

DOI: 10.11779/CJGE20230949

# 投影方向极值原理的三维滑动面应力合矢量极限平衡抗滑稳定计算理论模型

孙建生

(太原理工大学水利科学与工程学院, 山西 太原 030024)

**摘要:** 根据投影方向极值原理揭示的复杂滑动面切向应力合矢量非共线不平衡特征, 且其滑动势能比在平衡研究投影方向具有极大、耗散方向势能极小, 针对三维滑动面节点应力状态差异使微面内的切向滑动力与抗滑力作用方向存在微小差异, 构建三维复杂滑动面切向应力合成矢量在投影-耗散正交极值方向的塑性极限平衡抗滑稳定计算理论模型。完成理论模型的三维拓展, 并给出理论模型具体计算方法步骤。通过典型稳定算题的微面切向滑动力与抗滑力势能比极值特性曲线和计算极值点的吻合程度证明理论模型的合理可靠性。并且依典型算例探讨了有限元应力场影响因素的变化对理论模型解的敏感性。矢量理论模型是抗滑稳定力学基础理论创新性的研究成果, 具有重大理论发展推进作用和工程实际使用经济价值。

**关键词:** 三维边坡; 抗滑稳定; 滑动势能; 耗散势能; 安全度

中图分类号: TU432

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2024)12-2629-13

**作者简介:** 孙建生(1958—), 男, 硕士, 副教授, 主要从事水工结构及其抗振方面的研究。E-mail: SJSD1053@163.com。

## Theoretical model for limit equilibrium anti-sliding stability of stress vectors on three-dimensional sliding surface based on projection direction extreme principle

SUN Jiansheng

(Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

**Abstract:** According to the projection direction extreme principle, in which the unbalance characteristics of non-collinear forces formed by tangential stress vectors on the complex sliding surface are revealed and the sliding potential energy ratio of the unbalance stress vectors in the equilibrium direction has the maximum, and minimum potential energies in the dissipation direction, in view that the difference of the stress state of the joints on the three-dimensional sliding surface leads to slight difference between direction of the tangential sliding force and that of the anti-sliding force in the micro-element plane, a theoretical model for calculating the stability of a three-dimensional complex sliding surface against sliding in the plastic limit equilibrium is proposed in the direction of the projection-dissipation orthogonal extreme. The three-dimensional expansion for the theoretical model is completed, and the concrete calculation steps of the theoretical model are given. The reasonable reliability of the model is proved by the curve of the extreme value of potential energy ratio between tangential sliding force and anti-sliding force on the sliding surface of typical stability problems and the degree of agreement between the calculated extreme point and the model. The sensitivity of the change of the factors affecting the finite element stress field to the solution of the theoretical model is also discussed. The vector theoretical model is an innovative research on the basic mechanics theory of anti-slide stability, which is of important theoretical development and practical economic value.

**Key words:** three-dimensional slope; stability against sliding; sliding potential energy; dissipated potential energy; safety degree

## 0 引言

边坡及坝基深层的抗滑稳定计算是岩土工程重要研究内容。目前, 三维滑动面极限平衡抗滑稳定计算方法<sup>[1]</sup>主要是二维方法的拓展, 由于极限平衡方法存在不同假设条件使得三维扩展失去了严格理论基础<sup>[2-3]</sup>。

即复杂滑动面(非单一滑动平面)极限平衡方法本质属于力学静不定问题, 通过静力平衡条件确定每个分块底面的法向力和切向力必须对分块界面上的作用力要素进行经验简化假设。

收稿日期: 2023-09-25

如果采用有限元方法计算得到的真实应力场，通过应力积分就可以确定每个分块底面的实际法向力  $N_m$  和切向滑动力  $T_m$ ，由法向力可以确定分块底面的切向理论极限抗滑力  $S_m=fN_m+cA_m$ 。把每个分块底面切向滑动力  $T_m$  矢量求和可得滑动力合成矢量  $T$ ，同样把每个底面的切向抗滑力  $S_m$  矢量求和得出抗滑力合成矢量  $S$ 。若能够得到潜在滑动面以矢量力表达的抗滑稳定极限平衡安全度系数，则所有抗滑稳定计算中存在的缺陷、简化假设问题可以彻底消除。然而，滑动力合矢量  $T$  与抗滑力合矢量  $S$  作用方向存在夹角  $\delta$  为非共线不平衡力，非共线不平衡矢量力条件下的极限平衡抗滑稳定安全度系数计算研究成为世界级理论空白难题。

潜在滑动面的抗滑稳定安全度系数是表达实际受力情况的切向滑动力与滑面在实际受力条件下能够提供的理论极限概念状况抗滑力的接近程度，即两种状况的极限平衡接近程度。为了依据有限元应力场实际受力情况的滑动力矢量  $T_m$  与理论概念状况的极限抗滑力矢量  $S_m$ ，研究矢量抗滑稳定极限平衡安全度系数，作者发现并提出了投影方向极值原理<sup>[4-5]</sup>，揭示了潜在滑动面应力矢量非共线不平衡特征条件的抗滑稳定极限平衡计算内在极值规律。

对于二维滑动面问题已在文献[5]中详细论证，本文根据三维实际应力场特性重点讨论投影方向极值原理的三维扩展模型（以下简称理论模型）及其具体使用程序步骤。三维潜在滑动面研究对象任意点  $i$  上的真实应力、极限平衡计算受力如图 1。图 1 中  $\tau$  与  $s/K$  为共线应力。

单一滑动平面的极限平衡法为静定问题（安全系数  $K$  时的极限平衡概念表达式  $\frac{(fN + cA) / K}{T} = 1$ ，分子为理论可用极限概念状况，分母为真实受力状况）。对于复杂滑动面极限平衡法本质为力学超静定问题的经验简化假设条件下的按静定平衡近似求解方法。其三维扩展时所增加的简化假设条件大于平衡方程数目，使得所有三维极限平衡算法<sup>[6-17]</sup>都难于摆脱简化假设的窘境。但是，理论模型的三维扩展却十分简便，根本原因是理论模型已经囊括了抗滑稳定计算问题的普遍力学本质——复杂滑动面的滑动应力合矢量与理论极限抗滑应力合矢量普遍是非共线不平衡力的客观规律，只有特例情况才是矢量共线极限平衡问题（单一滑动平面或复杂滑动面在完全理想塑性的临界共线极限状态时，合矢量夹角  $\delta=0$ ）。非共线不平衡力系的平衡计算投影方向及力矩中心点位置选取对安全系数的影响敏感，且其影响随着合矢量夹角的大小而变化，必须采用投影方向极值原理才能理论求解安全程度。相关问题的阐述及各种计算方法存在的缺陷

参阅文献[5]，需要重点说明 4 点。

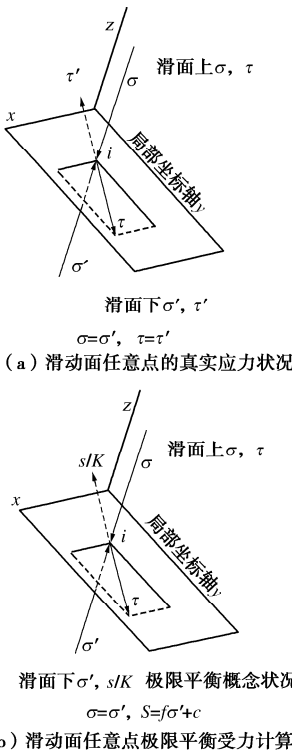


图 1 滑动面任意点的真实应力状况与极限平衡受力计算简图

Fig. 1 Real stress states of any point on slip surface and calculation of limit equilibrium forces

(1)投影方向极值原理揭示了复杂滑动面的滑动力矢量与极限抗滑力矢量为非共线不平衡力，其势能比具有正交极值特性。即确定安全系数  $K$  的极限平衡研究计算方向滑动势能比最大、确定极限状态接近程度系数  $\lambda$  的耗散方向势能最小。

(2)理论模型是根据滑动面应力矢量不平衡力的固有势能极值正交特性，把矢量非共线不平衡问题的极限平衡抗滑稳定计算分成两个独立正交极值方向分别研究矢量力的抗滑性能贡献。潜在滑动面研究对象的应力矢量极限平衡抗滑稳定安全度计算成为极值正交双向计算理论。

(3)有限元应力场计算成果原本是平衡的，为了根据真实应力场计算极限平衡抗滑稳定安全度，使滑动面两侧的切向滑动应力合矢量与理论可用极限抗滑应力合矢量成为非共线不平衡力系统。那么，在抗滑稳定完整计算过程中必须使该系统达到极限平衡，理论模型通过极限状态程度系数  $\lambda$  归一化——得到塑性耗散力  $F_{ts}$  为 0 的共线极限平衡安全度系数  $K_\lambda = K \div \lambda$ ，客观理论表达了真实受力应力状况和极限抗滑力概念状况的矢量力共线极限平衡抗滑稳定安全度。

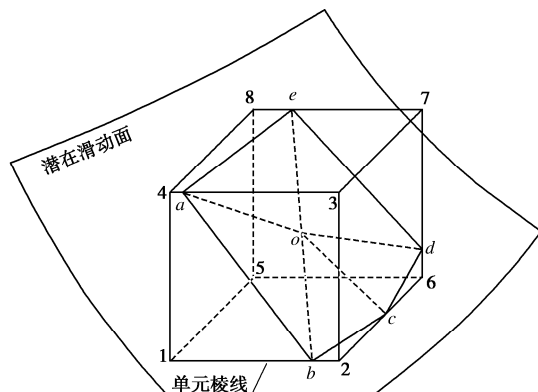
(4)考虑三维滑动面应力矢量极限平衡时，由于滑动面与单元棱线每个交点的应力状态不同，极限抗滑应力方向按交点滑动剪应力方向确定时，由交点及其形心点组成的单元内小三角形滑平面（简称微面）

上的切向滑动力矢量与抗滑力矢量作用方向在微面内存在微小偏角。因此, 三维滑动面应力矢量极限平衡必须考虑两者作用方向偏角影响(二维情况单元的滑动力与抗滑力方向均沿滑面方向不存在偏角)。

## 1 三维滑动面投影方向极值原理模型

### 1.1 空间滑动面投影方向极值原理

理论模型研究对象是潜在滑动面, 在真实受力条件的整体极限平衡安全度(为了便于理解和表述可把三维潜在滑动面视为具有微小厚度的空间壳体)。滑面上侧受力为考虑了滑动体应力应变本构关系和满足变形协调要求的有限元计算成果应力, 即切向应力  $\tau$  和法向应力  $\sigma$ , 滑面分布应力与滑动体真实受力特性具有平衡等价功效; 滑面下侧受力为理论极限概念的可用切向应力  $s/K = (f\sigma' + c)/K$  和法向应力  $\sigma'$ , 其中  $\sigma' = \sigma$  (大小相等分布相同、作用方向相反); 滑面两侧的切向应力  $\tau$  与  $s/K$  为共线应力。滑面通过实体单元的三角形微面矢量极限受力简图如图 2。



1—8为单元节点  $a-e$ 为单元棱线与潜在滑动面交点  
o单元与滑面交点的形心点在滑动面上的落点  
(a) 潜在滑动面通过单元棱线交点构成的三角形微面示意图

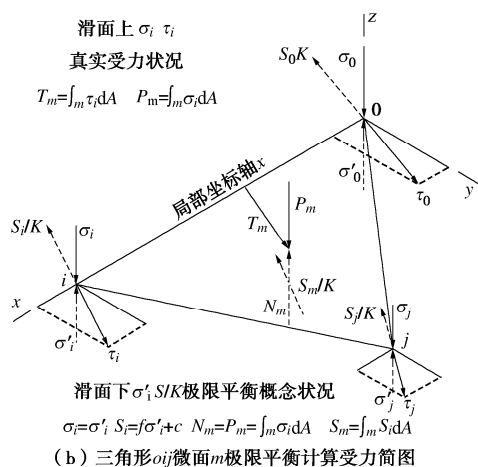


图 2 滑面通过单元三角形微面矢量极限平衡计算简图

Fig. 2 Calculation of vector limit equilibrium on triangle micro-plane of sliding surface over element

微面上侧的切向合力为  $T_m$ 、法向合力  $P_m$ ; 微面下侧的切向合力为  $S_m/K$ 、法向合力  $N_m$ ; 微面两侧的法向合力为平衡力  $N_m = P_m$ , 而切向合力  $T_m$  和  $S_m/K$  为非共线不平衡力。法向平衡合力中不包括考虑开裂时需要释放的拉力。

潜在滑动面两侧的切向力、法向力矢量求和, 得切向滑动力合矢量  $T = \sum_m \vec{T}_m$ 、可用极限抗滑力合矢量

$$S/K = \sum_m \vec{S}_m/K, \text{ 法向平衡合矢量 } -N = P = \sum_m \vec{P}_m. \text{ 绘制}$$

潜在滑动面各微面三维矢量图, 沿合矢量  $S$  和  $T$  所确定平面(记为  $ST$  平面)的法线方向观察, 即把滑动面的所有矢量力投影到  $ST$  平面上, 如图 3 所示(因法向平衡矢量  $N_m = -P_m$  为反向重叠闭环, 对矢量平衡没有影响, 图中未示出)。

图 3 中  $T'_m$ ,  $S'_m$  分别是微面  $m$  的滑动力矢量  $T_m$ 、抗滑力矢量  $S_m$  在  $ST$  平面的投影;  $\alpha_m$ ,  $\varepsilon_m$  分别为  $T'_m$ ,  $S'_m$  与合矢量平面局部坐标轴  $x$  方向的倾角(二维情况  $\alpha_m = \varepsilon_m$ ); 微面  $m$  的  $i$  点的滑动应力  $\tau_i$  和抗滑应力  $s_i$  在  $ST$  平面的投影为  $\tau'_i$  和  $s'_i$ , 则矢量积分  $T'_m = \int_m \vec{\tau}'_i dA_m$ 、 $S'_m = \int_m \vec{s}'_i dA_m$ ;  $F'_n$  和  $\omega_n$  分别为微面  $n$  拉应力大于允许值考虑开裂时需要释放的拉力矢量在合矢量平面的投影和倾角, 矢量  $F'_n = \int_n \vec{\sigma}'_{in} dA_n$ ;  $\theta$  为合矢量平面内投影极值方向与局部坐标轴  $x$  的夹角。

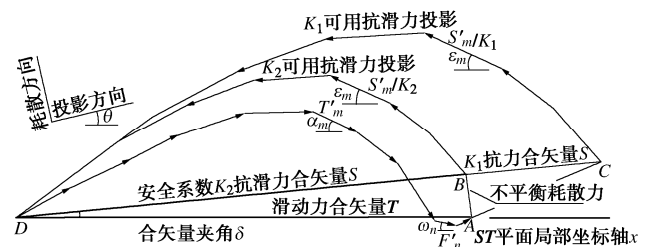


图 3 三角形微面矢量力在合矢量平面的投影示意图

Fig. 3 Projection sketch of vector forces of triangular micro-plane in resultant vector plane

矢量图 3 表明:

(1) 真实应力场时给定三维滑动面的合矢量夹角  $\delta$  为固定值与安全系数  $K$  无关, 但不平衡耗散力的方向和大小随安全系数  $K$  的变化而变化。

(2) 计算安全系数  $K$  的平衡投影方向  $\theta$  应该垂直于不平衡耗散力( $K_2$  时垂直于  $AB$ ,  $K_1$  时垂直于  $AC$ ), 才能消除耗散力的影响。但安全系数是未知量, 平衡投影方向  $\theta$  与安全系数有关必然也是未知量。

(3) 投影方向只能得到 1 个平衡方程, 不可能理论定解  $K$  和  $\theta$  两个未知量, 若要得到理论解必须采用

投影方向极值原理的各点不平衡力势能极值条件方程。

(4) 投影方向极值原理在图 3 中的具体表达: 在垂直于  $AB$  的投影方向各矢量力达到极限平衡, 同时该方向的滑动势能能达到最大; 沿  $AB$  方向的不平衡耗散力最小, 同时  $AB$  方向的耗散势能也最小。

(5) 如果不平衡耗散力  $F_{ts}$  为 0, 则  $A$  点与  $B$  点重合、合矢量夹角  $\delta=0$ , 滑动面在安全系数  $K$  达到整体塑性临界共线极限平衡状态, 滑动面的矢量极限平衡安全度系数等于  $K$ 。

## 1.2 空间滑动面理论模型建立

依三维滑动面的矢量图 3, 在耗散方向的耗散力

$$F_{ts} = \sum_m \left[ T'_m \sin(\theta + \alpha_m) - \frac{S'_m}{K} \sin(\theta + \varepsilon_m) \right] + \sum_n F'_n \sin(\theta + \omega_n) \quad (1)$$

将矢量力  $T'_m = \int_m \vec{\tau}'_i dA_m$ ,  $S'_m = \int_m \vec{s}'_i dA_m$ ,  $F'_n = \int_n \vec{\sigma}'_{i\text{拉}} dA_n$

代入, 并把滑动面应力矢量积分写成标量积分可得

$$F_{ts} = \sum_m \int_m \left[ \tau'_i \sin(\theta + \alpha_m + \beta_{ti}) - \frac{s'_i}{K} \sin(\theta + \varepsilon_m + \beta_{si}) \right] dA_m + \sum_n \int_n \sigma'_{i\text{拉}} \sin(\theta + \omega_n + \beta_{\sigma i\text{拉}}) dA_n \quad (2)$$

式中:  $\beta_{ti}$ ,  $\beta_{si}$ ,  $\beta_{\sigma i\text{拉}}$  分别为微面的应力矢量与其合矢量方向的夹角。

令  $\alpha_i = \alpha_m + \beta_{ti}$ ,  $\varepsilon_i = \varepsilon_m + \beta_{si}$ ,  $\omega_i = \omega_m + \beta_{\sigma i\text{拉}}$ ,

并把三维滑动面各微面求和式  $\sum_m \int_m f(x) dA_m$  简写成

$\int_A f(x) dA$ , 得不平衡耗散力为

$$F_{ts} = \int_A \left[ \tau'_i \sin(\theta + \alpha_i) - \frac{s'_i}{K} \sin(\theta + \varepsilon_i) \right] dA + \int_A \sigma'_{i\text{拉}} \sin(\theta + \omega_i) dA \quad (3)$$

在投影方向的平衡条件为

$$\sum_m \left[ T'_m \cos(\theta + \alpha_m) - \frac{S'_m}{K} \cos(\theta + \varepsilon_m) \right] + \sum_n F'_n \cos(\theta + \omega_n) = 0 \quad (4)$$

同样代入矢量力的应力积分和式 (3) 相同的简写变化过程得到:

$$\int_A \left[ \tau'_i \cos(\theta + \alpha_i) - \frac{s'_i}{K} \cos(\theta + \varepsilon_i) \right] dA + \int_A \sigma'_{i\text{拉}} \cos(\theta + \omega_i) dA = 0 \quad (5)$$

由耗散力最小极值条件  $\frac{\partial F_{ts}}{\partial \theta} = 0$  或投影方向平衡条件均可得

$$K = \frac{\int_A s'_i \cos(\theta + \varepsilon_i) dA}{\int_A \tau'_i \cos(\theta + \alpha_i) dA + \int_A \sigma'_{i\text{拉}} \cos(\theta + \omega_i) dA} \quad (6)$$

滑动面的不平衡耗散力  $F_{ts}$  是由于三角形微面的共线不平衡应力矢量  $(\tau_i - s_i/K)$  引起的, 那么, 该剪切应力矢量在  $ST$  平面内沿投影方向的分量为  $\left[ \tau'_i \cos(\theta + \alpha_i) - \frac{s'_i}{K} \cos(\theta + \varepsilon_i) \right]$ , 此分量对应的剪切应变为  $\left[ \tau'_i \cos(\theta + \alpha_i) - \frac{s'_i}{K} \cos(\theta + \varepsilon_i) \right]/G$ 。三角形微面的滑动

势能为  $\int_m \left[ \tau'_i \cos(\theta + \alpha_i) - \frac{s'_i}{K} \cos(\theta + \varepsilon_i) \right]^2 \frac{dA_m}{G}$ , 则滑动面在投影方向的滑动势能 (并考虑释放拉力) 为

$$W_\theta = \int_A \left[ \tau'_i \cos(\theta + \alpha_i) - \frac{s'_i}{K} \cos(\theta + \varepsilon_i) \right]^2 \frac{dA}{G} + \int_A \frac{\sigma'^2_{i\text{拉}} \cos^2(\theta + \omega_i)}{E} dA \quad (7)$$

同理可得耗散方向耗散势能为

$$W_{\perp\theta} = \int_A \left[ \tau'_i \sin(\theta + \alpha_i) - \frac{s'_i}{K} \sin(\theta + \varepsilon_i) \right]^2 \frac{dA}{G} + \int_A \frac{\sigma'^2_{i\text{拉}} \sin^2(\theta + \omega_i)}{E} dA \quad (8)$$

总势能为

$$W = W_\theta + W_{\perp\theta} = \int_A \left( \tau_i^2 + \frac{s_i^2}{K^2} \right) \frac{dA}{G} - 2 \int_A \frac{\tau'_i s'_i}{KG} \cos(\alpha_i - \varepsilon_i) dA + \int_A \frac{\sigma'^2_{i\text{拉}}}{E} dA \quad (9)$$

由滑动势能最大极值条件  $\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = 0$  或耗散势能

$$\text{最小极值条件 } \frac{\partial W_{\perp\theta}}{\partial \theta} = 0 \text{ 均可得} \\ a \frac{1}{K^2} - 2b \frac{1}{K} + c = 0 \quad (10)$$

式中:  $a = \int_A \frac{s_i'^2}{G} \sin(2\theta + 2\varepsilon_i) dA$ ;

$$b = \int_A \frac{\tau'_i s'_i}{G} \sin(2\theta + \varepsilon_i + \alpha_i) dA;$$

$$c = \int_A \frac{\tau_i'^2}{G} \sin(2\theta + 2\alpha_i) dA + \int_A \frac{\sigma'^2_{i\text{拉}}}{E} \sin(2\theta + 2\omega_i) dA。$$

由极值条件方程式 (10) 得

$$K = \frac{a}{b \pm \sqrt{b^2 - ac}} \quad (11)$$

联立式 (6), (11) 两个极值条件超越方程, 可以唯一量求得安全系数  $K$  和相对于合矢量平面局部坐标轴的投影极值方向角  $\theta$ 。

$G, E$  分别为第  $i$  计算点处的剪切模量和弹性模量。当考虑拉应力大于允许拉应力开裂时, 开裂点处仅有需要释放的应力没有任何抗力; 当不考虑拉应力大于允许拉应力开裂时, 有关  $\sigma'_{i\text{拉}}$  项从模型中删除即可。本文及文献[5]为开裂后理论模型, 文献[4]为开裂前考虑抗拉理论模型。

把联立方程求解得到的投影极值方向角  $\theta$  及安全系数  $K$  代入式 (3) 可得耗散力  $F_{\text{ts}}$ , 则耗散方向极限状态接近程度系数:

$$\lambda = 1 - \frac{F_{\text{ts}}}{T \cos(\theta - \mu)} \quad (12)$$

滑动面应力矢量极限平衡抗滑稳定安全度系数:

$$K_{\lambda} = K \div \lambda \quad (13)$$

式中:  $\mu$  为滑动力合矢量  $T$  与合矢量平面局部坐标轴  $x$  的夹角。

安全系数  $K$  为实际受力条件下在投影极值方向的极限平衡理论解, 但此时耗散方向仍然存在不平衡耗散力  $F_{\text{ts}} \neq 0$ , 由其表达的极限状态接近程度系数  $\lambda < 1$ , 当极限状态接近程度系数为 1 时不平衡耗散力  $F_{\text{ts}} = 0$  所对应的考虑滑面塑性发展安全储备矢量力共线极限平衡安全系数就是  $K_{\lambda}$ 。

由式 (9) 可知总势能  $W$  与投影方向角  $\theta$  无关, 因此, 滑动势能  $W_{\theta}$  或耗散势能  $W_{\perp\theta}$  对投影方向  $\theta$  求偏导的极值条件  $\frac{\partial W_{\theta}}{\partial \theta} = 0$  或  $\frac{\partial W_{\perp\theta}}{\partial \theta} = 0$ , 等价于势能比极值条件  $\frac{\partial W_{\theta}/W}{\partial \theta} = 0$  或  $\frac{\partial W_{\perp\theta}/W}{\partial \theta} = 0$ , 即势能极值条件方程式 (10) 等价于势能比极值条件方程。

共线平衡力系计算问题的投影方向和力矩中心位置可以任意选取计算结果不变, 但非共线不平衡矢量力情况两者都不能随意选取。当使用力矩平衡条件时, 力矩平衡中心点位置必须在不平衡耗散力作用线上, 同时还必须远离滑动面处才行。由力矩平衡条件方程得到的安全系数  $K$  与投影极值方向解相同。力矩中心点位置极值原理是对投影方向极值原理的进一步补充和限定, 是理论模型封闭完备的必要条件—阻断理论模型的非议漏洞。

极值条件不是笔者经验假设, 是客观自身存在的规律表现, 笔者仅仅是发现和揭示了事物内在本质联系特性, 并利用这个普世规律研究滑动面应力矢量极限平衡抗滑稳定理论模型。

## 2 理论模型计算步骤

因有限元应力场为单元节点的数值解, 因此理论模型计算过程只能先依据三角形微面各角点的应力坐

标分量计算微面合矢量力坐标分量, 具体有 10 个步骤。

(1) 采用现行可靠有限元软件 (如 ANSYS、ABAQUS 等), 确定考虑塑性影响的真实单元应力场。

(2) 根据应力场计算结果, 确定滑动面与其通过单元棱线的交点坐标值及单元应力场在该点的应力数值  $\{\sigma\}_e = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}_e$ ; 由单元棱线各交点的坐标及其应力确定单元所有交点的形心点坐标及其应力数值, 并计算形心点对应的滑面上落点坐标。根据有限元网格相邻单元关系确定各交点处相邻单元在交点的应力平均数值  $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ 。

(3) 确定滑动面通过单元三角形微面的局部坐标系与整体坐标系的转换矩阵  $[B]$ :

$$[B] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中:  $l_i, m_i, n_i$  分别为微面局部坐标轴  $x', y', z'$  在整体坐标系  $xyz$  中的方向余弦, 并且  $n_i$  为微面的法线方向余弦。

(4) 根据局部坐标应力与整体坐标应力转换关系  $[\sigma]_i = [B]^T [\sigma] [B]$  确定微面各角点在局部坐标系的法向应力  $\sigma_{i'}$ 、切向应力分量  $\tau_{i'x'}$  和  $\tau_{i'y'}$ 。其中

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

(5) 由单元棱线交点的形心点落点和单元的 2 个相邻棱线交点构成一个三角形微面, 由切向应力  $\tau_{i'x'}$  和  $\tau_{i'y'}$  计算三角形微面的滑动力分量  $T_{i'x'}$ 、 $T_{i'y'}$ ; 按每个点的滑动应力方向和法向应力  $\sigma_{i'}$  计算极限抗滑应力  $s_i = f_i \sigma_{i'} + c_i$  及抗滑应力坐标分量  $s_{i'x'}$  和  $s_{i'y'}$ , 计算三角形微面局部坐标方向抗滑力分量  $S_{i'x'}$  和  $S_{i'y'}$ 。分别把微面的滑动力、抗滑力局部坐标分量转换成整体坐标分量:  $F_x = F_{i'x'} l_1 + F_{i'y'} m_1$ ,  $F_y = F_{i'x'} l_2 + F_{i'y'} m_2$ ,  $F_z = F_{i'x'} l_3 + F_{i'y'} m_3$ 。

(6) 把各微面的滑动力、抗滑力整体坐标分量分别累加, 得到滑动力总合矢量  $T$  的坐标分量 ( $T_x, T_y, T_z$ ) 及抗滑力  $S$  总合矢量的坐标分量 ( $S_x, S_y, S_z$ )。根据 2 个总合矢量的坐标分量计算合矢量所在平面的局部坐标-整体坐标转换矩阵, 形式如同  $[B]$ 。

(7) 把各微面的滑动力、抗滑力整体坐标分量分别投影到合矢量平面内, 得到各微面滑动力  $T'_i = \tau'_i dA$ 、抗滑力  $S'_i = s'_i dA$ 、相对于合矢量平面局部坐标轴  $x$  的倾角  $\alpha_i$  和  $\varepsilon_i$ 。

(8) 当滑动面上有需要释放的拉应力时, 计算方法过程同上。

(9) 检查各微面的滑动力是否有与滑动力合矢量反向的, 若有把该微面上的抗滑力方向进行反向(微面上滑动力与滑动力合矢量反向时, 该微面的抗滑力与其同向)。全部检查操作完成后重新计算抗滑力合矢量坐标分量及合矢量所在平面的局部坐标-整体坐标转换矩阵, 返回到第(7)→(10)步。若无则进行第(10)步。

(10) 在合矢量平面内, 根据计算理论模型确定安全系数  $K$ 、投影极值方向角  $\theta$ 、极限状态接近程度系数  $\lambda$ 、滑动面应力矢量安全度系数  $K_\lambda$ 。

计算程序主框图见图 4。

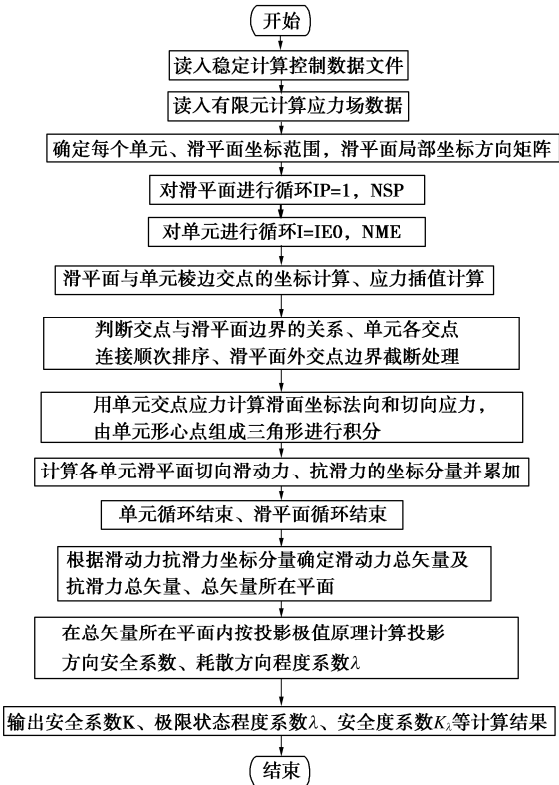


图 4 计算程序主框图

Fig. 4 Block diagram calculation procedure

3 三维典型算例理论模型解

3.1 椭球滑动面边坡 Zhang-X 算例<sup>[6]</sup>

算例坡高 12.2 m, 坡比 1 : 2, 包括无软夹层椭球滑动面和坡脚以下 1.45 m 处 0.1 m 厚水平软夹层组合椭球面 2 种情况, 土层物理力学参数如表 1。

表 1 椭球滑动面土层力学参数

Table 1 Mechanical parameters of soil on ellipsoidal surface						
参数	内摩擦角 $\varphi/ (^{\circ})$	黏聚力 $c/ (\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	重度 $\gamma/ (\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	弹性模量 $E/ \text{kPa}$	泊松比 $\mu$	剪胀角 $\psi/ (^{\circ})$
土层	20	28.74	18.84	$5.0\times 10^4$	0.30	4
软层	10	0.	18.84	$2.0\times 10^3$	0.25	2

有限元应力场计算采用 ANSYS 软件, 塑性屈服准则按主应力空间莫尔库仑强度条件的六棱锥等底面积圆锥 Druker-Prager 塑性屈服条件计算<sup>[18]</sup>。抗滑稳定影响区域 Solid45 六面体单元边长最大不超过 2 m, 自重分 5 个荷载增量子步施加。有限元模型坡面倾向的水平方向为  $x$  坐标轴方向范围 0~50 m, 坡面走向为  $z$  坐标轴方向 0~150 m, 高度方向为  $y$  坐标 0~22.2 m。对称面处坡肩点坐标 (14.6, 22.2, 75)、坡脚点 (39, 10, 75)。有软夹层情况共计剖分单元 34650 个, 单元剖分网格及水平位移云图见图 5。

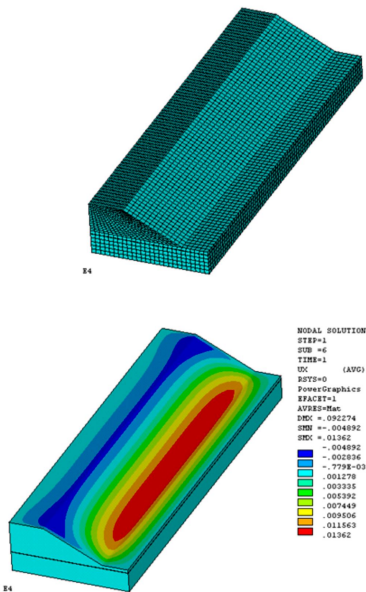


图 5 有限元网格及水平位移云图

Fig. 5 Finite element meshes and nephogram of horizontal displacement

椭球滑动面中心点坐标 (32.9, 31.3, 75), 短轴 24.4 m, 长轴 66.9 m, 椭球面方程式为

$$\frac{(x-32.9)^2}{24.4^2} + \frac{(y-31.3)^2}{24.4^2} + \frac{(z-75)^2}{66.9^2} = 1。$$

两种计算情况对称面处等效塑性应变云图及滑动面如图 6 所示, 理论模型解及相关文献计算结果见表 2, 3。

由表 2, 3 计算结果可以看出, 三维极限平衡法与理论模型解偏差为 -14.13%~+4.24%。无软夹层情况 1 的均质边坡极限平衡法计算结果与理论模型解偏差较小 -2.08%~+4.24%, 但有软夹层的情况 2 时都是小于理论模型解偏于安全的估计值, 如 Zhang-X 极限平衡法偏差 -14.13%, 并且同一方法两种情况偏差变幅最大。

矢量理论模型安全度系数表达两种滑面情况的绝对安全度  $K_\lambda$  为 2.1661, 1.7725 级差为 0.3936; 极限状态接近程度系数表达滑面距离完全塑性临界共线极限平衡状态的相对安全度  $1/\lambda$  为 1/0.9458, 1/0.9796 级差为 0.0345。



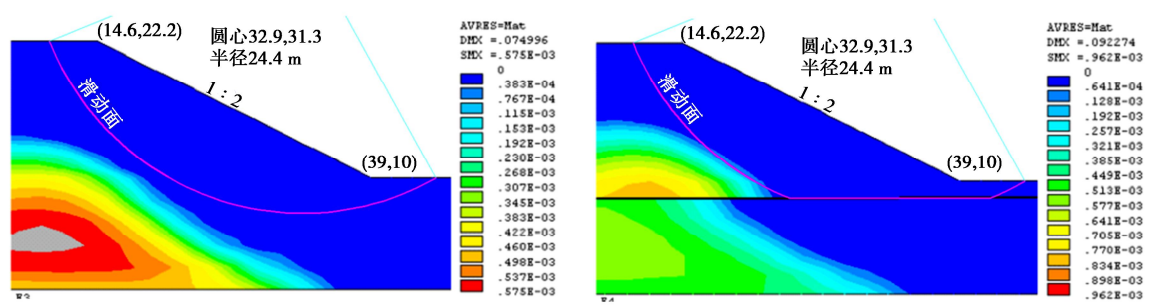


图 6 椭球滑动面对称面处无软夹层情况、有软夹层情况等效塑性应变云图

Fig. 6 Equivalent plastic strain nephogram of ellipsoidal sliding surface without and with soft strata on symmetric plane

表 2 椭球滑动面两种情况抗滑稳定计算结果

Table 2 Calculated results of stability of ellipsoidal sliding surface in two cases

计算方法	情况 1 无软夹层		情况 2 有软夹层	
	安全系数	与本文 $K_x$ 相比/%	安全系数	与本文 $K_x$ 相比/%
Zhang-X 极限平衡法 <sup>[6]</sup>	2.122	-2.08	1.553	-14.13
Hungr 简化 Bishop 法 <sup>[6]</sup>	2.167	+0.04	1.620	-9.41
陈祖煜极限平衡法 <sup>[2-3]</sup>	2.187	+0.96	1.640	-8.08
郑宏滑面极限平衡法 <sup>[7-8]</sup>	2.140	-1.22	1.706	-3.89
Lam 通用极限平衡法 <sup>[9]</sup>	—		1.603	-10.57
Huang 极限平衡法 <sup>[10]</sup>	—		1.665	-6.46
Jiang 主滑向极限平衡法 <sup>[11]</sup>	2.127	-1.84	1.766	-0.37
极限分析上限法 <sup>[3, 12]</sup>	2.262	+4.24	1.717	-3.23
应力数值解代数和法 <sup>[13]</sup>	—		1.607	-10.30
有限元应力主滑向极限平衡法 <sup>[14]</sup>	2.226	+2.69	1.730	-2.46

表 3 矢量理论模型计算结果

Table 3 Calculation results of vector theoretical model

参数	本文矢量理论解	滑动力合矢量倾角和合矢量夹角 $\delta$	投影极值方向倾角和投影极值方向角 $\theta$	应力代数和法安全系数	滑面通过单元数和三角形微面数
情况 1 无软夹层	$K_x=2.1661$ , $K=2.0546$ , $\lambda=0.9485$	倾角 $24.5607^\circ$ , 夹角 $\delta=2.8630^\circ$	倾角 $32.8839^\circ$ , $\theta=-8.3232^\circ$	代数和法 $K=2.1006$ , 与本文 $K_x$ 相比为-3.12%	单元 1606 个, 微面 6420 个
情况 2 有软夹层	$K_x=1.7725$ , $K=1.7363$ , $\lambda=0.9796$	倾角 $25.8634^\circ$ , 夹角 $\delta=1.1573^\circ$	倾角 $20.8109^\circ$ , $\theta=-5.0528^\circ$	代数和法 $K=1.7404$ , 与本文 $K_x$ 相比为-1.84%	单元 1684 个, 微面 6776 个

由图 6 可知，无软夹层情况的椭球滑动面通过区域的等效塑性应变小于  $38 \times 10^{-6}$ ；有软夹层情况的椭球面通过区域等效塑性应变最大值  $150 \times 10^{-6}$ ，软夹层内为  $35 \times 10^{-3} \sim 75 \times 10^{-3}$ 。有软夹层滑动面塑性程度远大于无软夹层，实际应力状况更接近临界共线极限平衡状态，滑动可能性大。

有软夹层情况，按滑动面 20 个单元面的应力合成矢量为—组数据，采用 CAD 精准绘制的合矢量平面内矢量平衡关系如图 7。

随投影方向角变化的安全系数、势能、势能比曲线见图 8。

矢量平衡关系图 7 中合矢量  $T$  与  $S$  的夹角与表 3 计算结果一致，滑动面的滑动力矢量与抗滑力矢量为非共线不平衡矢量；垂直于耗散力的投影极值方向与滑动力合矢量方向（合矢量平面局部坐标轴  $x$ ）夹角，与表 3 计算值  $\theta=-5.0528^\circ$  一致。

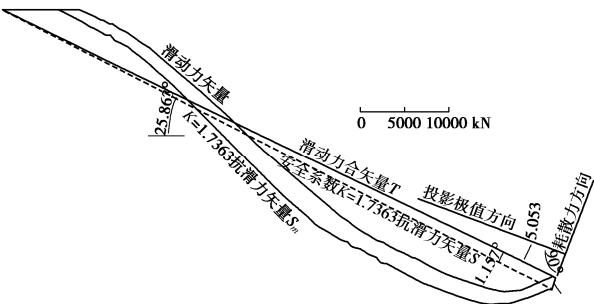


图 7 有软夹层情况合矢量平面内的矢量图

Fig. 7 Vectors in resultant vector plane with a soft stratum

图 8 中随投影方向角  $\theta$  增大变化，安全系数式(6)按直线规律增大（深绿色），安全系数式(11)按曲线快速减小（浅绿色），两式曲线交点为理论解。耗散势能曲线（粉色）、耗散势能比曲线（橘红色）、变形势能比曲线（紫色）的极值点与理论解投影方向角

$\theta=-5.0528^{\circ}$  一致。而变形能曲线（深蓝色）受安全系数变化影响敏感，沿投影方向轴的极值点位置与理论解不对应，但变形势能比曲线减小了安全系数的变化影响，精准地反应了极值条件方程物理意义。如果变形能曲线以总势能线（青色）为方向轴时的切点位置与投影极值方向角理论解对应。

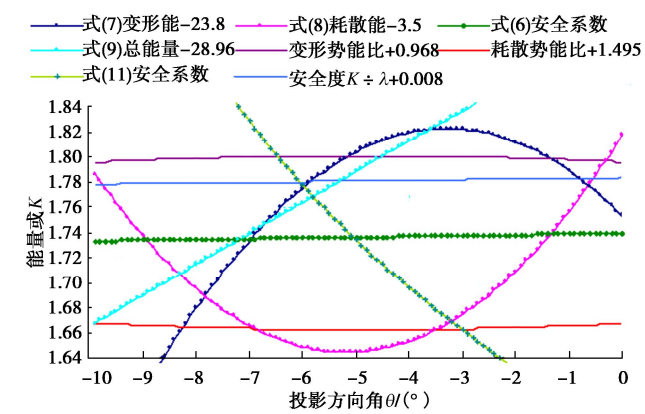


图 8 随投影方向角变化的安全系数、势能、势能比曲线  
Fig. 8 Curves of factor of safety, potential energy and potential energy ratio with respect to projection direction

3.2 楔体抗滑稳定算例理论解

楔体抗滑稳定算例 1 选自文献[2]、算例 2 选自文献[14]。几何形体及物理力学参数指标见表 4、5 所示。

有限元应力场计算采用 ANSYS 软件，结构面按厚度 0.4 m 的薄层六面体单元 Solid45，单元网格划分最大尺寸 3 m，结构面塑性屈服按主应力空间莫尔库

仑强度条件六棱锥等底面积圆锥理想弹塑性 D-P 准则。岩体为 Solid45 四面体单元，滑动体单元边长最大不超过 5 m，滑动面下部岩体最大边长 10 m。自重分 5 个荷载增量子步施加。有限元模型坡面倾向水平为  $x$  坐标方向，坡面走向为  $z$  坐标轴方向，高度方向为  $y$  坐标。算例 1 有限元模型坐标范围  $x=0\sim250$  m、 $y=5\sim110$  m、 $z=0\sim145$  m 共计剖分 419858 个单元，其中结构面单元 11616 个，如图 9；算例 2 坐标范围  $x=0\sim185$  m、 $y=30\sim150$  m、 $z=17\sim135$  m 剖分 342623 个单元，其中结构面单元 6936 个。

表 4 楔体几何形体特征

Table 4 Geometric features of wedges

部位	楔体算例 1		楔体算例 2	
	倾向/( $^{\circ}$ )	倾角/( $^{\circ}$ )	倾向/( $^{\circ}$ )	倾角/( $^{\circ}$ )
左结构面	115	45	120	40
右结构面	245	45	240	60
顶面	180	10	180	0
坡面	180	60	180	60
楔体坡高/m	64.89		98.4	

结构面单元的等效塑性应变云图见图 10。理论模型解及相关文献计算结果汇总见表 6、7。

由有限元等效塑性应变云图 10 可知楔体结构面最大塑性应变都位于楔体的坡面处最低点，楔体 1 对称情况塑性应变值为 0.015909 最小、非对称情况为 0.025739 最大、楔体 2 为 0.023369 居中，塑性应变值的大小表现了结构面的塑性发展程度。塑性程度排序与表 7 中极限状态程度系数的排序顺次一样，楔体 1

表 5 模型物理力学参数

Table 5 Physical and mechanical parameters of models

算例工况	内摩擦角 $\varphi/(^{\circ})$	黏聚力 $c/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-2})$	重度/ $(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	弹性模量 $E/\text{kPa}$	泊松比 $\nu$	剪胀角/ $(^{\circ})$
楔体 1 对称工况左右结构面	20	50	25.48	$1.0\times10^5$	0.25	4
弹性岩体			25.48	$5.0\times10^6$	0.20	
楔体 1 非对称工况左结构面	20	50	25.48	$1.0\times10^5$	0.25	4
右结构面			25.48	$1.0\times10^5$	0.25	
楔体 2 左右结构面相同	30	50	26.0	$1.0\times10^5$	0.25	4
弹性岩体			26.0	$5.0\times10^6$	0.20	

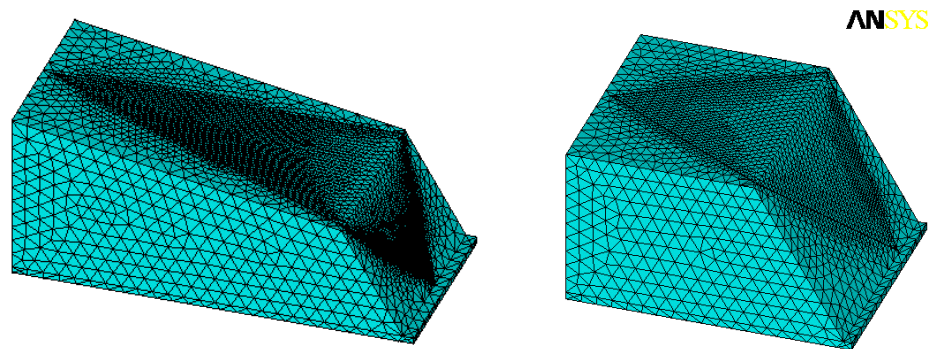


图 9 楔体算例 1 与算例 2 有限元剖分网格图  
Fig. 9 Finite element meshes of wedges (example 1 and example 2)



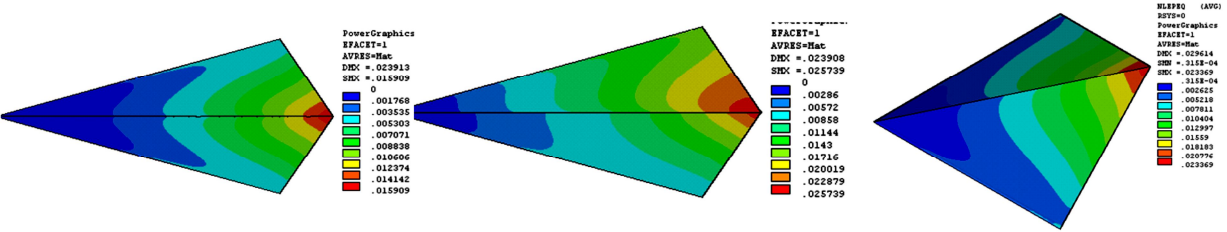


图 10 楔体 1 对称材料、楔体 1 非对称材料、楔体 2 结构面单元的等效塑性应变云俯视图

Fig. 10 Top views of equivalent plastic strain nephogram for wedge 1 (symmetric material), wedge 1 (asymmetric material) and wedge 2 in soft rock elements

表 6 楔体抗滑稳定算例计算结果

计算方法	楔体 1 材料对称			楔体 1 材料非对称			楔体 2 交线倾向 11.3380°		
	安全系数	投影倾角/(°)	与本文比较/%	安全系数	投影倾角/(°)	与本文比较/%	安全系数	投影倾角/(°)	与本文比较/%
楔体极限平衡 <sup>[15, 16]</sup>	1.5578	22.9098	+10.17	1.1815	22.9098	-7.91	1.6400	28.9964	+4.30
陈祖煜简化极限平衡法 <sup>[2]</sup>	1.556	22.9098	+10.06	1.167	22.9098	-9.25	—		
郑宏滑面严格平衡法 <sup>[8]</sup>	—						1.636		+4.07
极限平衡法 <sup>[11]</sup>	—						1.629		+3.66
主滑向应力代数和 <sup>[14]</sup>	—						1.497		-4.84

表 7 矢量理论模型计算结果

参数	楔体 1 材料对称		楔体 1 材料非对称		楔体 2 交线倾向 11.3380°	
	安全系数	投影倾角	安全系数	投影倾角	安全系数	投影倾角
本文矢量理论模型解	$K_\lambda=1.3994$	$40.2520^\circ$	$K_\lambda=1.2750$	$28.7662^\circ$	$K_\lambda=1.5694$	$42.2410^\circ$
安全系数 $K$ 和程度系数 $\lambda$	$K=1.3365$	$\lambda=0.9551$	$K=1.2384$	$\lambda=0.9713$	$K=1.5034$	$\lambda=0.9580$
合矢量夹角 $\delta$ 和投影倾向	$\delta=2.5649^\circ$	倾向 $0^\circ$	$\delta=1.6438^\circ$	倾向 $1.6267^\circ$	$\delta=2.3986^\circ$	倾向 $16.7218^\circ$
滑动力矢量倾角和倾向	倾角 $39.7084^\circ$	倾向 $0^\circ$	倾角 $29.1022^\circ$	倾向 $3.1532^\circ$	倾角 $44.0963^\circ$	倾向 $10.4716^\circ$
代数和法安全系数 $K$	$K=1.3392$	-4.50%	$K=1.2375$	-3.03%	$K=1.4978$	-4.78%
滑面通过单元和微面数	单元 11616 个	微面 46493 个			单元 6936 个	微面 28014 个

对称情况  $\lambda=0.9551$  相对安全度  $1/\lambda$  最大、非对称情况  $\lambda=0.9713$  相对安全度  $1/\lambda$  最小、楔体 2 的  $\lambda=0.9580$  居中。理论模型的极限状态接近程度系数与滑动面的塑性程度具有关联性。

由楔体抗滑稳定计算结果表 6, 7 可以看出, 三维极限平衡法与理论模型解的偏差  $-9.25\% \sim +10.17\%$ 。楔体 1 结构面材料力学参数对称时大于理论模型解 10%, 而非对称时又小于理论模型解  $-7.91\% \sim -9.29\%$ , 并且同一方法两种情况偏差最大变幅达到 19.3%。楔体 2 结构面几何特性非对称力学参数对称情况的极限平衡法与理论模型解偏差  $-4.84\% \sim +4.30\%$ 。

楔体算例 2 的合矢量平面内, 按 50 个单元面合矢量为—组数据精准绘制的矢量平衡关系及投影极值方向见图 11。合矢量平面内随投影方向角变化的安全系数、势能、势能比曲线见图 12。两图的解读分析与图 7, 8 相同不做赘述。

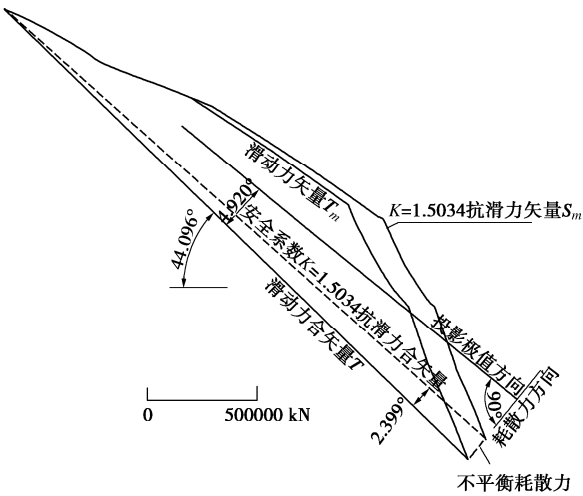


图 11 楔体算例 2 合矢量平面内的矢量平衡图

Fig. 11 Vector equilibrium of wedge 2 in resultant vector plane

岩质楔体极限平衡稳定计算方法<sup>[15-16]</sup>, 是以结构面交线方向为极限平衡计算方向, 即假设结构面的滑

动力和抗滑力方向是结构面交线方向,这种简化假设当楔体处于临界极限平衡状态是合理的(即安全度系数为 1 时具有合理性);当安全度系数不为 1 时的非临界极限状态时,滑动面上的剪切应力方向与结构面交线方向不同,必然导致了楔体极限平衡方法与理论模型解存在较大偏差,而且安全系数越远离 1 时假设计算方向影响的偏差就越大。楔体极限平衡抗滑稳定计算方法在安全系数非 1 时的计算结果是用临界极限平衡时的滑动方向研究一般极限平衡问题,具有极限平衡基本概念认知混淆固有偏差。特别是很多文献方法都以该方法的计算结果为评价标准,相关问题请岩土工程业内学者积极关注。

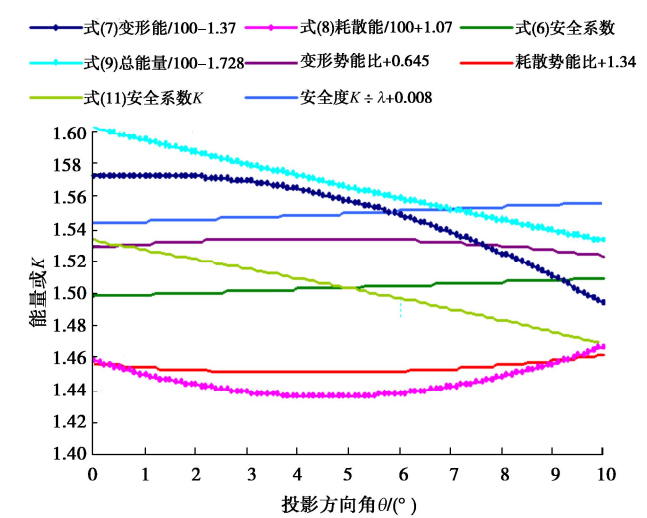


图 12 楔体算例 2 随投影方向变化的安全系数、势能曲线  
Fig. 12 Variation of curves of factor of safety and potential energy of wedge 2 with projection direction

滑面抗滑稳定极限平衡的安全度系数可以不为 1,而临界极限平衡的安全度系数为 1(即将滑动时刻),前者是一般极限平衡力学概念且包含后者特定情况,但绝不仅是临界极限平衡特定情况。两者的应力状态、力学基本概念具有本质区别,绝不能混淆基本概念用特例取代一般。土力学研究存在的诸多错误问题<sup>[19-21]</sup>根源都与该力学基本概念的混淆有关。

理论模型不受滑面交线方向影响,采用每个计算

点处的实际滑动剪切应力方向进行计算,没有人为简化假设限定和相应的适用条件制约。

4 应力场参数变化对理论解的敏感性

(1) 结构面单元剖分尺寸

采用非对称岩质楔体边坡算例 2 进行分析,对结构面剖分时控制最大尺寸分别采用 3 m 四面体单元和 3, 4, 5 m 的六面体单元进行有限元应力场计算,理论模型解如表 8 所示。

结构面有限元剖分尺寸对理论模型安全度系数的最大影响仅 0.115%。

(2) 弹性模量变化影响

采用非对称岩质楔体边坡的 5 m 六面体剖分网格,分别把结构面弹性模量  $1 \times 10^5$  kPa、岩体弹性模量  $5 \times 10^6$  kPa 乘以 0.5, 0.75, 1.25, 1.5 后计算有限元应力场,得到矢量理论模型抗滑稳定安全度系数计算结果如表 9。

结构面弹模增大、或岩体弹模减小时,滑动面的抗滑力矢量减小幅度大于滑动力,矢量理论安全度系数减小。而结构面与岩体的弹模按相同比例变化时,理论安全度系数几乎不变。

(3) 泊松比变化影响

分别把结构面泊松比  $\mu=0.25$ 、岩体泊松比  $\mu=0.20$  按 0.05 级差进行变化确定有限元应力场,理论模型安全度系数见表 10。

结构面泊松比增大、或岩体泊松比减小时滑动面的理论安全度系数减小。而结构面与岩体的泊松比按相同比例变化时,理论安全度系数随泊松比变化比例数值的增大而增大,变化幅度不大于 0.6%。

(4) 塑性流动法则参数剪胀角的变化影响

在结构面 D-P 模型的塑性本构流动法则中,塑性屈服应变参数剪胀角的变化对有限元应力场的影响,按照剪胀角为  $0^\circ$  至  $8^\circ$  级差  $2^\circ$  变化,理论安全度系数如表 11。

随结构面的塑性剪胀角增大,理论模型安全度系数减小,且安全系数和极限状态接近程度系数也减小。

表 8 单元剖分尺寸对理论模型解的影响

Table 8 Influences of element size on solution of theoretical model				
单元类型及尺寸	3 m 四面体	3 m 六面体	4 m 六面体	5 m 六面体
安全度系数 $K_s$	1.5711 (+0.108%)	1.5694 (0.0%)	1.5703 (+0.057%)	1.5712 (+0.115%)
安全系数 $K$	1.5055	1.5034	1.5045	1.5054
程度系数 $\lambda$	0.9582	0.9580	0.9581	0.9581
三角形微面数		28014	16417	10742
结构面单元数	13673	6936	4056	2646
单元总数	135732	342623	190545	127207

注: 括号内数字为相对于 3 m 六面体单元的安全度系数  $K_s$  变化率。

表 9 弹性模量变化对理论模型解的影响

Table 9 Influences of change of elastic modulus on solution of theoretical model

变化部位	弹性模量乘数	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
仅结构面	安全度系数 $K_\lambda$	1.6042 (+2.06%)	1.5858 (+0.92%)	1.5712	1.5592 (-0.77%)	1.5497 (-1.39%)
	程度系数 $\lambda$	0.9623	0.9599	0.9581	0.9566	0.9553
仅岩体	安全度系数 $K_\lambda$	1.5330 (-2.49%)	1.5555 (-1.01%)	1.5712	1.5825 (+0.71%)	1.5920 (+1.31%)
	程度系数 $\lambda$	0.9535	0.9562	0.9581	0.9595	0.9608
结构面	安全度系数 $K_\lambda$	1.5711	1.5711	1.5712	1.5711	1.5712
及岩体	程度系数 $\lambda$	0.9581	0.9581	0.9581	0.9581	0.9584

注：括号内数字为相对于弹性模量乘数 1.00 的安全度系数  $K_\lambda$  变化率。

表 10 泊松比变化对理论模型的影响

Table 10 Influences of Poisson's change on solution of theoretical model

部位	泊松比 $\mu$	$\mu=0.15$	0.20	0.25	0.30	0.350
结构面	安全度系数 $K_\lambda$	1.5849 (+0.86%)	1.5787 (+0.75%)	1.5712 (0.0%)	1.5619 (-0.60%)	1.4827 (-1.29%)
	程度系数 $\lambda$	0.9601	0.9593	0.9581	0.9571	0.9559
岩体	安全度系数 $K_\lambda$	1.5577 (-0.87%)	1.5712 (0.0%)	1.5856 (+0.91%)	1.6016 (+1.90%)	1.6171 (+2.84%)
	程度系数 $\lambda$	0.9570	0.9581	0.9593	0.9609	0.9622
两者同比例	泊松比乘数	0.75 $\mu$	0.8 $\mu$	1.0 $\mu$	1.2 $\mu$	1.4 $\mu$
	安全度系数 $K_\lambda$	1.5685 (-0.17%)	1.5689 (-0.15%)	1.5712 (0.0%)	1.5750 (+0.24%)	1.5805 (+0.59%)
	程度系数 $\lambda$	0.9584	0.9584	0.9581	0.9581	0.9583

注：括号内数字为相对于结构面泊松比  $\mu=0.25$ 、岩体泊松比  $\mu=0.20$  的安全度系数  $K_\lambda$  变化率。

表 11 剪胀角变化对理论模型解影响

Table 11 Influences of change of dilatancy angle on theoretical model

剪胀角	0°	2°	4°	6°	8°
安全度系数 $K_\lambda$	1.5800 (+0.56%)	1.5753 (+0.26%)	1.5712 (0.0%)	1.5681 (-0.20%)	1.5646 (-0.42%)
安全系数 $K$	1.5207	1.5126	1.5054	1.4997	1.4935
程度系数 $\lambda$	0.9625	0.9602	0.9581	0.9564	0.9546

注：括号内数字为相对于剪胀角 4° 的安全度系数  $K_\lambda$  变化率。

表 12 不同塑性准则对理论模型解的影响

Table 12 Influences of different plastic criteria on solution of theoretical model

塑性准则	等底面积 D-P	外接圆 D-P	弹性
安全度系数 $K_\lambda$	1.5712	1.4200 (-10.64%)	1.2960 (-21.23%)
安全系数 $K$	1.5054	1.3315	1.1801
程度系数 $\lambda$	0.9581	0.9397	0.9106
滑动力合矢量/(10 <sup>4</sup> kN)	292.525	306.053 (+4.42%)	321.222 (+8.93%)
滑动力合矢量倾角/(°)	44.1091	48.5751	51.6391
抗滑力合矢量/(10 <sup>4</sup> kN)	439.202	405.907 (-8.20%)	379.014 (-10.63%)
合矢量夹角/(°)	2.3900	3.5533	5.1188
极值方向倾角/(°)	42.3137	46.8366	51.4313
极值方向倾向/(°)	16.5601	20.8545	19.4447

注：括号内数字为相对于等底面积 D-P 准则的变化率。

(5) 结构面的塑性准则影响

分别采用主应力空间六棱锥等底面积圆锥 D-P 塑性准则、六棱锥外接圆锥 D-P 塑性准则、弹性模型计算应力场，相应的理论安全度系数计算结果见表 12。

结构面的塑性准则条件由等底面积 D-P 准则→外接圆 D-P 准则→弹性的变化过程，实质是对结构面塑

性屈服条件的放宽过程，即滑动面上实际剪应力虚假增大、而法向压应力虚假减小过程。剪应力的增大导致了滑动力合矢量的增大，而法向压应力的减小产生抗滑力的减小，因此使安全度系数显著减小。

笔者除探讨以上应力场影响因素规律外，还研究了结构面的抗剪断力学参数内摩擦角  $\varphi$  和黏聚力  $c$  逐

步减小情况,得到规律:合矢量夹角  $\delta$ 、安全度系数  $K_\lambda$  相应减小(逐步接近临界极限状态);极限状态接近程度系数  $\lambda$  逐步变大接近 1.0;合矢量夹角  $\delta$  逐步接近 0,滑动力合矢量的倾角和投影极值方向的倾角逐渐趋近于结构面交线的倾角(接近临界极限平衡状态)。但是,随抗剪断力学参数的减小,等底面积 D-P 塑性准则有限元应力场的塑性迭代计算收敛逐步变得困难(迭代次数增大机时增大),矢量理论模型安全度系数  $K_\lambda$  和安全系数  $K$  也逐步接近;滑动力合矢量倾角和投影极值方向倾角由陡于结构面交线倾角最终逐步变成了缓于结构面交线倾角。因此,本文认为对于三维岩质楔体边坡的抗滑稳定计算当采用等底面积 D-P 塑性准则时,矢量理论模型安全度系数的临界值是投影极值方向倾角不缓于结构面交线倾角的对应数值。对于等底面积 D-P 塑性准则应力计算无法收敛的楔体边坡(或计算收敛困难时),可采用外接圆 D-P 塑性准则应力场计算成果,此时矢量理论模型安全度系数的临界值建议以 1.05 为限。

## 5 结 论

三维滑动面应力矢量极限平衡抗滑稳定理论模型的建立和计算结果是岩土工程创新性基础力学理论研究成果。滑动面应力矢量势能极值特征曲线的存在性和极值点与计算结果的吻合关系是理论模型投影方向极值原理合理可靠性的具体证明。

(1)理论模型的三维拓展考虑每个计算点的应力状态差异性,使三角形微面切向滑动力与抗滑力的作用方向在微面内存在夹角是客观存在的合理表达。

(2)理论模型没有人为简化假设限定和适用条件制约,既适用于土质边坡抗滑稳定计算,也适用于岩质边坡抗滑稳定计算。

(3)理论模型的滑动面矢量抗滑稳定安全度系数  $K_\lambda = K \div \lambda$ ,由投影极值方向的极限平衡安全系数  $K$  和耗散方向的极限平衡状态接近程度系数  $\lambda$  确定。三维理论模型解是只依赖于空间有限单元应力场每个计算点的应力状态数值,通过 2 个极值条件方程理论定解。

(4)目前已有的三维极限平衡计算方法,在均质土边坡的椭球滑动面问题与理论模型解的偏差较小  $-2.0\% \sim +4.2\%$ ,而有软夹层情况的土质边坡或岩质楔体边坡稳定计算结果与理论模型偏差较大  $-14\% \sim +10\%$ 。相关问题应该引起岩土工程抗滑稳定研究学者的积极关注。

(5)有限元应力场的影响因素(单元剖分尺寸、弹性模量、泊松比、剪胀角、塑性准则)敏感性计算表明,三维岩质楔体稳定问题塑性准则的影响最大。

## 参考文献:

- [1] DUNCAN J M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 122(7): 577-596.
- [2] 陈祖煜, 弥宏亮, 汪小刚. 边坡稳定三维分析的极限平衡方法[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(5): 525-529. (CHEN Zuyu, MI Hongliang, WANG Xiaogang. A three-dimensional limit equilibrium method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(5): 525-529. (in Chinese))
- [3] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析: 原理·方法·程序[M]. 北京, 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zuyu. Soil Slope Stability Analysis: Theory, Methods and Programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003: 335-376. (in Chinese))
- [4] 孙建生. 基于有限元应力荷载宏观刚性滑裂面极限平衡抗滑稳定计算理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(4): 862-875. (SUN Jiansheng. Theoretical model of stability calculation of macro-rigid sliding planes with FEM stress load based on limit equilibrium[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(4): 862-875. (in Chinese))
- [5] 孙建生. 投影方向极值原理的滑裂面应力矢量极限平衡抗滑稳定计算理论[J]. 计算力学学报, 2023, 40(1): 93-104. (SUN Jiansheng. Theoretical model of limit equilibrium anti-sliding stability of stress vector on sliding planes based on projection direction extreme principle[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2023, 40(1): 93-104. (in Chinese))
- [6] XING Z. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plan view[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 114(6): 658-671.
- [7] 郑宏. 严格三维极限平衡法[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(8): 1529-1537. (ZHENG Hong. A rigorous three-dimensional limit equilibrium method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(8): 1529-1537. (in Chinese))
- [8] ZHENG H. Eigenvalue problem from the stability analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2009, 135(5): 647-656.
- [9] LAM L, FREDLUND D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30(6): 905-919.
- [10] HUANG C C, TSAI C C. New method for 3D and asymmetrical slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(10): 917-927.



- [11] JIANG Q H, ZHOU C B. A rigorous method for three-dimensional asymmetrical slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2018, **55**(4): 495-513.
- [12] CHEN Z Y, WANG X G, HABERFIELD C, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, **38**(3): 369-378.
- [13] STIANSON J R, FREDLUND D G, CHAN D. Three-dimensional slope stability based on stresses from a stress-deformation analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, **48**(6): 891-904.
- [14] 苏振宁. 三维边坡稳定有限元极限平衡法研究及应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2021. (SU Zhennin. Research and Application of Finite Element Limit Equilibrium Method for Three-Dimensional Slope Stability[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2021. (in Chinese))
- [15] HOEK E, BRAY J D. Rock Slope Engineering[M]. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 1981.
- [16] 陈祖煜. 岩质边坡稳定分析: 原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005. (CHEN Zuyu. Rock Slope Stability Analysis: Theory, Methods and Programs[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2005. (in Chinese))
- [17] CHEN Z Y, MI H L, ZHANG F M, et al. A simplified method for 3D slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, **40**(3): 675-683.
- [18] 赵尚毅, 郑颖人, 刘明维, 等. 基于 Drucker-Prager 准则的边坡安全系数定义及其转换[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(增刊 1): 2730-2734. (ZHAO Shangyi, ZHENG Yingren, LIU Mingwei, et al. Definition and transformation of slope safety factor based on Drucker-Prager criterion[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(S1): 2730-2734. (in Chinese))
- [19] 孙建生. 挡土墙土压力研究的错误倾向[J]. 岩土工程学报, 2016, **38**(7): 1324-1329. (SUN Jiansheng. Error tendency for studying earth pressure on retaining walls[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, **38**(7): 1324-1329. (in Chinese))
- [20] 孙建生. “矢量和法”抗滑稳定计算模型的力学概念错误[J]. 岩土工程学报, 2021, **43**(5): 975-980. (SUN Jiansheng. Mechanical concept errors in anti-sliding stability computational model of “vector sum method”[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, **43**(5): 975-980. (in Chinese))
- [21] 孙建生. 关于“稳定安全系数计算公式中荷载与抗力错位影响探讨”的质疑[J]. 岩土工程学报, 2021, **43**(11): 2146. (SUN Jiansheng. Query about “Discussion of dislocation phenomena of resistance and load in formula for stability safety factor”[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, **43**(11): 2146. (in Chinese))

### 第三十一届全国土工测试学术研讨会（第 1 号通知） （中国·新疆·乌鲁木齐 2025 年 7 月 25 日）

为了推动“一带一路”战略实施,促进新疆地区的岩土工程技术发展,加强国内外专家学者的交流与合作,第三十一届全国土工测试学术研讨会将于 2025 年 7 月 25 日—7 月 27 日在乌鲁木齐举行,本次会议主题为“携手共建“一带一路”,促进新疆岩土发展”。会议将汇聚国内外著名专家,进行特邀报告和主题演讲,并展示最新的土工测试设备和技术。我们诚挚邀请国内外的专家、学者和工程技术人员参与此次会议,共同探讨解决新疆及“一带一路”沿线岩土工程难题的创新技术和解决方案。

**主办单位:** 中国土木工程学会土力学及岩土工程分会; 中国水利学会岩土力学专业委员会。

**会议主题:** 冻土地质条件勘察和基本性质测试技术; 盐渍土原位测试和基本性质测试技术; 风积沙基本性质测试技术; 冻融环境下土工物理模型试验技术; 盐胀环境下土工物理模型试验技术; 地震活动区土工原位测试技术; 膨胀土性质测试技术; 粗粒土性质测试技术; 混合土性质测试技术; 土工测试新

型技术设备。

**论文征集:** 欢迎就本届研讨会交流内容提交论文,论文将通过组委会审查、专家遴选推荐到《岩土工程学报》(增刊)(EI 收录)、《新疆大学学报(自然科学版)》、《水力发电》等期刊发表。论文篇幅一般在 5 页以内,格式请参考《岩土工程学报》。此外部分论文会被推荐到《应用基础与工程科学学报》(EI 收录)、《长江科学院院报》、《人民长江》和《水利水电快报》进行发表,其中《应用基础与工程科学学报》、《长江科学院院报》和《人民长江》会以专栏形式发表,《水利水电快报》会以专辑形式发表。论文征集邮箱: geotest2025@126.com。2024 年 11 月 30 日前提交论文全文,2024 年 12 月 31 日前返回论文录用通知,2025 年 2 月 31 日前返回修改后论文。

**联系方式:** 地址: 新疆维吾尔自治区乌鲁木齐市水磨沟区华瑞街 777 号新疆大学(博达校区)建筑工程学院; 邮编: 830047; 联系人: 刘欢 15241828240, 秦溯 15160925936, 王存根 15299051092。

(会议组委会 供稿)