

DOI: 10.11779/CJGE20230861

考虑孔口周边均匀切应力作用的柱形孔扩张 二维弹塑性分析

于旭光

(唐山工业职业技术大学, 河北 唐山 063299)

摘要: 为了求解两向不等压应力场和孔口剪切应力共同作用下的柱形孔扩张弹塑性统一解, 首先将应力函数展开为三角级数形式, 推导了弹性区应力和位移; 接着采用统一强度理论和相关联流动法则, 推导了塑性区应力和位移; 最后通过保角映射函数确定了弹塑性交界线, 进而根据弹塑性交界线处的应力连续条件, 采用最小二乘法确定了弹性区应力和位移中的常系数。新提出的弹塑性统一解提供了一种求解柱形孔扩张问题的新框架, 不仅扩展了 Tresca 屈服准则下的解, 还可以反映柱形孔扩张时的“非圆效应”。通过与复变函数法、试验值对比验证了解的正确性, 并且分析了各个参数对弹塑性交界线、应力和位移的影响。

关键词: 两向不等压应力场; 均匀剪切应力; 统一强度理论; 相关联流动法则; 最小二乘法

中图分类号: TU452 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2025)04-0715-10

作者简介: 于旭光 (1984—), 男, 河北保定人, 硕士, 副教授, 主要从事强度理论、非饱和土与地下工程等研究工作。E-mail: yuxuguang001@126.com。

Two-dimensional elastic-plastic analysis of cylindrical cavity expansion considering uniform shear stress around holes

YU Xuguang

(Tangshan Polytechnic University, Tangshan 063299, China)

Abstract: In order to solve the elastic-plastic unified solution of cylindrical cavity expansion under the combined action of two-dimensional unequal pressure stress field and shear stress, the stress function is expanded into trigonometric series, and the stress and displacement in elastic zone are derived. Then, the stress and displacement in plastic zone are derived by using the unified strength theory and associated flow rule. Finally, the elastic-plastic boundary is determined by the conformal mapping function, and then the constant coefficients of stress and displacement in elastic zone are determined by the least squares method according to the stress continuity condition at the elastic-plastic boundary. The new elastic-plastic unified solution provides a new framework for solving the problem of cylindrical cavity expansion, which extends the solution under the Tresca yield criterion and reflects the “non-circular effect” of cylindrical cavity expansion. The correctness of the solution is verified by comparing with the complex function method and experimental values, and the influences of various parameters on the elastic-plastic boundary, stress and displacement is analyzed.

Key words: two-dimensional unequal pressure stress field; uniform shear stress; unified strength theory; associated flow rule; least square method

0 引言

小孔扩张理论在岩土工程的各个领域得到了广泛的应用, 比如顶管安装、圆锥贯入试验、水平定向钻井过程中的最大泥浆压力分析、隧道稳定性分析等。在实际工程中, 真实应力场主要是以水平地应力和竖向地应力存在差异的两向不等压应力场为主^[1], 并且在旋转钻孔/开挖、螺旋桩和旋转圆锥贯入试验等^[2-3]过程中, 孔口周边会产生较大的剪切应力。因此开展

对同时考虑两向不等压应力场和孔口剪切应力下的小孔扩张理论进行研究具有重要的实际意义。

为此众多研究人员开展了相关研究。Galin^[4]基于 Tresca 屈服准则和理想弹塑性模型, 采用复变函数法对两向不等压应力场和孔口无剪切应力共同作用下的柱形孔口进行了弹塑性分析; Zhou 等^[3, 5-6]基于 Tresca

屈服准则和理想弹塑性模型，分别对两向等压应力场和孔口剪切应力共同作用下的柱形孔口以及两向不等压应力场和孔口无剪切应力共同作用下的柱形孔口进行了弹塑性分析；Zhuang 等^[7-8]基于 Tresca 屈服准则和理想弹塑性模型对两向不等压应力场和孔口剪切应力，以及基于 Mohr-Coulomb 强度准则和理想弹塑性模型对两向不等压应力场和孔口无剪切应力共同作用下，均采用复变函数法对柱形孔口进行了弹塑性分析；Wang 等^[9]基于 Mohr-Coulomb 强度准则和理想弹塑性模型，采用一种半解析方法对两向不等压应力场和孔口无剪切应力共同作用下的柱形孔口进行了弹塑性分析；武孝天等^[10]基于三维统一硬化（UH）本构模型对两向等压应力场和孔口无剪切应力共同作用下的柱/球形孔口进行了弹塑性分析；于旭光等^[11]基于统一强度理论和弹脆塑性模型对两向不等压应力场和孔口无剪切应力共同作用下的柱形孔口进行了弹塑性分析。

大量真三轴试验^[12]、广义强度理论与试验对比^[13]均表明：岩土类材料与中间主应力 σ_2 紧密相关，而从上述文献[3~11]研究中可以看出两点不足之处：①只有文献[10, 11]采用了考虑中间主应力 σ_2 对柱形孔口进行了弹塑性分析，其他均未考虑中间主应力效应；②未见综合考虑两向不等压应力场和孔口剪切应力共同作用情况下，推导出采用统一强度理论得到的统一解。

综上所述，本文首先提出一种理论计算框架，将弹性区的应力函数采用三角级数表示，进而推导出弹性区应力和位移，塑性区采用统一强度理论和相关联流动法则推导出塑性区应力和位移，而弹塑性边界线采用一种新的保角映射函数来进行确定；接着与基于 Tresca 屈服准则、Mohr-Coulomb 强度准则并采用复变函数法得到的已有解答、试验值进行了对比验证；最后探讨了理论计算框架、柱形孔口周边均匀切应力以及侧压力系数对弹塑性交界线、应力和位移的影响。

1 基本假定与基本方程

1.1 基本假定

在两向不等压应力场下，为了提供一种柱形孔口周边存在均匀切应力作用下的柱形孔扩张问题解析解，作如下 3 条假设：

- (1) 柱形孔口周边的土体塑性区完全包围孔口。
- (2) 柱形孔扩张过程中柱形孔口的扩孔压力是均匀的，且孔口周边切应力为常量。
- (3) 土体为各向均匀、连续且满足统一强度理论的理想弹塑性材料，在柱形孔土体扩张过程中外应力始终作为中间主应力，且中间主应力表达式 $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ 。

以拉应力为正，采用黏聚力 c 、内摩擦角 φ 表达

的统一强度理论为^[14]

$$\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sin \varphi}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \text{ 时,}$$

$$\sigma_1 - \frac{1 - \sin \varphi}{(1+b)(1+\sin \varphi)}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}。 \quad (1)$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{\sin \varphi}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \text{ 时,}$$

$$\frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}\sigma_3 = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}。 \quad (2)$$

在平面应变状态下，将 $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ 代入式(1)，可得塑性区应力满足的统一强度理论表达式为

$$\sigma_1 = A\sigma_3 + B。 \quad (3)$$

$$\text{式中: } A = \frac{(2+b)(1-\sin \varphi)}{2+b+(2+3b)\sin \varphi}; \quad B = \frac{4(1+b)c \cos \varphi}{2+b+(2+3b)\sin \varphi}。$$

b 为统一强度理论参数，用来代表中间主应力 σ_2 对土体材料强度的影响程度，其取值范围为 $0 \leq b \leq 1$ 。不同的 b 值可对应不同的强度准则，比如：当 $b=0$ 时可对应为 Mohr-Coulomb 强度准则（作为特例当 $\varphi=0^\circ$ ，此时 $A=1$ 、 $B=2c$ ，此时式(3)可对应为 Tresca 屈服准则）；当 $b=1$ 时可对应为双剪应力强度准则；当 $0 < b < 1$ 时可对应为一系列新的强度准则。参数 b 的确定可参考文献[15]。

在平面应变状态下，最大主应力、最小主应力与极坐标应力之间的关系式为

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}， \quad (4)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}。 \quad (5)$$

将式(4)、(5)代入式(3)，可得

$$Q = (1+A)\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} - (\sigma_r + \sigma_\theta)(A-1) - 2B = 0。 \quad (6)$$

式中： σ_r ， σ_θ ， $\tau_{r\theta}$ 分别为径向正应力、切向正应力和切应力，求解时规定正应力以受拉为正，切应力以顺时针为正。

在上述假设情况下，柱形孔扩张力学模型如图 1 所示。

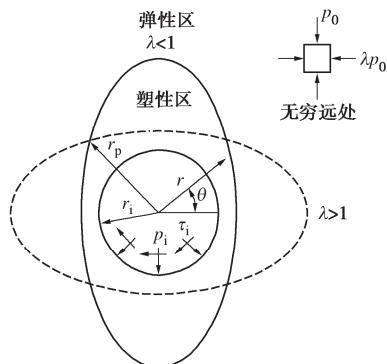


图 1 柱形孔扩张力学模型

Fig. 1 Mechanical model for cylindrical cavity expansion

图1中 p_0 为竖向地应力, λ 为侧压力系数, r_i 为柱形孔口半径, p_i 为扩孔压力, τ_i 为洞壁处切应力, r_p 为柱形孔口塑性区半径, θ 为极角, 以逆时针旋转方向为正。

1.2 基本方程

极坐标中的平衡微分方程为^[16]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 , \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 . \quad (8)$$

极坐标中的几何方程为

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} , \quad (9)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} , \quad (10)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} . \quad (11)$$

将图1中无穷远处的初始竖向和水平地应力转换为无穷远处的初始径向正应力 σ_{r0} 、初始切向正应力 $\sigma_{\theta0}$ 和初始切应力 $\tau_{r\theta0}$,

$$\sigma_{r0} = -\frac{1+\lambda}{2} p_0 + \frac{1-\lambda}{2} p_0 \cos 2\theta , \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta0} = -\frac{1+\lambda}{2} p_0 - \frac{1-\lambda}{2} p_0 \cos 2\theta , \quad (13)$$

$$\tau_{r\theta0} = -\frac{1-\lambda}{2} p_0 \sin 2\theta . \quad (14)$$

因此在平面应变状态下, 扣除初始地应力下的本构方程为

$$\varepsilon_r = \frac{1-\nu^2}{E} \left[(\sigma_r - \sigma_{r0}) - \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_\theta - \sigma_{\theta0}) \right] , \quad (15)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1-\nu^2}{E} \left[(\sigma_\theta - \sigma_{\theta0}) - \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_r - \sigma_{r0}) \right] , \quad (16)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} (\tau_{r\theta} - \tau_{r\theta0}) . \quad (17)$$

式中: E , ν 分别为围岩弹性模量和泊松比。

2 弹塑性解答

2.1 弹性区应力和位移解答

(1) 弹性区应力解答

在极坐标系中, 弹性区采用应力函数 Φ 表示的双调和方程为^[16]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \Phi = 0 . \quad (18)$$

文献[17]将应力函数 Φ 展开成三角级数的形式, 并求解得到应力函数 Φ 的表达式为

$$\Phi = C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r + F_0 r^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[(L_k r^k + M_k r^{-k} + N_k r^{k+2} + P_k r^{-k+2}) \cos k\theta \right] . \quad (19)$$

式中: C_0 , D_0 , F_0 , L_k , M_k , N_k , P_k 为待定系数, 可根据应力边界条件进行确定, $k=1, 2, \dots$ 。

径向正应力 σ_r 、切向正应力 σ_θ 、切应力 $\tau_{r\theta}$ 和应力函数 Φ 的关系表达式为

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} , \quad (20)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} , \quad (21)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} . \quad (22)$$

将式(19)分别代入式(20)~(22)可得围岩弹性区的径向正应力、切向正应力和切应力为

$$\begin{aligned} \sigma_r^e &= \frac{C_0}{r^2} + D_0 (2 \ln r + 1) + 2F_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left[L_k \frac{k^2 - k}{r^2} r^k + M_k \frac{k^2 + k}{r^{k+2}} + N_k (k^2 - k - 2) r^k + P_k \frac{k^2 + k - 2}{r^k} \right] \cos k\theta , \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^e &= -\frac{C_0}{r^2} + D_0 (2 \ln r + 3) + 2F_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[L_k \frac{k^2 - k}{r^2} r^k + M_k \frac{k^2 + k}{r^{k+2}} + N_k (k^2 + 3k + 2) r^k + P_k \frac{k^2 - 3k + 2}{r^k} \right] \cos k\theta , \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^e &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left[L_k \frac{k-1}{r^2} r^k - M_k \frac{k+1}{r^{k+2}} + N_k (k+1) r^k - P_k \frac{k-1}{r^k} \right] \sin k\theta . \end{aligned} \quad (25)$$

式中: 上角标加e代表围岩弹性区, 下同。

一方面在无穷远处, 应力不能是无限大, 因此根据式(23)~(25)可得

$$D_0 = 0 , \quad N_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots) , \quad (26)$$

$$L_k = 0 \quad (k=3, 4, \dots) . \quad (27)$$

另一方面在无穷远处, 径向正应力、切向正应力、切应力应分别和式(12)~(14)相等, 即

$$\sigma_r^e \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 2F_0 - 2L_2 \cos 2\theta = \sigma_{r0} , \quad (28)$$

$$\sigma_\theta^e \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 2F_0 + 2L_2 \cos 2\theta = \sigma_{\theta0} , \quad (29)$$

$$\tau_{r\theta}^e \Big|_{r \rightarrow +\infty} = 2L_2 \sin 2\theta = \tau_{r\theta0} . \quad (30)$$

通过式(28)~(30)可得

$$F_0 = -\frac{1+\lambda}{4} p_0 , \quad L_2 = -\frac{1-\lambda}{4} p_0 . \quad (31)$$

由于在式(23)~(25)中包含 L_1 和 P_1 的项恒为

0, 因此 L_1 和 P_1 不用求解, 其他的 $2k$ 个待定系数 C_0 , M_k , P_k (注意此处 P_k 从 P_2 开始) 需要在弹塑性交界线 $r=r_p$ 处, 根据式 (23) ~ (25) 通过最小二乘法进行求解, 即

$$\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{U}_1 = \mathbf{R}_\theta \mathbf{U} \quad . \quad (32)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{r1}, \sigma_{\theta1}, \tau_{r\theta1}, \dots, \sigma_{rk_1}, \sigma_{\theta k_1}, \tau_{r\theta k_1})_{3k_1 \times 1}^T$, 其值可根据弹塑性交界线处应力值连续, 进而采用塑性区应力值来确定; $\mathbf{U}_1 = ((2F_0 - 2L_2 \cos 2\theta)_1, (2F_0 + 2L_2 \cos 2\theta)_1, (2L_2 \sin 2\theta)_1, \dots, (2F_0 - 2L_2 \cos 2\theta)_{k_1}, (2F_0 + 2L_2 \cos 2\theta)_{k_1}, (2L_2 \sin 2\theta)_{k_1})_{3k_1 \times 1}^T$; $\mathbf{U} = (C_0, M_1, \dots, M_k, P_2, \dots, P_k)_{2k \times 1}^T$; \mathbf{R}_θ 为系数矩阵, 可通过式 (23) ~ (25) 得出, 在极角 θ 为 $0^\circ : 360^\circ$, 将弹塑性交界线等分成 k_1 个点 ($k_1 = 1, 2, \dots$, 且需满足 $3k_1 > 2k$, 此时方程数大于待定系数个数), 则 \mathbf{R}_θ 为 $3k_1 \times 2k$ 的系数矩阵, 限于篇幅, 不再列出。

根据式 (32), 可得

$$\mathbf{U} = (\mathbf{R}_\theta^T \mathbf{R}_\theta)^{-1} \mathbf{R}_\theta^T (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{U}_1) \quad . \quad (33)$$

(2) 弹性区位移解答

联立式 (9) ~ (11)、(15) ~ (17)、(23) ~ (25), 可得围岩弹性区的径向位移和切向位移为

$$u_r^e = \frac{1+\nu}{E} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{M_k k}{r^{k+1}} \cos k\theta + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P_k (k+2-4\nu)}{r^{k-1}} \cos k\theta \right], \quad (34)$$

$$u_\theta^e = \frac{1+\nu}{E} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{M_k k}{r^{k+1}} \sin k\theta + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P_k (k-4+4\nu)}{r^{k-1}} \sin k\theta \right]. \quad (35)$$

2.2 塑性区应力和位移解答

(1) 塑性区应力解答

当围岩塑性区完全包围孔口时, 由于孔口处的应力边界和几何形状属于轴对称情况, 因此可假定围岩塑性区应力与极角 θ 无关, 即

$$\frac{\partial \sigma_r^p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta^p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}^p}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (36)$$

式中: 上角标加 p 代表围岩塑性区, 下同。

根据式 (8), 可得围岩塑性区切应力为

$$\tau_{r\theta}^p = \tau_i \frac{r_i^2}{r^2} \quad . \quad (37)$$

由于 $(\sigma_\theta - \sigma_r)$ 与 $2\tau_{r\theta}$ 的大小不能确定, 因此利用公式 $\sqrt{m^2 + n^2} \approx 1.0m + 0.38n$ ^[18] (当 $5n \geq m > n$, $n > 0$ 时, 相对误差 $< 7\%$; 当 $m > 5n$, $n > 0$ 时, 相对误差 $< 5\%$) 来近似简化式 (6) 时, 可分成 3 种情况。简化后的式 (6) 具体表达式为

$$Q = \sigma_\theta + J_1 \sigma_r + J_2 \tau_{r\theta} + J_3 = 0 \quad . \quad (38)$$

式中: 当 $\tau_{r\theta} > 0$ (当 $\tau_{r\theta} < 0$ 时, 前面加 “-” 号即可) 时, J_1 , J_2 , J_3 表达式分别为

$$J_1 = \begin{cases} -A & (\sigma_\theta - \sigma_r) > 2\tau_{r\theta} \\ -\frac{(\sqrt{2}+1)A + \sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)A + \sqrt{2}+1} & (\sigma_\theta - \sigma_r) = 2\tau_{r\theta} \\ \frac{0.31-0.69A}{0.69-0.31A} & (\sigma_\theta - \sigma_r) < 2\tau_{r\theta} \end{cases},$$

$$J_2 = \begin{cases} 0.38(A+1) & (\sigma_\theta - \sigma_r) > 2\tau_{r\theta} \\ 0 & (\sigma_\theta - \sigma_r) = 2\tau_{r\theta} \\ \frac{A+1}{0.69-0.31A} & (\sigma_\theta - \sigma_r) < 2\tau_{r\theta} \end{cases},$$

$$J_3 = \begin{cases} -B & (\sigma_\theta - \sigma_r) > 2\tau_{r\theta} \\ -\frac{2B}{(\sqrt{2}-1)A + \sqrt{2}+1} & (\sigma_\theta - \sigma_r) = 2\tau_{r\theta} \\ -\frac{B}{0.69-0.31A} & (\sigma_\theta - \sigma_r) < 2\tau_{r\theta} \end{cases}.$$

当 $\tau_{r\theta} = 0$ 时, 式 (38) 将退化为 $Q = \sigma_\theta + J_1 \sigma_r + J_3 = 0$, 此时 $J_1 = -A$, $J_3 = -B$ 。

联立式 (7), (37), (38), 并以 $\sigma_r|_{r=r_i} = -p_i$ 为边界条件, 可得围岩塑性区径向正应力和切向正应力为当 $J_1 = -1$ (此时对应 $A = 1$) 时,

$$\sigma_r^p = -p_i - J_3 \ln \frac{r}{r_i} - \frac{J_2 \tau_i}{2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \quad , \quad (39)$$

$$\sigma_\theta^p = -p_i - J_3 \left(\ln \frac{r}{r_i} + 1 \right) - \frac{J_2 \tau_i}{2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right). \quad (40)$$

当 $J_1 \neq -1$ (此时对应 $A \neq 1$) 时,

$$\sigma_r^p = \left(-p_i + \frac{J_3}{J_1 + 1} + \frac{J_2 \tau_i}{J_1 - 1} \right) \left(\frac{r}{r_i} \right)^{-(J_1+1)} - \frac{J_2 \tau_i}{J_1 - 1} \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{J_3}{J_1 + 1}, \quad (41)$$

$$\sigma_\theta^p = -J_1 \left(-p_i + \frac{J_3}{J_1 + 1} + \frac{J_2 \tau_i}{J_1 - 1} \right) \left(\frac{r}{r_i} \right)^{-(J_1+1)} + \frac{J_2 \tau_i}{J_1 - 1} \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{J_3}{J_1 + 1}. \quad (42)$$

因此, 式 (39), (40), (37) 或式 (41), (42), (37) 即为围岩塑性区的径向正应力、切向正应力和切应力。

(2) 塑性区位移解答

在围岩塑性区, 根据相关联流动法则可得

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dQ}{d\sigma_{ij}} \quad . \quad (43)$$

式中: ε_{ij}^p 为塑性应变。

将式 (38) 代入式 (43) 可得

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_{\theta}^p &= d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{\theta}} = d\lambda, \\ d\epsilon_r^p &= d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_r} = J_1 d\lambda, \\ d\epsilon_{r\theta}^p &= d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \tau_{r\theta}} = J_2 d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

由式(44)可得

$$d\epsilon_{\theta}^p = \frac{1}{J_1} d\epsilon_r^p, \quad d\epsilon_{r\theta}^p = \frac{J_2}{J_1} d\epsilon_r^p. \quad (45)$$

对式(45)两式的两端进行积分，并根据弹塑性交界线处的塑性应变为0，可得

$$\epsilon_{\theta}^p = \frac{1}{J_1} \epsilon_r^p, \quad \epsilon_{r\theta}^p = \frac{J_2}{J_1} \epsilon_r^p. \quad (46)$$

根据式(46)，可得塑性区的应变表达式为

$$\epsilon_{\theta} - \frac{1}{J_1} \epsilon_r = \epsilon_{\theta}^e + \epsilon_{\theta}^p - \frac{1}{J_1} (\epsilon_r^e + \epsilon_r^p) = \epsilon_{\theta}^e - \frac{1}{J_1} \epsilon_r^e, \quad (47)$$

$$\epsilon_{r\theta} - \frac{J_2}{J_1} \epsilon_r = \epsilon_{r\theta}^e + \epsilon_{r\theta}^p - \frac{J_2}{J_1} (\epsilon_r^e + \epsilon_r^p) = \epsilon_{r\theta}^e - \frac{J_2}{J_1} \epsilon_r^e. \quad (48)$$

将式(9)~(11)分别代入式(47)、(48)，同时考虑 $\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \gamma_{r\theta}$ ，可得

$$\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{J_1} \frac{\partial u_r}{\partial r} = \epsilon_{\theta}^e - \frac{1}{J_1} \epsilon_r^e, \quad (49)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) - \frac{J_2}{J_1} \frac{\partial u_r}{\partial r} = \epsilon_{r\theta}^e - \frac{J_2}{J_1} \epsilon_r^e. \quad (50)$$

通过求解式(49)、(50)，可得到围岩塑性区径向位移和切向位移。

a) 情况1

当 $J_2 \neq 0$ （此时代表考虑孔口周边均匀切应力）时，围岩塑性区径向位移：

当 $J_1 = -1$ （此时对应 $A=1$ ）时，

$$u_r^p = J_4 r + J_5 r^{-1} - J_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} r \ln r; \quad (51)$$

当 $J_1 \neq -1$ （此时对应 $A \neq 1$ ）时，

$$\begin{aligned} u_r^p &= J_6 r + J_7 r^{J_1} + \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(J_1 + \frac{1}{J_1} \right) + \left(2 - J_1 - \frac{1}{J_1} \right) \nu \right] \right. \\ &\quad \left. \left(-p_i + \frac{J_3}{J_1+1} + \frac{J_2 \tau_i}{J_1-1} \right) \left(\frac{1}{r_i} \right)^{-(J_1+1)} r^{-J_1} + \frac{J_2 \tau_i}{J_1-1} \frac{r_i^2}{r} \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

围岩塑性区切向位移：

当 $J_1 = -1$ （此时对应 $A=1$ ）时，

$$u_{\theta}^p = \left\{ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \cdot [-2p_i + 2J_3 \ln r_i - J_2 \tau_i + (1+\lambda)p_0] - 2J_4 \right\} r \theta + h_1(r); \quad (53)$$

当 $J_1 \neq -1$ （此时对应 $A \neq 1$ ）时，

$$\begin{aligned} u_{\theta}^p &= \left[\frac{1+\nu}{E} \cdot \left(-1 + \frac{1}{J_1} - \frac{2}{J_1} \nu + 2\nu \right) \left(\frac{J_3}{J_1+1} - \frac{1+\lambda}{2} p_0 \right) + \left(\frac{1}{J_1} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. J_6 \right] r \theta + \left[\frac{1+\nu}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{J_1} \right) \cdot \frac{1-\lambda}{4} p_0 \sin 2\theta \right] \cdot r + h_2(r). \end{aligned} \quad (54)$$

式中： J_4, J_5, J_6, J_7 为积分常数； $h_1(r), h_2(r)$ 为只与 r 相关的函数。

b) 情况2

当 $J_2 = 0$ （此时代表不考虑孔口周边均匀切应力）时，围岩塑性区径向位移分别如下：

当 $J_1 = -1$ （此时对应 $A=1$ ）时，

$$\begin{aligned} u_r^p &= J_{10} r + J_{11} r^{-1} - J_3 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} r \ln r + \\ &\quad \sum_{w=1}^{+\infty} [V_{w,1} \cos(H_{w,1} \ln r) + V_{w,2} \sin(H_{w,1} \ln r)] \cos 2w\theta; \end{aligned} \quad (55)$$

当 $J_1 \neq -1$ （此时对应 $A \neq 1$ ）时，

$$\begin{aligned} u_r^p &= J_{12} r + J_{13} r^{J_1} + \frac{1+\nu}{E} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(J_1 + \frac{1}{J_1} \right) + \left(2 - J_1 - \frac{1}{J_1} \right) \nu \right] \right. \\ &\quad \left. \left(-p_i + \frac{J_3}{J_1+1} \right) \left(\frac{1}{r_i} \right)^{-(J_1+1)} r^{-J_1} \right\} + \sum_{w=1}^{+\infty} r^{\frac{J_1+1}{2}} \cdot \\ &\quad [V_{w,3} \cos(H_{w,2} \ln r) + V_{w,4} \sin(H_{w,2} \ln r)] \cos 2w\theta. \end{aligned} \quad (56)$$

围岩塑性区切向位移分别如下：

当 $J_1 = -1$ （此时对应 $A=1$ ）时，

$$\begin{aligned} u_{\theta}^p &= \left\{ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \cdot [-2p_i + 2J_3 \ln r_i + (1+\lambda)p_0] - 2J_{10} \right\} r \theta + \\ &\quad \sum_{w=1}^{+\infty} \frac{1}{2w} \left\{ V_{w,1} [\sin(H_{w,1} \ln r) - \cos(H_{w,1} \ln r)] - V_{w,2} \cdot \right. \\ &\quad \left. [\sin(H_{w,1} \ln r) + H_{w,1} \cos(H_{w,1} \ln r)] \right\} \sin 2w\theta + h_3(r); \end{aligned} \quad (57)$$

当 $J_1 \neq -1$ （此时对应 $A \neq 1$ ）时，

$$\begin{aligned} u_{\theta}^p &= \left[\frac{1+\nu}{E} \cdot \left(-1 + \frac{1}{J_1} - \frac{2}{J_1} \nu + 2\nu \right) \left(\frac{J_3}{J_1+1} - \frac{1+\lambda}{2} p_0 \right) + \left(\frac{1}{J_1} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. J_{12} \right] r \theta + \left[\frac{1+\nu}{E} \cdot \left(1 + \frac{1}{J_1} \right) \cdot \frac{1-\lambda}{4} p_0 \sin 2\theta \right] \cdot r + \sum_{w=1}^{+\infty} \frac{r^{\frac{J_1+1}{2}}}{4wJ_1} \left\{ V_{w,3} \cdot \right. \\ &\quad \left. [(1-J_1) \cos(H_{w,2} \ln r) - 2H_{w,2} \sin(H_{w,2} \ln r)] + V_{w,4} [(1-J_1) \cdot \right. \\ &\quad \left. \sin(H_{w,2} \ln r) + 2H_{w,2} \cos(H_{w,2} \ln r)] \right\} \sin 2w\theta + h_4(r). \end{aligned} \quad (58)$$

式中： $H_{w,1}, H_{w,2}$ 为关于 w 的表达式； $J_{10}, J_{11}, J_{12}, J_{13}$ 为积分常数； $h_3(r), h_4(r)$ 为只与 r 相关的函数； $V_{w,1}, V_{w,2}, V_{w,3}, V_{w,4}$ 为待定系数。

2.3 塑性区半径解答

从2.1、2.2节可以看出，求解问题的关键在于塑性区半径 r_p 。在两向不等应力场下，从文献[8]可知弹塑性交界线不是一个圆形，可取保角映射函数将 z 平面上的弹塑性交界线转换为 ζ 平面上的单位圆，进

而圆内和圆外的区域分别表示塑性区和弹性区。如图 2 所示。

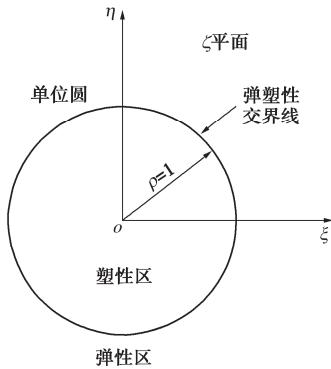


图 2 ζ 平面上的弹塑性交界线

Fig. 2 Elastic-plastic boundary in ζ plane

根据文献[8], 取保角映射函数为

$$z = \omega(\zeta) = \alpha\zeta \left(1 + \frac{\beta}{\zeta^2}\right)^{\chi} \quad (59)$$

式中: α, β, χ 为控制弹塑性交界线的常数; $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\phi}$ 为 ζ 平面上的复变函数, ρ 为极径, ϕ 为极角, $i = \sqrt{-1}$ 。

根据弹性力学中的复变函数解法, 弹性区的应力可以采用两个解析函数 $\varphi_e(\zeta)$ 和 $\psi_e(\zeta)$ 表示为^[16]

$$\varphi_e(\zeta) + \overline{\varphi_e(\zeta)} = \frac{\sigma_r^e + \sigma_\theta^e}{2}, \quad (60)$$

$$\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \varphi'_e(\zeta) + \psi_e(\zeta) = \frac{\sigma_\theta^e - \sigma_r^e + 2i\tau_{r\theta}^e}{2} e^{-2i\theta}. \quad (61)$$

在弹塑性交界线处, 存在

$$\frac{\sigma_r^e + \sigma_\theta^e}{2} = \frac{\sigma_r^p + \sigma_\theta^p}{2}, \quad (62)$$

$$\frac{\sigma_\theta^e - \sigma_r^e + 2i\tau_{r\theta}^e}{2} = \frac{\sigma_\theta^p - \sigma_r^p + 2i\tau_{r\theta}^p}{2}. \quad (63)$$

在弹性区无穷远处, 根据式 (12) ~ (14) 可得

$$\frac{\sigma_r^e + \sigma_\theta^e}{2} = -\frac{1+\lambda}{2} p_0, \quad (64)$$

$$\frac{\sigma_\theta^e - \sigma_r^e + 2i\tau_{r\theta}^e}{2} e^{-2i\theta} \Big|_{r \rightarrow +\infty} = -\frac{1-\lambda}{2} p_0. \quad (65)$$

通过对 $A=1$ 和 $A \neq 1$ 这 2 种情况分别来计算式 (59) 中的 α, β, χ 。

a) 情况 1

当 $J_1 = -1$ (此时对应 $A=1$) 时,

$$\begin{aligned} \chi &= 1, \quad \beta = \frac{(1-\lambda)p_0}{J_3}, \\ \alpha &= r_i \exp \left[-\frac{1}{J_3} \left(-\frac{1+\lambda}{2} p_0 + \frac{J_2 \tau_i}{2} + p_i + \frac{J_3}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

当 $\tau_i = 0$ 且满足 $b=0$ 和 $\phi=0^\circ$ 时, 式 (66) 中 α, β, χ 取值与文献[5]中采用 Tresca 屈服准则相同。

b) 情况 2

当 $J_1 \neq -1$ (此时对应 $A \neq 1$) 时, 采用情况 1 求解常数 β 和 χ 的方法, 可得 χ 值、 α 与 β 关系式分别为

$$\chi = \frac{2}{1-J_1}, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{J_1+1}{2} \left(-p_i + \frac{J_3}{J_1+1} + \frac{J_2 \tau_i}{J_1-1} \right) \left(\frac{1}{r_i} \right)^{-(J_1+1)} \alpha^{-(J_1+1)} \beta \\ & = -\frac{1-\lambda}{2} p_0, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\lambda}{2} p_0 - \frac{J_3}{J_1+1} + \frac{1-J_1}{2} \left(-p_i + \frac{J_3}{J_1+1} + \frac{J_2 \tau_i}{J_1-1} \right) \\ & \left(\frac{1}{r_i} \right)^{-(J_1+1)} R_0 = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

式中: R_0 为与超几何函数相关的常数。

当 $\tau_i = 0, b = 0$ 时且附录中的式 (110) 中的超几何函数只取第一项时 (即取值为 1), 则式 (67) ~ (69) 中 α, β, χ 取值与文献[8]中采用 Mohr-Coulomb 强度准则相同。当超几何函数不仅仅取第一项 (即取值不为 1) 时, α, β 值可通过式 (68)、(69) 并采用 MATLAB 编程进行求解。

将 $\zeta_p = e^{i\phi}$ 代入式 (59), 可得

$$z = re^{i\theta} = \alpha e^{i\phi} (1 + \beta e^{-i2\phi})^\chi = \alpha \rho^\chi e^{i(\phi+\chi\varepsilon)}. \quad (70)$$

式中: $\rho = \sqrt{1 + 2\beta \cos 2\phi + \beta^2};$

$$\cos \varepsilon = \frac{1 + \beta \cos 2\phi}{\sqrt{1 + 2\beta \cos 2\phi + \beta^2}}.$$

从式 (70) 可以看出, z 平面上的弹塑性交界线处的塑性区半径为 $\alpha \rho^\chi$, z 平面上的极角 θ 与 ζ 平面上的极角 ϕ 的关系为 $\theta = \phi + \chi\varepsilon$ 。

2.4 求解流程

本文求解流程如图 3 所示。

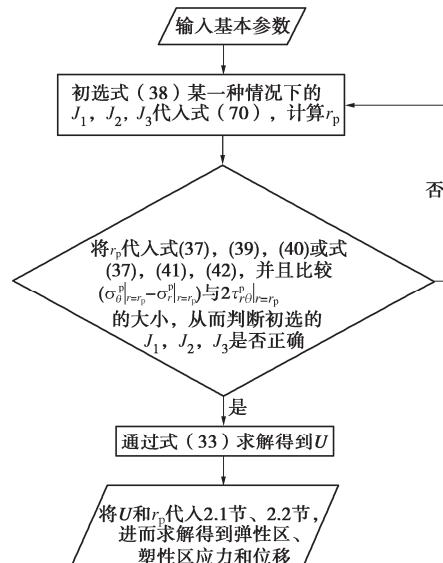


图 3 求解流程图

Fig. 3 Flow chart for solutions

特别指出：本文计算的塑性区半径 r_p 在任意极角 θ 处均需满足 $r_p \geq r_i$ ，以保证柱形孔口周边的土体塑性区完全包围孔口。

3 对比验证

为验证本文解的正确性，将本文解与文献[7, 8]（复变函数法）、试验值^[19]进行对比分析。

3.1 本文解与复变函数解对比验证

当采用 Tresca 屈服准则时，取文献[7]中的参数：
 $r_i = 1$, $p_0 = c$, $\lambda p_0 = 0.5c$, $p_i = 5c$, $\tau_i = 0$ 和 c , $\varphi = 0^\circ$ ；当采用 Mohr-Coulomb 强度准则时，取 $\tau_i = 0$, $\varphi = 15^\circ$ ，其他参数同 Tresca 屈服准则。另外，考虑到计算精度要求，取式(33)中 $k = 7$ （即取前7项）， $k_1 = 24$ 。两种准则下的弹塑性交界线和极角 $\theta = 0^\circ$ 时的应力对比结果如图4, 5所示，考虑到对称性，图4, 5中弹塑性交界线仅取极角 θ 在 $0^\circ : 90^\circ$ 区域的图形。

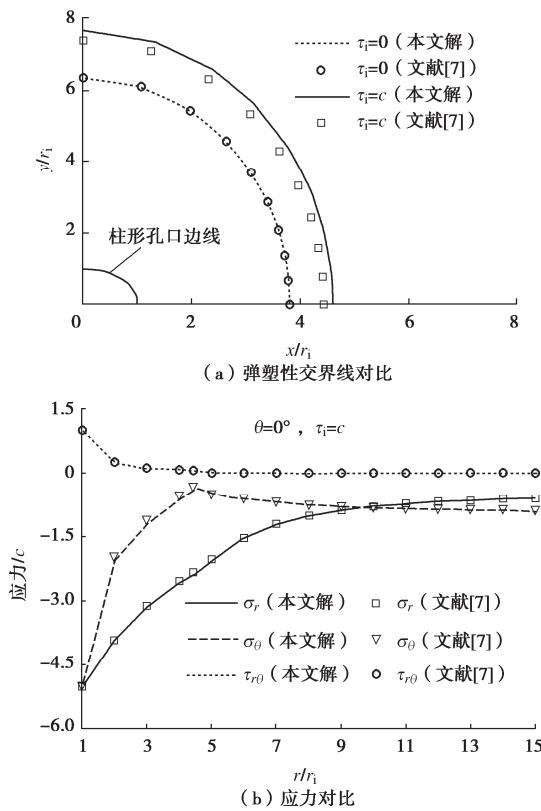


图4 Tresca 屈服准则

Fig. 4 Tresca yield criterion

从图4, 5中可以看出：当采用 Tresca 屈服准则时，本文解在 $\tau_i = c$ 时比文献[7]（复变函数法）求得的弹塑性交界线增大了3.7%，而应力值是非常吻合的，而在 $\tau_i = 0$ 时求得的弹塑性交界线是相同的；当采用 Mohr-Coulomb 强度准则时，本文解和文献[8]（复变函数法）求得的弹塑性交界线以及应力值均是相同的，并且在4.3节中，当采用 $\lambda = 1$ 进行位移分析时，位移值计算精度也非常高。

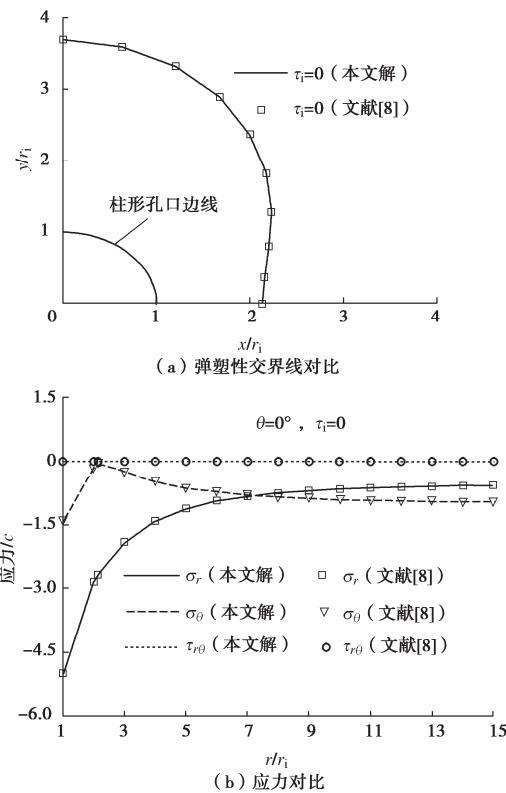


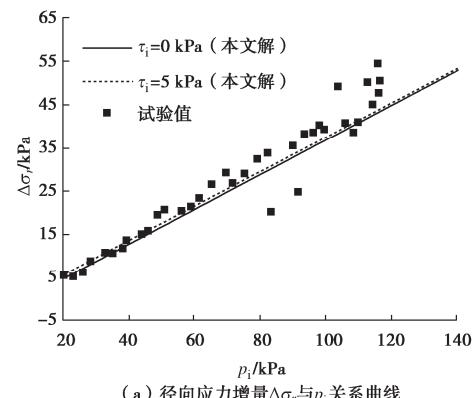
图5 Mohr-Coulomb 强度准则

Fig. 5 Mohr-Coulomb strength criterion

3.2 本文解与试验值对比验证

文献[19]进行了9组不同埋深下的均匀砂土水平钻孔试验。本文以其中1组HB25为例，其基本参数：孔口直径 $D = 2r_i = 38\text{ mm}$ ，砂土密度 $\rho' = 1696\text{ kg/m}^3$ ，孔口深度与孔口直径比值 $H/D = 17.9$, $\lambda = 0.51$, $c = 5\text{ kPa}$ （由于钻孔周围发生了入渗，从而考虑了黏聚力）， $\varphi = 46^\circ$ 。该试验测试了极角 $\theta = 270^\circ$ 且 $r = 3r_i$ 的径向应力、切向应力增量值，通过与本文解（本文解采用 $b = 0$ ，在实际工程中可根据文献[15]方法确定 b 值）对比分析如图6所示。

从图6中可以看出：本文求得的径向应力增量 $\Delta\sigma_r$ 与试验值非常吻合，而求得的切向应力增量 $\Delta\sigma_\theta$ 比试验值略大，但从总体变化趋势来说较为吻合。同时由于 τ_i 与 p_i 相比较小，故图6中考虑切应力作用时与未考虑切应力时曲线变化不是特别明显。



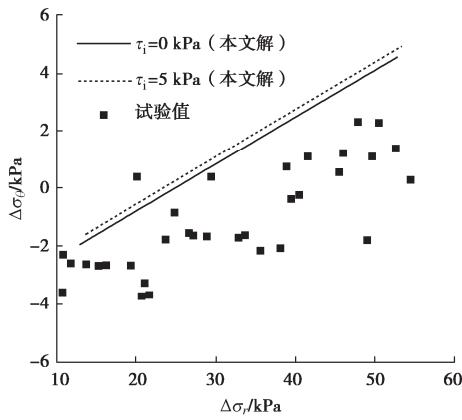


图 6 不同 τ_i 下的本文解与试验值对比分析
(b) 切向应力增量 $\Delta\sigma_0$ 与径向应力增量 $\Delta\sigma_r$ 关系曲线

Fig. 6 Comparative analysis of proposed solutions and experimental values with different values of τ_i

4 参数分析

本节进行参数分析时, 取文献[8]中的参数:

$r_i = 1$, $p_0 = c$, $\lambda p_0 = 0.5c$, $p_i = 5c$, $\varphi = 15^\circ$; 另附加参数 $E = 100c$, $\nu = 0.3$, 并取式(74)中 $w = 7$ (即取前 7 项)。考虑到对称性, 本节分析仅取极角 θ 在 $0^\circ : 90^\circ$ 区域的图形。

4.1 理论计算框架对计算结果的影响

从全文整体推导来看, 本文将式(6)简化为式(38)时, 会产生一定的相对误差, 本节就这种简化产生的相对误差对计算结果的影响进行分析。

由于文献[3]给出了基于 Tresca 屈服准则时, 考虑两向等压应力场和孔口剪切应力共同作用下弹性区、塑性区应力精确计算公式, 但并未给出塑性区半径计算表达式 (只需要在弹塑性交界线处, 令弹性区和塑性区的径向正应力、切向正应力和切应力分别相等即可求得)。现将孔口周边不同切应力作用下, 本文解与文献[3]中求得的塑性区半径、应力精确解进行对比分析。

当 $\lambda = 1$, $p_i = 5c$, $b = 0$, $\varphi = 0^\circ$, 其他参数同前, 在不同 τ_i 时, 本文解与文献[3]求解的塑性区半径、柱形孔口处的应力精确解 (其他位置处应力类似, 由于篇幅限制在此不再赘述) 对比分析如图 7 所示。

从图 7 中可以看出: 在不同 τ_i 时, 本文解与精确解弹塑性交界线变化趋势一致, 最大相对误差为 4.0%, 而应力值是非常吻合的。因此从 Tresca 屈服准则角度来看, 本文所作简化后计算精度是比较高的。

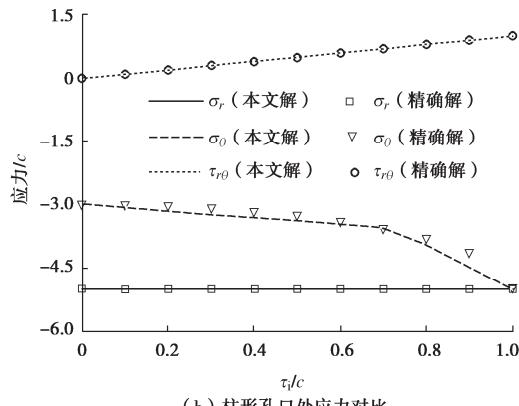
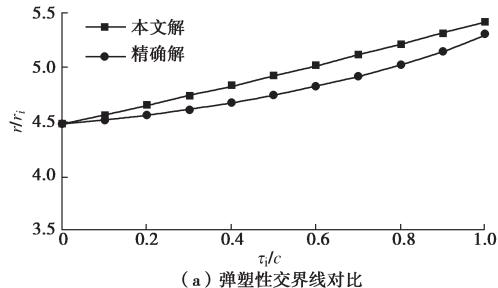


图 7 不同 τ_i 下的弹塑性交界线和应力分量 (Tresca 屈服准则)

Fig. 7 Elastic-plastic boundary and stress components with different values τ_i (Tresca yield criterion)

另外特别指出: 当采用 Mohr-Coulomb 强度准则时, 由于未见文献给出精确解, 所以本文只给出本文解与文献[20] (即 $b = 0$, $\tau_i = 0$, $\lambda = 1$ 情况下) 精确解的对比, 详见 4.3 节。

4.2 柱形孔口周边均匀切应力的影响

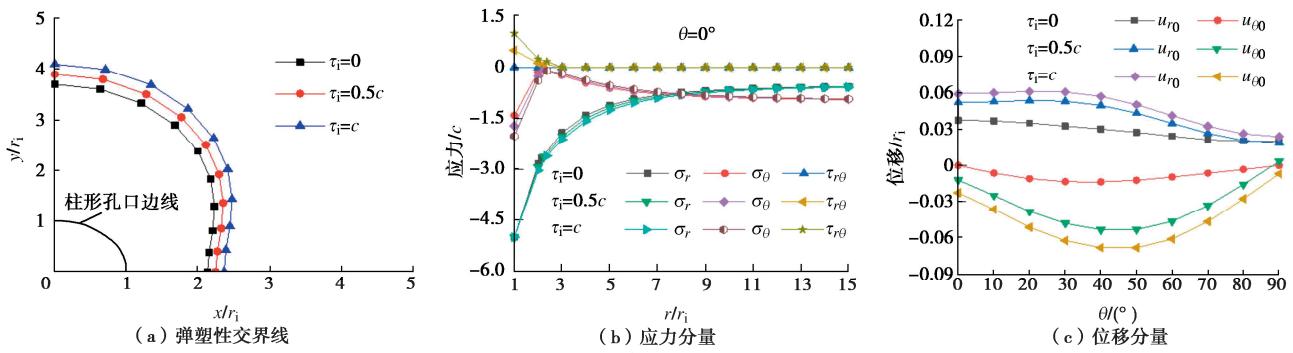
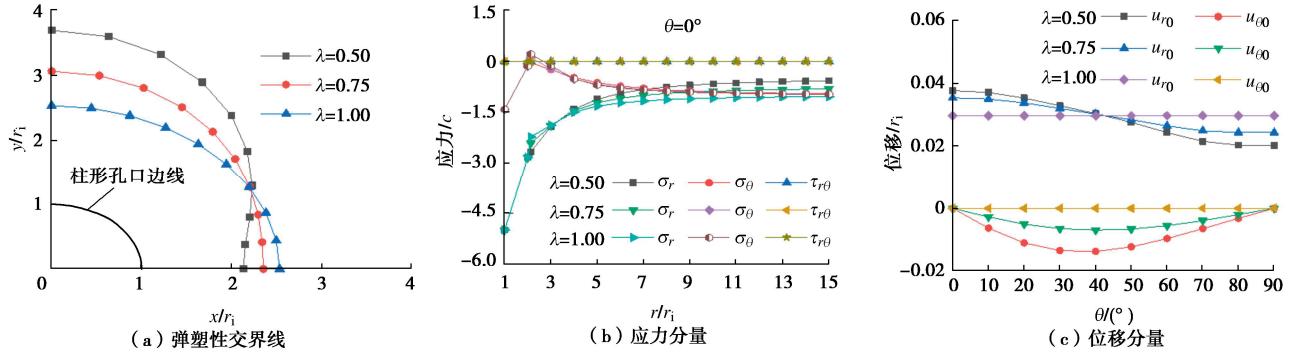
当 $\lambda = 0.5$, $p_i = 5c$, $b = 0$, τ_i 分别取 0, 0.5c, c 时, 其他参数同前, 得到的弹塑性交界线、极角 $\theta = 0^\circ$ 时的应力分量、柱形孔口处的径向位移 (即 u_{r0}) 和切向位移 (即 $u_{\theta 0}$) 如图 8 所示。

从图 8 (a) 可以看出: 不同 τ_i 下的弹塑性交界线呈类椭圆形状, 类椭圆的长轴方向与两向不等压应力场的较大值处一致, 并且弹塑性交界线随 τ_i 增大呈均匀增大的趋势。从图 8 (b) 可以看出: 在塑性区, 不同 τ_i 下的切向正应力、切应力变化显著, 而径向正应力基本重合; 在弹性区, 不同 τ_i 下的径向正应力、切向正应力、切应力基本重合。从图 8 (c) 可以看出: 当 τ_i 时, 柱形孔口处的径向位移在 $0^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ 内基本无变化, 而在 $40^\circ < \theta \leq 90^\circ$ 内, 随极角 θ 增大而减小; 当 $\tau_i = 0$ 时, 柱形孔口处的径向位移在 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 随极角 θ 增大而减小; 柱形孔口处的切向位移 (这里指绝对值大小) 随极角 θ 呈先增大后减小的趋势, 近似为正弦曲线, 并且当 $\tau_i = 0$, θ 为 0° , 90° 时, 柱形孔口处的切向位移为 0。

4.3 侧压力系数的影响

当 $p_i = 5c$, $b = 0$, $\tau_i = 0$, λ 分别取 0.50, 0.75, 1.00 时, 其他参数同前, 得到的弹塑性交界线、极角 $\theta = 0^\circ$ 时的应力分量、柱形孔口处的径向位移 u_{r0} 和切向位移 ($u_{\theta 0}$) 如图 9 所示。

从图 9 (a) 可以看出: 不同 λ 下的弹塑性交界线显著不同。并以 $\theta = 30^\circ$ 为界分成两段; 当 $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ 时, 弹塑性交界线随 λ 增大水平向右移动; 当 $30^\circ < \theta \leq 90^\circ$ 时, 弹塑性交界线随 λ 增大竖直向下移动, 并且当 $\lambda = 1$ 时弹塑性交界线为圆形。因此在实际

图 8 不同 τ_i 下的弹塑性交界线、应力分量和位移分量Fig. 8 Elastic-plastic boundary, stress components and displacement components with different values of τ_i 图 9 不同 λ 下的弹塑性交界线、应力分量和位移分量Fig. 9 Elastic-plastic boundary, stress components and displacement components with different values of λ

工程中，不能忽视侧压力系数 λ 的影响。从图 9 (b) 可以看出：在塑性区，不同 λ 下的径向正应力、切向正应力、切应力基本重合，这是由于在极角 $\theta = 0^\circ$ 处的塑性区半径相差不大所导致的；在弹性区，切应力恒为 0。从图 9 (c) 可以看出：柱形孔口处的径向位移以 $\theta = 40^\circ$ 为界分成两段，当 $0^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ 时，径向位移随 λ 增大而减小；当 $40^\circ < \theta \leq 90^\circ$ 时，径向位移随 λ 增大而增大。柱形孔口处的切向位移（这里指绝对值大小）随 λ 增大而减小。并且随 λ 增大，径向位移和切向位移的数值比值也增大，即 λ 越大，切向位移相对径向位移来说，越可以忽略不计。特别当 $\lambda = 1$ 时，本文方法求得的柱形孔口处的径向位移、切向位移分别为两个常数 $0.03r_i$ ，0，这与两向等压应力场时，假定柱形孔口均匀扩张，切向位移为 0 是吻合的，并且根据文献[20]（即 $b=0$ ， $\tau_i=0$ ， $\lambda=1$ 情况下）求得的径向位移也与 $0.03r_i$ 几乎相等。

5 结 论

(1) 本文解给出了一种柱形孔扩张问题新的计算框架，不仅扩展了文献[7]采用 Tresca 屈服准则下求得的解，而且推导了考虑切应力下的径向位移和切向位移，体现了柱形孔扩张时的“非圆效应”。通过与文献[3]采用 Tresca 屈服准则并考虑切应力得出的精确解比较，弹塑性交界线最大相对误差为 4.0%，而应力

解非常吻合。

(2) 由于考虑切应力可以进一步扩展塑性区半径，因此在水平定向钻井过程中，在达到相同塑性区半径情况下，考虑切应力影响可以减少扩孔压力。

(3) 本文方法可以扩展应用到柱形孔压缩问题（比如隧道稳定性分析）以及其他本构模型（比如幂强化-理想塑性模型）中，这些将在后续进行研究。

(注：文中附录见本文电子版)

参考文献：

- [1] MESRI G, HAYAT T M. The coefficient of earth pressure at rest[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30(4): 647-666.
- [2] WHALLEY W R, LEEDS-HARRISON P B, CLARK L J, et al. Use of effective stress to predict the penetrometer resistance of unsaturated agricultural soils[J]. Soil and Tillage Research, 2005, 84(1): 18-27.
- [3] ZHOU H, LIU H, KONG G. Influence of shear stress on cylindrical cavity expansion in undrained elastic-perfectly plastic soil[J]. Géotechnique Letters, 2014, 4(3): 203-210.
- [4] GALIN L A. Plane elastic-plastic problem: plastic regions around circular holes in plates and beam[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1946(10):365-386.
- [5] ZHOU H, LIU H L, KONG G Q, et al. Analytical solution of undrained cylindrical cavity expansion in saturated soil under

- anisotropic initial stress[J]. Computers and Geotechnics, 2014, **55**: 232-239.
- [6] ZHOU H, KONG G, LIU H. A semi-analytical solution for cylindrical cavity expansion in elastic-perfectly plastic soil under biaxial in situ stress field[J]. Géotechnique, 2016, **66**(7): 584-595.
- [7] ZHUANG P Z, YU H S. Two-dimensional elastoplastic analysis of cylindrical cavity problems in Tresca materials[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2019, **43**(8): 1612-1633.
- [8] ZHUANG P Z, YU H S. A unified analytical solution for elastic-plastic stress analysis of a cylindrical cavity in Mohr-Coulomb materials under biaxial in situ stresses[J]. Géotechnique, 2019, **69**(4): 369-376.
- [9] WANG Y, CHEN H H, LI J P, et al. Analytical solution to cylindrical cavity expansion in mohr-coulomb soils subject to biaxial stress condition[J]. International Journal of Geomechanics, 2021, **21**(9): 04021152.
- [10] 武孝天, 徐永福. 超固结土中排水圆孔扩张弹塑性 UH 解[J]. 岩土工程学报, 2020, **42**(10): 1903-1913. (WU Xiaotian, XU Yongfu. Elasto-plastic solution for drained cavity expansion in over-consolidated soil incorporating three-dimensional unified hardening model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, **42**(10): 1903-1913. (in Chinese))
- [11] 于旭光, 郑宏. 两向不等压圆形孔口压缩与扩张问题的塑性区半径统一解[J]. 水利水电技术(中英文), 2023, **54**(7): 193-204. (YU Xuguang, ZHENG Hong. Unified solution of plastic zone radius for compression and expansion of circular hole under two-dimensional unequal pressure stress field[J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2023, **54**(7): 193-204. (in Chinese))
- [12] HABIMANA J, LABIOUSE V, DESCŒUDRES F. Geomechanical characterisation of cataclastic rocks: experience from the Cleuson-Dixence Project[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2002, **39**(6): 677-693.
- [13] 姚仰平, 路德春, 周安楠, 等. 广义非线性强度理论及其变换应力空间[J]. 中国科学 E 辑: 工程科学 材料科学, 2004, **34**(11): 1283-1299. (YAO Yangping, LU Dechun, ZHOU Annan, et al. Generalized nonlinear strength theory and its transformation stress space[J]. Science in China, Ser E, 2004, **34**(11): 1283-1299. (in Chinese))
- [14] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(2): 1-10. (YU Maohong. Unified strength theory of geotechnical materials and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(2): 1-10. (in Chinese))
- [15] 俞茂宏, 武霞霞, 史俊, 等. 确定土体破坏准则的一个新方法[J]. 西安交通大学学报, 2020, **54**(8): 1-10. (YU Maohong, WU Xiaxia, SHI Jun, et al. A new strategy for determining failure criteria of soil[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2020, **54**(8): 1-10. (in Chinese))
- [16] 陆明万, 罗学富. 弹性理论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. (LU Mingwan, LUO Xuefu. Fundamentals of Elasticity Theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001. (in Chinese))
- [17] CHEN H H, LI L, LI J P, et al. A generic analytical elastic solution for excavation responses of an arbitrarily shaped deep opening under biaxial in situ stresses[J]. International Journal of Geomechanics, 2022, **22**(4): 04022023.
- [18] 现代工程数学手册编委会. 现代工程数学手册[M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1985. (Editorial Committee of Handbook of Modern Mathematics in Science and Engineering. Handbook of Modern Mathematics in Science and Engineering[M]. Wuhan: Huazhong Institute of Technology Press, 1985. (in Chinese))
- [19] LAN H T, MOORE I D. Experimental investigation examining influence of burial depth on stability of horizontal boreholes in sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2020, **146**(5): 04020013.
- [20] 赵均海, 陈晨, 张常光. 非饱和土柱形孔扩张的统一弹塑性解[J]. 水利水电技术, 2019, **50**(8): 166-173. (ZHAO Junhai, CHEN Chen, ZHANG Changguang. Unified elastoplastic solution of cylindrical cavity expansion in unsaturated soils[J]. Water Resources and Hydropower Engineering, 2019, **50**(8): 166-173. (in Chinese))
- [21] DETOURNAY E. An approximate statical solution of the elastoplastic interface for the problem of Galin with a cohesive-frictional material[J]. International Journal of Solids and Structures, 1986, **22**(12): 1435-1454.
- [22] 余家荣. 复变函数[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2014. (YU Jiarong. Function of a Complex Variable[M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2014. (in Chinese))
- [23] DETOURNAY E, FAIRHURST C. Two-dimensional elastoplastic analysis of a long, cylindrical cavity under non-hydrostatic loading[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1987, **24**(4): 197-211.