{y4} & \tau_{xy4} \end{bmatrix}^T;$$

$$[b^e] = \begin{bmatrix} Ag_x & Ag_y \end{bmatrix}^T;$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(y_2 - y_4); \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(y_3 - y_1);$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}(y_4 - y_2); \quad \eta_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_3);$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(x_4 - x_2); \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_3);$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_4); \quad \zeta_4 = \frac{1}{2}(x_3 - x_1)。$$

式中： $A$  为单元面积； $g_x$  与  $g_y$  分别为  $x$  方向与  $y$  方向的重力加速度； $(x_1, y_1) \dots (x_4, y_4)$  为单元 4 个节点的坐标； $(\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \tau_{xy1}) \dots (\sigma_{x4}, \sigma_{y4}, \tau_{xy4})$  为单元 4 个节点的应力分量。

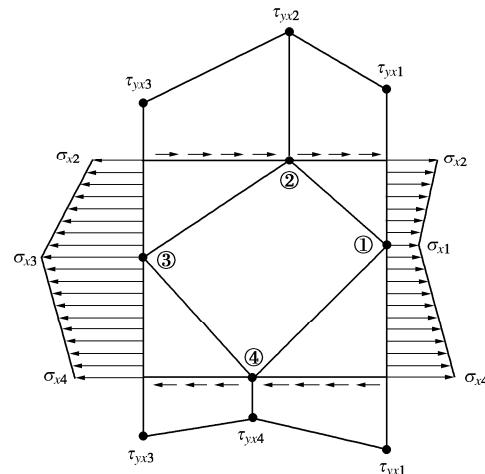


图 1 单元边界上  $x$  方向的应力分布

Fig. 1 Stresses along element boundary in  $x$  direction

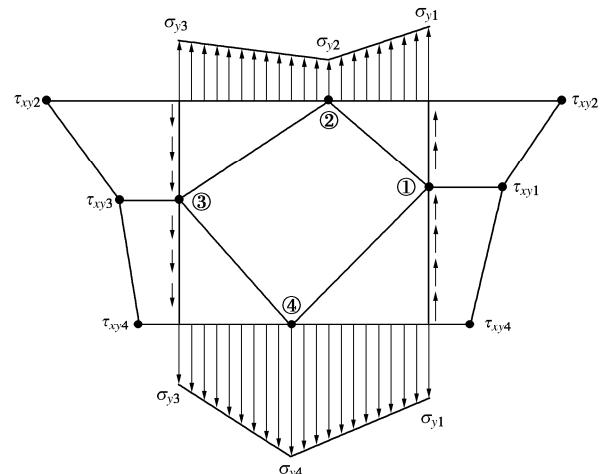


图 2 单元边界上  $y$  方向的应力分布

Fig. 2 Stress along the element boundary in  $y$  direction

对全部单元平衡方程集成，可得到如下形式的总平衡方程：

$$A_i \sigma_n = b_i \quad \text{。} \quad (10)$$

#### 3.5 应力边界条件

应力边界条件实质上为施加在应力上的等式约束。采用线性化的应力边界条件，可一般地记为

$$A_2 \sigma_n = b_2 \quad \text{。} \quad (11)$$

#### 3.6 屈服准则

对 Mohr-Coulomb 屈服准则，采用线性化近似，

式(6)可写为<sup>[4]</sup>

$$A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} \leq D \quad (12)$$

式中:  $A_k = \cos(2\pi k/p) + \sin \varphi \cos(\pi/p)$ ;  $B_k = \sin \varphi \cos(\pi/p) - \cos(2\pi k/p)$ ;  $C_k = 2 \sin(2\pi k/p)$ ;  $D = 2c \cos \varphi \cos(\pi/p)$ ;  $k = 1, 2, \dots, p$ ,  $p$  为内接多边形的边数;  $c$  为黏聚力;  $\varphi$  为内摩擦角。

所有的节点应力均应满足屈服准则。将所有的线性化的节点应力屈服准则约束集成, 即可得到线性化的屈服准则约束, 可一般地记为

$$A_3 \sigma_n \leq b_3 \quad (13)$$

### 3.7 下限线性规划模型

综合目标函数式(8)、平衡方程式(10)、应力边界条件式(11)及屈服准则式(13), 下限线性规划模型可一般地写为

$$\begin{aligned} \max \quad & C^T \sigma_n, \\ \text{st.} \quad & A_1 \sigma_n = b_1, \\ & A_2 \sigma_n = b_2, \\ & A_3 \sigma_n \leq b_3. \end{aligned} \quad (14)$$

式中:  $\sigma_n$  为节点应力;  $C$  为目标向量;  $A_1 \sigma_n = b_1$  为离散后的线性化平衡方程;  $A_2 \sigma_n = b_2$  为离散后的线性化应力边界条件;  $A_3 \sigma_n \leq b_3$  为离散后的线性化节点屈服准则约束。

### 3.8 数值求解方法

模型式(14)为带有等式与不等式约束的线性规划模型, 其目标函数的最大值即为极限荷载。对下限线性规划模型的任一最优解, 如果某一不等式约束均处于等式状态, 称该约束为主动约束, 称该约束所在的节点为下限塑性节点。全部下限塑性节点的集合构成下限模型的临界滑动面。据此, 求解下限模型的临界滑动面问题就转化为求解线性规划模型的主动约束问题。关于线性规划模型最优值及主动约束的求解, 可参见相关线性规划相关内容<sup>[18-19]</sup>, 本文不再做详细论述。

## 4 临界滑动面算例

以黏性土体直立边坡的临界高度问题为例, 对本文所提出的临界滑动面理论与数值解法进行简单验证。

设土体重度  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ , 黏聚力  $c = 20 \text{ kPa}$ , 内摩擦角  $\varphi = 15^\circ$ 。设土体竖直方向高度为  $h$ , 水平方向宽度  $b=h$ ; 竖直方向与水平方向均划分为 15 个单元, 如图 3 所示, 共计有 256 个节点, 225 个单元。其中左侧边界  $AD$  上节点的切应力与  $x$  向正应力为零, 上侧边界  $AB$  上节点的切应力与  $y$  向正应力为零; 采用 Mohr-Coulomb 屈服准则。

目标向量给定为零, 也即只要下限模型存在可行解, 边坡就是稳定的, 否则是不稳定的。根据本文中所述方法, 建立黏性土体直立边坡临界高度问题的线性规划下限模型。

数值求解时, 先通过试算法求解直立边坡的临界高度。即先假定一个竖直高度, 如果求解发现下限模型的可行解不存在, 则减小假定的竖直高度; 如果求解发现下限模型的可行解存在, 则增加假定的竖直高度, 直至高度范围小于给定的精度为止, 这样就获得了黏性直立边坡的临界高度。在获得临界高度后, 进一步求解下限模型的全部下限塑性节点。

根据卡尔曼公式<sup>[2]</sup>, 其临界高度  $h_{cr1}$  为 5.79 m。采用本文所述方法, 黏性土体直立边坡的临界高度  $h_{cr2}$  为 5.36 m, 全部下限塑性节点 (Plastic node) 分布如图 3 所示。卡尔曼公式假定临界滑动面为直线 (Linear sliding)。根据本文提出的临界滑动面理论, 全部塑性节点构成临界滑动面。由图 3 中的塑性节点分布可以看出, 其临界滑动面总体上呈曲线分布。

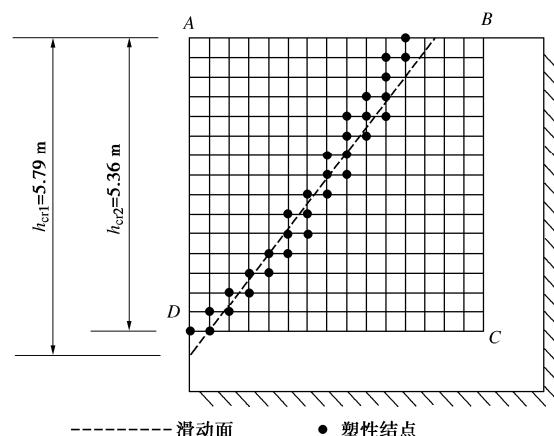


图 3 黏性土体直立边坡的临界高度问题

Fig. 3 Critical heights of vertical slope in cohesive soil

## 5 结语

在理论研究与工程实践中, 下限定理通常用来求解极限荷载, 临界滑动面通常通过上限法来求解。本文的研究表明, 基于下限模型不但可以求解极限荷载, 也可以求解临界滑动面。

在建立起线性规划下限模型后, 极限荷载的求解可借助成熟的商业软件进行。与临界滑动面求解相对应的是线性规划模型主动约束的求解, 目前的商业软件并不直接提供主动约束求解这一功能, 需要编程完成。主动约束求解的标准化与模块化应是下一步需要解决的问题。

本文只是初步提出了基于下限模型求解临界滑动面理论和数值解法, 更多的理论研究需要进一步的深

入,更多的实践验证还有待开展。

### 参考文献:

- [1] DRUCKER D C, GREENBERG H J, PRAGER W. The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, **18**(4): 371-378.
- [2] CHEN W F. Soil mechanics and theorems of limit analysis[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1969, **95**(2): 493-518.
- [3] LYSMER J. Limit analysis of plane problems in soil mechanics[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1970, **96**(4): 1311-1334.
- [4] SLOAN S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1988, **12**(1): 61-77.
- [5] 汪小刚,林兴超. 基于刚性块体离散的边坡稳定极限分析法[J]. *岩土工程学报*, 2022, **44**(9): 1587-1597. (WANG Xiaogang, LIN Xingchao. Limit analysis method for slope stability based on discretization of rigid blocks[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2022, **44**(9): 1587-1597. (in Chinese))
- [6] ZHOU J F, WANG J X. Lower bound limit analysis of wedge stability using block element method[J]. *Computers and Geotechnics*, 2017, **86**: 120-128.
- [7] UKRITCHON B, KEAWSAWVONG S. Three-dimensional lower bound finite element limit analysis of Hoek-Brown material using semidefinite programming[J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, **104**: 248-270.
- [8] NIKOLAOU, K. GEORGIADIS C D. Bisbos, Lower bound limit analysis of 2D steel frames with foundation-structure interaction[J]. *Engineering Structures*, 2016, **118**: 41-54.
- [9] DEUSDADO N, ANTÃO A N, DA SILVA M V, et al. Application of the upper and lower-bound theorems to three-dimensional stability of slopes[J]. *Procedia Engineering*, 2016, **143**: 674-681.
- [10] ARAI K, NAKAGAWA M. A new limit equilibrium analysis of slope stability based on lower-bound theorem[J]. *Soils and Foundations*, 1988, **28**(1): 1-15.
- [11] ARVIN M R, ASKARI F, FARZANEH O. Seismic behavior of slopes by lower bound dynamic shakedown theory[J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, **39**: 107-115.
- [12] SUN R, YANG J S, LIU S H, et al. Undrained stability analysis of dual unlined horseshoe-shaped tunnels in non-homogeneous clays using lower bound limit analysis method[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, **133**: 104057.
- [13] UKRITCHON B, KEAWSAWVONG S. Stability of unlined square tunnels in Hoek-Brown rock masses based on lower bound analysis[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, **105**: 249-264.
- [14] UKRITCHON B, KEAWSAWVONG S. Lower bound solutions for undrained face stability of plane strain tunnel headings in anisotropic and non-homogeneous clays[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, **112**: 204-217.
- [15] FOROUTAN KALOURAZI A, IZADI A, JAMSHIDI CHENARI R. Seismic bearing capacity of shallow strip foundations in the vicinity of slopes using the lower bound finite element method[J]. *Soils and Foundations*, 2019, **59**(6): 1891-1905.
- [16] NIKOLAOU K D, GEORGIADIS K, BISBOS C D. Lower bound limit analysis of 2D steel frames with foundation-structure interaction[J]. *Engineering Structures*, 2016, **118**: 41-54.
- [17] KEAWSAWVONG S, YOANG S, UKRITCHON B, et al. Lower bound analysis of rectangular footings with interface adhesion factors on nonhomogeneous clays[J]. *Computers and Geotechnics*, 2022, **147**: 104787.
- [18] 成德源,王华民. 确定凸多面体全部顶点和非多余约束的一种算法[J]. *深圳大学学报*, 1992, **9**(增刊 1): 36-40. (CHENG Deyuan, WANG Huamin. An algorithm for determining all vertices and non-redundant constraints of convex polyhedron[J]. *Journal of Shenzhen University (Science and Engineering)*, 1992, **9**(S1): 36-40. (in Chinese))
- [19] 张干宗. 线性规划[M]. 2 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2004. (ZHANG Ganzong. *Linear Programming*[M]. 2nd ed. Wuhan: Wuhan University Press, 2004. (in Chinese))