

DOI: 10.11779/CJGE20230855

土力学的连续性假设及其在建模中的应用

陈正汉¹, 苗强强^{2,3}, 郭楠⁴, 张昭⁵

(1. 陆军勤务学院军事设施系, 重庆 401311; 2. 西北民族大学土木工程学院, 甘肃 兰州 730030; 3. 甘肃省绿色工程材料与低碳建造重点实验室, 甘肃 兰州 730030; 4. 兰州理工大学土木工程学院, 甘肃 兰州 730050; 5. 西安理工大学岩土工程研究所, 陕西 西安 710048)

摘要: 为了弥补土力学中缺失连续性假设这一重要理论缺陷, 在对多个学科中的连续性概念进行系统地梳理考究的基础上, 提出了土力学中连续性假设的恰当表述, 进而厘清了土的本构模型的概念、种类、属性和建模思路。研究结果表明: 连续介质力学和多孔介质流体动力学的连续性假设为土力学的连续性假设提供了有益参考, 但都有一定的缺陷; 用混合物理论的观点和方法描述土的连续性比较合适, 且可以避免在定义孔隙率时遇到的困扰; “连续”是一个相对的概念, 当外部特征尺寸远大于介质内部特征尺寸时, 就可以把研究对象看作连续介质; 现有土的各种本构模型均以连续介质力学为基础, 总体上属于唯象模型。阐明了本构关系的概念、种类和建模思路: 本构关系是物质宏观性质的数学模型; 土的本构模型包括持水、渗水、渗气、传热、屈服、变形、强度、细观结构演化、热力学效应、相变规律等多方面的内容, 而不仅限于应力-应变关系; 土的本构关系的研究应针对具体土类, 抓住主要影响因素, 建立解决主要问题的数学模型。

关键词: 连续性假设; 连续介质力学; 多孔介质流体动力学; 混合物理论; 本构模型; 建模思路

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2024)11-2245-11

作者简介: 陈正汉(1947—), 男, 教授, 主要从事非饱和土与特殊土力学及工程方面的科研和教学工作。E-mail: chenzhenghan47@163.com。

Continuity hypothesis of soil mechanics and its application in modeling

CHEN Zhenghan¹, MIAO Qiangqiang^{2,3}, GUO Nan⁴, ZHANG Zhao⁵

(1. Department of Military Installation, Army Logistics University, Chongqing 401311, China; 2. College of Civil Engineering, Northwest Minzu University, Lanzhou 730030, China; 3. Key Laboratory of Green Engineering Materials and Low-carbon Construction, Gansu Province, Lanzhou 730030, China; 4. College of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 5. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: In order to make up for the important theoretical defect of its lack in the soil mechanics, the continuity hypothesis is properly put forward on the basis of systematic reviews and studies on the continuity concept in multiple disciplines, and then the concept, category, attribute and modeling idea of the constitutive model for soils are clarified. The results show that the continuity hypotheses in the continuum mechanics and dynamics of fluids in porous media provide useful references for the continuity hypothesis in soil mechanics, but both have certain defects. The viewpoint and method in the theory of mixtures are suitable for describing the continuity of soils, and it can avoid the difficulties encountered in defining the porosity. The continuity is a relative concept. A research object can be regarded as a continuous medium when the external feature size is much larger than the internal feature size of the medium of which the research object is made. The existing constitutive models for soils are all based on the continuum mechanics and generally belong to phenomenological ones. The concept, category and modeling idea of the constitutive relation are clarified, that is, the constitutive relation is a mathematical model for the macro-properties of substances; The constitutive model for soils includes various aspects such as water retention, water permeability, gas permeability, heat transfer, yield, deformation, strength, meso-structure evolution, thermodynamic effects, phase transformation laws, etc., not merely limited to stress-strain relationship. For the studies on the constitutive relation of soils, the specific soil category should be highlighted, the main influencing factors should be grasped, and the mathematical model to solve the main problem should be established.

基金项目: 国家自然科学基金项目(52168051, 42372336, 42456202); 西北民族大学高层次人才引进项目; 甘肃省绿色工程材料与低碳建造重点实验室开放课题项目
收稿日期: 2023-09-05

Key words: continuity hypothesis; continuum mechanics; dynamics of fluids in porous media; theory of mixture; constitutive model; modeling ideas

0 引言

在材料力学^[1-2]、弹性力学^[3-4]、塑性力学^[5]、水力学^[6]和流体力学^[7]的绪论或第一章中都明确假定,研究对象是连续均质各向同性的;但在中外土力学教材^[8-19]中,通篇均未见提及连续性假设。这是疏忽遗漏?还是有意回避?事实上,中外土力学教材^[8-19]的编著者都是土力学专家,即便有人疏忽,但不可能人人疏忽。如此看来,在土力学教材中不提连续性假设是有意回避。那土力学教材为什么要回避连续性假设呢?事实上,土是多相多孔的松散介质而不是连续介质。土中固相颗粒形成多孔骨架,水和气填充孔隙或在孔隙中流动,有的土中还存在肉眼可见的大孔隙和裂隙,这与金属和液体等连续介质的差异非常明显,故从客观实际情况看不宜把土视为连续介质。

不过,在所有土力学教材中,虽然通篇不提连续性假设,但却应用了高等数学和材料力学、弹性力学、流体力学等连续介质力学分支的理论、方法和有关结果,如微积分运算、求极值(库仑土压力理论)、偏微分方程(固结理论)、基底压力分布、地基附加应力的 Boussinesq 解和 Flamant 解、流网、地基承载力理论等。以 Terzaghi 固结理论为例,文献[10, 12, 15~19]的基本假设中都假定“土层是均质、完全饱和的”,但均没有连续性的假设;在固结控制方程的推导、求解和固结度的计算过程中,进行了一系列微积分运算。高等数学告诉我们,函数可导是可微的充要条件,而在某点可导的函数必定在该点连续^[20],即连续是微分运算的前提。显而易见,土力学的做法是不严谨的,可谓是权宜之计或无奈之举,而非长久之计。

为了克服土力学的这一重要理论缺陷,本文在笔者已有研究工作^[21]的基础上,对相关学科中的连续性假设进行系统地梳理,将混合物理理论的基本假设作为土力学的连续性假设;继而论述了土力学本构模型的科学属性和建模思路。

1 数学和连续介质力学中的连续性概念

连续性的概念源于数学。众所周知,实数有无穷多个,任何两个不同的实数之间亦有无穷多个实数,将全部实数视为一个集合或者系统(简称为集或系),每个实数都是该集合中的一个元素。实数集合中的元素与数轴上的点是一一对应的。换言之,实数集合中的元素布满整个数轴而不留孔隙,这就是实数集合的连续性。

冯元桢^[22]指出,“实数是一个连续集。……,我们直觉感觉到时间可以用一个实数系 t 表示,三维空间可以用 3 个实数系 x, y, z 代表。这样,可以把时间和空间看成一个四维的连续集。”进而他给出了连续介质和连续介质力学的定义^[22]:“如果将连续集的概念推广到物质,可以说物质在空间是连续分布的。……若在空间区域内各处都能定义密度,就可以说这个质量是连续分布的。……如果一个物质的质量、动量、能量密度在数学意义上存在,这个物质就是一个物质连续统,这样一个物质连续统的力学就是连续介质力学。”

以密度为例,其定义借用极限的概念。假设一定的物质充满了一定的空间 V_0 , 考察 V_0 中的一点 P 及收敛于 P 的子空间序列 $V_0, V_1, V_2, \dots; V_n \subset V_{n-1}, P \in V_n, (n=1, 2, \dots)$, 符号 V_0, V_1, V_2, \dots 同时代表各自的体积。设空间 V_n 中所包含物质的质量是 M_n , 当 $n \rightarrow \infty, V_n \rightarrow 0$ 时,若 M_n/V_n 的极限存在,则此极限就定义为 P 点处质量分布的密度,用 $\rho(P)$ 表示,即

$$\rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{M_n}{V_n} \quad (1)$$

若在空间区域 V_0 内各处都能这样定义密度,就说这个质量是连续分布的。

以上基于数学关于连续性的概念经过科学抽象给出的连续介质力学定义仅适用于理想连续介质。事实上,在真实客观世界中并不存在满足该定义的物质。丁肇中 2018 年 7 月 6 日在山东大学讲演中指出,“经过许多年的努力,现在对物质结构的基本了解是:原子的外层是电子,里面是原子核。原子核里面是粒子,粒子里面是夸克,把夸克“绑”在一起的是胶子。这是描绘宇宙中物质结构的最基本图像。”由于电子和构成原子的粒子在不停地运动,且电子和粒子的位置、动量和能量是测不准的^[23],故当 V_n 小于原子半径的量级时, M_n/V_n 的极限就不一定存在,物质就不能看成连续介质。冯元桢把上述连续介质的定义称为“经典定义”^[24]。换言之,连续介质的经典定义忽略了实际物质的离散粒子结构,理想地认为物质连续地充满了它占据的空间。

为了符合介质的实际情况,冯元桢对上述经典定义做了修正。与经典定义的不同之处在于^[24]:质点系与实数不必具有一一对应的同构性(a one-to-one isomorphism),质点系可以是离散的,不同质点之间可以有孔隙(voids), V_n 的大小将受到下述限制:当 $n \rightarrow \infty$ 时, V_n 的极限趋于一个有限的正数 ω 。设空间

V_n 中所包含物质的质量是 M_n , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若

$$\left| \rho - \frac{M_n}{V_n} \right| < \varepsilon \quad (2)$$

则称比值 M_n/V_n 的序列 (sequence) 在可接受的变动性 ε (an acceptable variability ε) 的条件下具有极限 ρ , 而量 ρ 就称为 P 点处在限定的体积 ω 内具有可接受的变动性 ε 的物质密度。

用同样的方法可以定义单位体积内质点的动量和能量, 每个定义都与可接受的变动性和限定的体积有关。类似地还可以定义每一点的应力和应变。如果每一点的密度、动量、能量、应力和应变在 V_0 内的空间坐标系中全部是连续函数, 则称 V_0 内的物质是连续介质。

文献[24]进一步指出: “如果某物体被视为连续介质, 就可以按照前述经典定义制作出该真实物体的抽象复制体。该抽象复制体与实数系是同构的, 是真实物体的理想化。理想化的规则是: 理想系统的质量密度在其定义范围内与真实密度相同。当一组力施加到真实物体及其抽象复制体上时, 二者的应力和应变相同; 二者的不同之处在于: 理想系统可以严格地进行微积分运算, 而真实物体则有尺度下限的限制, 且必须考虑统计的变动性。” 不过文献[24]并没有给出限定的体积 ω 和可接受的变动性 ε 的具体数值。

顺便说明, 所谓同构性是指两个系统具有完全相同的结构和性质, 或者说在本质上是一致的, 只是采用了不同的符号表示而已。其具体含义可参见文献[25]。

经典连续介质力学主要针对单一介质 (固体或流体), 与土的差别较大。

2 多孔介质流体动力学中的连续性概念

多孔介质流体动力学^[26]的研究对象是多孔-流体介质。所谓多孔-流体介质指由固相形成多孔骨架、有一种或多种流体充满孔隙或在孔隙中流动的复合介质。流体和孔隙是关注的重点。

2.1 流体的质点和密度的定义

贝尔认为^[26], “多孔介质中孔隙的内表面对流体流动起边界作用, 但任何试图以精确的方式对其几何形状进行描述的想法都是徒劳的。” 另一方面, 流体是由大量分子组成的 (例如 1 摩尔水或气体中包含 6.02×10^{23} 个分子), 要精确描述每个流体分子的运动, 就是使用现代高速计算机也是不可能的。

考虑流体中的一点 P , 设 Δm_i 代表一个以 P 点为质心、体积 ΔV_i 中流体的质量, 体积 ΔV_i 中流体的平均密度为 $\rho_i = \Delta m_i / \Delta V_i$ 。显然, 若 ΔV_i 太大, 则比值

$\Delta m_i / \Delta V_i$ 就不能代表 P 点附近流体的密度, 对非均匀流体更是如此。

若围绕 P 点逐步减小 ΔV_i , 对一系列的 ΔV_i , 即 $\Delta V_1 > \Delta V_2 > \Delta V_3 \cdots$, 求出比值 $\Delta m_i / \Delta V_i$ 。图 1 是计算结果的示意图。由图 1 可见, 当体积 ΔV_i 足够大时, 对不均匀流体, ρ_i 是变化的; 当体积 ΔV_i 变小时, ρ_i 的变化幅度减小; 继而在 ΔV_i 收敛于 P 点的过程中, 存在一个 ρ_i 不随 ΔV_i 的变动而变化的流体体积范围 (从 ΔV_{cr} 减小到 ΔV_0); 当体积 ΔV_i 进一步变小时, 则在 ΔV_0 以下, 体积 ΔV_i 中包含的分子太少, 以致于 ΔV_i 的任何进一步减小, 都会显著地影响比值 $\Delta m_i / \Delta V_i$ 。在 ΔV_i 的特征长度变到分子之间的平均距离 λ (即分子平均自由程) 时, 就会出现这种情况。当 $\Delta V_i \rightarrow 0$ 时, 比值 $\Delta m_i / \Delta V_i$ 的波动很大。在这种情况下, 用 ρ_i 去定义流体在 P 点的密度是没有意义的。因此, 在 P 点流体的密度可定义为

$$\rho(P) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \rho_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} (\Delta m_i / \Delta V_i) \quad (3)$$

式中: 特征体积 ΔV_0 称为数学点 P 处的流体的物理点或质点。

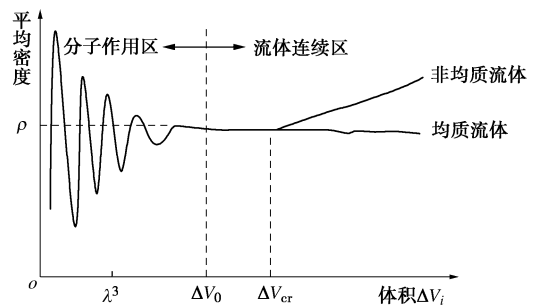


图 1 流体密度的定义 (λ 是分子平均自由程)

Fig. 1 Definition of fluid density (λ , the molecular mean free path)

通过上述方法, 由分子集合体组成的物质就为一种充满整个空间的连续介质所代替。这样, 就得到一种假想的光滑介质 (代替分子), 称之为流体。对于流体中的每一点都可以定义相应的密度值, 由此形成空间的连续函数 ρ 。即, 对于任意两个邻近的点 P 和 P' , 有

$$\rho(P) = \lim_{P' \rightarrow P} \rho(P') \quad (4)$$

应当指出, 由式 (3) 确定的密度是流体的真密度, 即单位体积中充满某一流体时所具有的质量。将真密度除以多孔介质的体积, 就得到流体的表观密度 (即平均密度)。

如果 M_n 仅代表 V_n 中固相的质量, 就可以用第 1 节的方法定义多孔介质中固相的表观密度 (平均密度)。

2.2 孔隙率的定义

一点的孔隙率的概念最早由 Hubbert^[27]于 1957 年提出, 贝尔^[26]对其进行了改进完善。

以下按照类似于 2.1 节定义流体密度时所用的方法定义体孔隙率。设 P 是多孔介质区域内的一个数学点, 以点 P 为质心划定一个体积为 ΔV_i 的球, 该球的体积比单个孔隙体积或单个固相颗粒体积大得多。对于该球体, 计算比值为

$$n_i \equiv n_i(\Delta V_i) = (\Delta V_v) / \Delta V_i \quad (5)$$

式中: $(\Delta V_v)_i$ 为 ΔV_i 内孔隙的体积。

式 (5) 实际上代表 ΔV_i 内的平均孔隙率。重复与 2.1 节同样的过程, 逐步缩小以 P 点为质心的球体积 ΔV_i , 即 $\Delta V_1 > \Delta V_2 > \Delta V_3 \cdots$, 便得到一系列的 $n_i(\Delta V_i)$ 值, $i = 1, 2, 3, \cdots$ 。

由图 2 可见, 对于较大的那些 ΔV_i , 当 ΔV_i 减小时, 比值 n_i 会逐渐变化, 特别是当考虑的区域为非均质时便是如此。在某个 ΔV_i 值以下, 比值 n_i 的波动趋于消失, 而余下的小幅度波动则是由 P 点周围孔隙大小的随机分布引起的。但当 ΔV_i 小于某一体积 ΔV_0 时, 比值 n_i 会出现较大的波动。这种现象发生在 ΔV_i 的尺寸接近单个孔隙尺寸之时。最后, 当 $\Delta V_i \rightarrow 0$ 时, 比值 n_i 变为 1 或 0 (取决于 P 点是在介质的孔隙中还是在固相骨架中)。

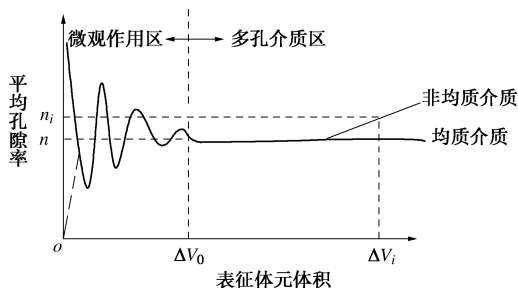


图 2 孔隙率定义的示意图

Fig. 2 Schematic diagram of porosity definition

Hubbert^[27]指出, 如果把图 2 所示的平均孔隙率与 ΔV 关系曲线的平直段外推到其极限 (即让 $\Delta V_i \rightarrow 0$), 就可得到在 P 点的确定的孔隙率值 (an unambiguous value), 称之为外推极限 (extrapolated limit)。

贝尔^[26]舍弃了外推极限的做法, 他将介质在 P 点的体孔隙率 $n(P)$ 的定义: 当 $\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0$ 时比值 n_i 的极限, 即

$$n(P) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} n_i\{\Delta V_i(P)\} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \frac{(\Delta V_v)_i(P)}{\Delta V_i} \quad (6)$$

对于 $\Delta V_i < \Delta V_0$ 的那些值, 必须考虑到孔隙和固体颗粒的实际存在; 在该范围内没有能代表 P 点孔隙率的单一数值。所以, 体积 ΔV_0 就是多孔介质在数学点 P 处

的质点。显然, 在 $\Delta V_0 \rightarrow 0$ 时的极限无意义。由表征体元的定义可知, 表征体元增加一个或几个孔隙对 n 值不会有明显的影响。

假定 ΔV_0 和 ΔV_v 在 P 点附近的变化是光滑的, 则有

$$n(P) = \lim_{P' \rightarrow P} n(P') \quad (7)$$

这意味着在多孔介质内, n 为 P 点位置的连续函数。

用类似定义体孔隙率的方法, 可以定义面孔隙率和线孔隙率。

这样, 通过引入表征体元和孔隙率的定义, 实际的多孔-流体介质就被抽象为假想的连续介质。对于这种假想的连续介质中的任一点, 可以把运动变量和动力学变量看成点的空间坐标和时间的连续函数, 从而能够借助偏微分方程描述多孔介质区域内的流动及其它现象。

顺便指出, 式 (6) 中的体积 ΔV_0 与第 1 节的限定的体积 ω 的含义相当, 但没有类似于式 (2) 的要求, 即

$$|n(P) - (\Delta m_i / \Delta V_i)| < \varepsilon_v \quad (8)$$

式中: ε_v 为关于孔隙率的可接受的变动性。换言之, 式 (2) 比式 (6) 要求严格。

3 混合物理论连续性概念

第 1 节所述的连续介质力学的研究对象通常是单一介质, 适合于金属材料和水、油等液体。第 2 节所述的多孔介质流体动力学研究的重点是多孔介质中的流体的运动, 缺乏严谨的理论基础和普适的理论框架。

研究多相多组分物质的理论称为混合物理论^[28-30]。混合物理论是理性力学或连续统物理的一个分支, 用公理化的方法研究多组分复合介质的共同运动与多种理化现象的耦合过程。笔者以混合物理论为基础, 先后构建了非饱和土的固结理论^[31-34]与岩土力学的公理化理论体系^[35]。混合物理论的基本假定是: 设混合物由 N 种组分组成, 将每一组分抽象为充满整个物理空间的连续介质, 不同组分占有共同的物理空间。换言之, 每一个空间位置被 N 个不同组分的质点所占据。这样, 不同组分的若干质点可以占有同一空间点 (互相重叠), 从而为研究不同组分的相互作用提供了方便, 因而混合物理论又被称为相互作用的连续介质力学^[36-37]。由此可见, 混合物理论实际上是广义连续介质力学。

混合物理论通过引入体积分数的概念而避开了孔隙率。设混合物由 N 种组分 (constituent) 组成, 用 a 代表混合物的任一组分, 其在单位体积混合物中所占的体积比例用 ϕ_a 表示, 称为 a 组分的体积分 (volume fraction); 用 ρ_a 代表 a 组分的表观密度 (apparent macroscopic density), 其物理意义为单位混合物体积

中 a 组分的质量, 简称为体密度 (bulk density); 用 γ_a 代表 a 组分的实际微观密度 (actual microscopic density), 简称为真密度 (true density), 其物理意义是 a 组分单位体积的质量。表观密度和真密度由下式相联系:

$$\rho_a = \phi_a \gamma_a \quad (9)$$

混合物中没有真空, 体积分数必须满足下述约束条件:

$$\sum_{a=1}^N \rho_a = 1 \quad (10)$$

混合物可分为溶混的 (miscible) 混合物与不溶混的 (immiscible) 混合物两类^[21]。前者如混合气体、食糖和食盐的水溶液、酒精和水的混合液及各种合金, 组成混合物的各种组分在分子水平上均匀分布, 浑然一体, 形如单一介质, 体积分数对其没有多大的意义; 后者如火箭推进器中固体颗粒燃料在气体中燃烧、悬浮颗粒, 石油开发过程中油、水、气、驱替物质的同时流动, 各组分之间有明显的分界面, 至少在细观水平 (孔隙) 尺度上可以辨识出来, 体积分数就是一个表征不溶混性或结构性的指标。

混合物的密度为

$$\rho = \sum_{a=1}^N \rho_a \quad (11)$$

从混合物角度看, 土是三相不溶混的混合物。土由 3 个组分组成, 即土骨架 (固相)、液相 (水) 和气, 可分别用 s , f , g 表示。混合物理理论定义的固相组分表现密度相当于土力学中的干密度, 而式 (11) 所定义的密度相当于土的自然密度或湿密度。三相的体积分数分别为

$$\phi_s = 1 - n, \quad \phi_f = n S_r, \quad \phi_g = n(1 - S_r) \quad (12)$$

式中: n 为土的孔隙率, 可直接由液相和气相的体积分数之和给出:

$$n = \phi_f + \phi_g \quad (13)$$

这样一来, 就不必用第 2.2 节借助表征体元的方法定义孔隙率, 亦不必使用外推极限的概念, 避开了表征体元 $\Delta V_i \rightarrow 0$ 时得不到确定极限值的困扰。这是用混合物理理论研究多相多孔介质的一个显著优点。

另一方面, 由于混合物理理论视每一组分为连续介质, 对其他变量的定义直接采用第 1 节的结果即可。

4 连续性假设在土力学中的表述

如上所述, 土的密度和孔隙率等概念与混合物理理论的有关术语实现了自然而然的结合, 不仅弥补了连续介质力学缺失孔隙率定义的不足, 而且克服了多孔介质流体动力学在定义孔隙率时遇到的两个困难 (即无法准确确定表征体元的体积 ΔV_0 及当 $\Delta V_i \rightarrow 0$ 时得

不到确定极限值), 故用混合物理理论的观点和方法描述土的连续性是合适的。

为了弥补土力学缺失连续性假设的遗憾, 可在土力学的绪论中增加一段文字。以《土力学》^[16]“绪论”为例说明如下。

该书绪论第 0.1 节“土力学的概念及学科特点”中写道 (见文献[16]第 1 页第 3 段开头): 土中固体颗粒是岩石风化后的碎屑物质, 简称土粒。土粒集合体构成土的骨架, 土骨架的孔隙中存在液态水和气体。因此, 土是由土粒 (固相)、土中水 (液相) 和土中气 (气相) 所组成的三相物质; 当土中孔隙被水充满时, 则是由土粒和土中水组成的二相体。

在这段文字后面可直接插入以下内容: 因此土不是理想的单相连续介质, 而是固、液、气三相组成的混合物。为了研究方便, 可视土中每一相为充满整个土体的连续介质, 不同组分占有共同的物理空间。从而可以用高等数学和连续介质力学的理论与方法描述土的力学性状。

这样处理, 既保留了原文的内容不变, 又相当融洽自然。在绪论增加了上述文字后, 就可以在土力学各章节中合法地应用高等数学和连续介质力学各分支学科的方法和结果, 对 Terzaghi 一维固结理论的基本假设也不必进行修改。

5 土力学本构模型的科学属性和建模思路

土的本构模型与连续性假设密切相关。本节主要阐述本构关系的定义及发展简介、本构模型的科学属性、应用条件和建模思路。

5.1 本构关系的概念及发展简介

对材料非线性本构关系的研究始于 20 世纪 40 年代, 在 20 世纪 60 年代—70 年代形成热潮^[38-41]。在中国, 本构关系的概念和理论最早出现在文献[42]中。本构关系的定义有多种表述, 20 世纪 80 年代的部分文献给出的本构关系的定义分述如下。

文献[42]表述: 本构关系是材料性质从经验加以抽象化的数学表现。每一个本构关系定义一种理想材料。

文献[43]表述: 把由经验得到的物性作为出发点, 以某些基本原理作指针, 找出它们的数学表达式, 这种表达式就叫做本构方程。从物质行为中只取出力学行为, 再从中提出所要研究的物性, 加以抽象化, 并运用数学形式表现出来, 就得出本构方程。这只是强调了物质某一方面的理想化公式, 它表达的是理想物质, 亦即是物质的数学模型。

文献[22]第 6 页表述:每一种物质都具有特殊的力学特性。物质力学特性的数学表达式称为这个物质的本构方程。

《中国大百科全书》表述^[44]:“物质宏观性质的数学模型称为本构关系,把本构关系写成具体的数学表达式就是本构方程。最熟知的反映纯力学性质的本构关系有胡克定律、牛顿黏性定律、圣维南理想塑性定律等;反映热力学性质的有克拉珀龙理想气体状态方程、傅里叶热传导方程等。”

在以上定义中都强调本构关系是描述“理想材料”“理想物质”“理想气体”等的“理想定律”,所谓“理想”是相对真实而言的。真实物质是具有微观结构和多方面属性的复杂材料,“理想物质”是抽象材料,“理想定律”是“强调物质某一方面属性的理想化公式”,仅能描述物质在某一方面的特性,而不是无所不能,更不可能适用于所有材料。

在上述各种对本构关系定义的表述中,《中国大百科全书》的表述言简意赅,同时指明了本构关系描述的是物质的宏观性质。根据这一定义可知,由于材料的宏观性质是多方面的,描述材料宏观性质的本构关系也有多种。例如,强度准则归于本构关系之列,因为它是描述材料濒于破坏时的宏观力学性质的数学模型。再如,土的三相指标之间的联系关系式、非饱和土的水气运动规律(即 Darcy 定律和 Fick 定律)、持水特性、土中水量在应力和吸力作用下的变化规律、饱和土与非饱和土的应力应变关系、土结构的演化规律(损伤演化方程或结构修复方程)、气在水中的溶解规律(Henry 定律)、相变规律等也都是本构关系。

剑桥学派在国际上最早研究土的本构关系,1963 年提出了理想“湿黏土”的剑桥模型^[45-46],1968 年提出修正剑桥模型^[47],同年出版专著《临界状态土力学》^[48],被视为现代土力学的发端,本构模型也因剑桥模型成了土力学的流行术语。Duncan 等^[49]于 1970 年提出土的增量非线性本构模型,即 Duncan-Zhang 模型。国内最早研究土的弹塑性本构关系的学者是魏汝龙^[50],他于 1964 年提出了正常压密土的弹塑性本构模型,修正剑桥模型是其特例。黄文熙^[51]于 1979 年系统论述了土的弹塑性应力应变模型理论,蒋彭年^[52]在 1982 年出版了《土的本构关系》一书,是国内第一本关于土的本构关系的专著。上述研究都仅限于土的应力应变关系,导致国内土力学界早期对本构关系的认知也局限于此。此种情况直到上世纪 90 年代初期由于非饱和土力学研究的深入才得以改观^[32, 53-54]。

5.2 本构模型的科学属性及应用条件

既然经典力学、多孔介质力学和混合物理论都以

连续介质为基础,其本构模型的构建也必然如此。事实上,在物理学中有两种基本数学模型:离散体模型和连续统(介质)模型^[55]。前者的代表是描述物质原子内部微观粒子行为的量子力学。原子核的半径为 $10^{-15} \sim 10^{-14} \text{ m}$ ^[23],其内部微观粒子的半径小于原子核半径。微观粒子具有二象性,既是微粒又是波,其位置和动量、能量和时间等共轭变量由测不准原理支配。对微观物体位置的恰当描述是说它处于某一位置的几率,在它可能出现的空间中有一个位置几率分布^[23]。测不准原理是微观物质的客观规律,不是测量技术和主观能力不够的问题,可见量子力学具有统计的属性。按照理论预测尚有 3000 多种微观粒子有待发现^[56],故量子力学仍在不断发展完善之中,且微观粒子的性质与大部分力学问题没有直接关联^[42]。“连续统模型运用场的概念描述物质的几何点,不必区分构成物体的一个个(微观)粒子之间的差异”^[55]。在物体上任一点可以确定一个密度,如质量密度,能量密度、熵密度等;在物体表面上的点则具有面密度,如应力和热流密度等,而不必把它们量子化。换言之,“连续介质力学建立的是一个可无尽分割而又不失去其任何定义性质的连续场理论,场可以是运动、物质、力、能量和电磁现象所在的场所。用这些概念表达的理论称为唯象理论(或现象宏观理论),因它表达实验的直接现象而并不企图用微观粒子观点去解释。唯象理论的合理性在于所依据的宏观实验,而所得结论仍然用于宏观实际;也就是以宏观世界作为出发点,建立宏观理论,返回来又用于宏观世界,并由宏观世界检验其正确性。如此一来,就可以不必管(微观)粒子结构”^[42]。由此观之,本构关系反映介质的总体效应,描述介质的宏观性质,这与《中国大百科全书》对本构关系的定义及试验仪器量测出来的介质宏观反应的属性相一致。

众所周知,土是岩石经风化、剥蚀、搬运、沉积而成的松散堆积物,由不同尺度的固体颗粒(包括矿物)和胶结物形成的土骨架、水和空气组成的多相多孔松散复合介质,不同相(或称为组分)之间存在复杂的物理-化学作用(主要对粉土和黏性土),并非像金属那样是均质连续各向同性的理想介质。土的力学性质如渗透性、变形和强度特性等主要源于“多相、多孔、松散”。土骨架是颗粒集合体形成的多孔介质,水和气可以在连通孔隙中渗透;土强度即土骨架的强度主要表现为土颗粒/团粒之间的联接抵抗剪切破坏的能力或土颗粒/团粒抵抗相对变形的能力,土的破坏不是土颗粒本身的破坏,更谈不上分子结构的破坏;土的体变主要源于土中孔隙的压缩,而土颗粒和土中水被视为不可压缩的(相对于土骨架的压缩性而言)。

岩土介质是天然产物,种类繁多,成因各异,成分千差万别,颗粒大小悬殊(粒径从大于 100 mm 到小于 0.075 mm,以至微米量级),随着工程规模和范围的扩大,会不断遇到新的土类或类岩土介质,如粉煤灰、粗粒料、冻土、盐渍土、碱渣和生活垃圾等。不同类土具有不同的结构(structure),土的结构对土的力学性质有重要影响。描述土的物理状态有一套完整的指标,包括粒度、密度、湿度和构度^[57]。

土的结构分为土体宏观结构(亦称为构造,如层理、裂隙、构造面等)和土的微观结构。根据 Mitchell 等^[58]和谭罗荣等^[59]的研究,土的微观结构包括两个方面:①土的几何结构,称为组构(fabric),包括土骨架基本单元(土粒和团粒)、孔隙、水和气在空间的分布排列;②土的基本单元(土粒和团粒)之间的相互联结和各种相互作用。目前对其的认识还是一种整体、宏观、定性的概念,只能对其中各种影响因素进行总体、宏观、粗略的描述,难以对其中某一具体因素进行精确的定量分析^[58,60]。显然,这里所说的微观尺度介于物理学中宏观和微观尺度之间,远远大于原子半径(量级为 10^{-10} m= 10^{-4} μm),可称为细观尺度(mesoscale 或 mesoscopic),亦称为介观尺度。土的结构还会随气候变化和工作条件(如力、水、温度、时间等)而发生变化、劣化或重塑,即是动态变化的。扫描电子显微镜和 CT 技术^[21]的发展为研究土的细观结构及其演化提供了有力工具和可能。

应当指出,外部特征长度(和/或时间)与物体内部特征长度(和/或时间)的比值决定了物体对外界作用的反应。当前者远远大于后者时,就可以把研究对象看作连续介质。换言之,“连续”是一个相对的概念。从微观角度看,尽管核外电子和原子核之间存在巨大的空间($10^{-10}\sim 10^{-15}\sim 10^{-14}$ m),但金属物体的最小尺寸远远大于原子尺寸,因而被视为连续体。在标准状态下,1 cm³的水中包含 3.34×10^{22} 个分子,相邻水分子之间的距离约为 3×10^{-8} cm^[6],渠道、输水管道、自来水管道的特征尺寸均远远大于该距离,采用连续介质的概念完全可行。在地球表面附近和室温条件下,空气分子的平均自由程约为 5×10^{-6} cm,研究流过飞机的气流时,可以把空气当作连续介质^[22]。再如,人体红血球细胞的直径约为 8×10^{-4} cm,如果研究血液在直径 0.5 cm 的动脉血管流动,后者是前者的 625 倍,便可以把血液视为连续介质^[22]。通常,土工构筑物(如地基、大坝、路堤、机场跑道等)的最小尺寸比土颗粒尺寸大得多,故可将其看作连续介质。又如,一个星系有成百上千亿颗星球,相邻星球之间的距离很大,但和星系的外围尺寸(直径)相比就非常渺小了。以银河系为例,银河系的直径约为(10~

20) 万光年(1 光年等于 9.46×10^{12} km),银河系内约有 2000 亿颗~4000 亿颗恒星,太阳附近每立方光年的空间中平均约有 0.004 颗恒星。离太阳最近的 10 颗恒星与太阳的平均距离约为 7 光年,不到银河系直径的万分之一。正因为如此,林家翘等^[61]认为:把星系看作质点系对每个恒星进行描述的方法是不恰当的,因为不可能追踪数以千亿计恒星的运动。林家翘等^[61]采用连续介质力学的方法,通过在由位置和速度构成的 6 维相空间中定义时刻 t 恒星的分布密度,进而构建了星系运动的微分方程组,其解析解与实际观测结果大致相符。随后,林家翘又创建了描述螺旋星系运动的密度波理论,用该理论预测螺旋星系的运动与观测结果基本相符^[61-62]。由于相邻两个黏菌阿米巴之间的距离远小于黏菌阿米巴的不同聚集中心之间的距离,林家翘等^[61]还采用连续介质力学的方法构建了描述黏菌阿米巴聚集的数学模型(偏微分方程)。正如林家翘等^[61]所言:“尽管恒星和黏菌阿米巴是物质的离散集合,但是把这些物质看作空间连续分布的模型,也使我们得益匪浅。”

综合以上认识可知,现有饱和土与非饱和土的各种本构模型均以连续介质力学为基础,总体上属于唯象模型。在研究特殊土(如原状膨胀土和原状黄土)的力学特性和本构模型时,应考虑细观结构及其损伤演化的影响^[21];在研究膨润土、盐渍土和污染土的持水特性、力学特性、热力学特性和本构模型时,应考虑物理-化学作用的影响^[21],并宜用矿物的微观晶体结构和双电层理论解释相关现象的机理。与金属材料的力学模型相比,土的本构模型参数较多且不是常数,需要用土力学试验仪器设备测定。

5.3 土的本构模型种类和构建思路

土的本构关系描述土的物理化学等方面的宏观特性,是现代土力学的基本课题之一。对非饱和土而言,其本构关系具有多方面的内容,如应力-应变关系、屈服准则、强度准则、水气运动规律、土-水特征曲线与土中水量变化规律、理想气体状态方程、土的结构演化规律(损伤演化方程或结构修复方程)、傅里叶热传导方程、气在水中的溶解规律(Henry 定律)、热力学效应、相变规律等都是本构关系。因此,非饱和土与特殊土的本构模型种类繁多,包含着十分丰富的内容。由于气相的体变难以准确测定,且在 3 相中只要确定了土样的总变形、固相变形和液相变形,就可推知气相变形。故对非饱和土主要应研究土骨架和液相的本构模型^[21]。

众所周知,土是自然界的产物,不同类土具有各自的特性,软土的主要特性是高压缩性、低强度、流变性,黄土的主要特性是结构性和湿陷性,膨胀土的

主要特性是胀缩性、裂隙性和超固结,冻土的主要特性是冻胀和融陷,盐渍土的主要特点是盐胀。很明显,要在一个模型中反映上述各种特性是不可能的。典型情况是,黄土湿陷与膨胀土湿胀这两种相反的性状很难统一在同一个本构模型中;即使能统一,所得模型也必然非常复杂而失去了实用价值。爱因斯坦认为^[63]: “Things should be made as simple as possible but not a bit simpler than that”, 即对研究对象应尽可能地简化,但也不能过度简化。因而明智的选择就是针对具体土类,抓主要矛盾,建立解决主要问题的数学模型;而不要在枝节问题上耗费精力。黄文熙指出^[12]: “土不是一种各向同性材料,不但应力水平影响它的性能,其受力过程亦即所谓应力路线,也影响它的应力-应变关系。因此,要选择一种数学模型来全面地、正确地反映这些复杂关系的所有特点,是非常困难的。并且即使找到了这种模型,也将因为它太复杂难于在各种土工建筑和地基性能分析研究中去应用。研究方向应该针对特殊的土料、特殊的工程对象和问题的特点、去找简单而能说明最主要问题的数学模型。要做到这一点是非常不容易的。” “最有用的模型是能解决实际问题的最简单的模型”^[12]。黄先生在 40 年多前关于建模的这些意见至今仍有指导意义。

对非饱和填土而言,吸力对其力学特性有重要影响,在建模中应突出吸力的作用。再如,在中国广泛分布的湿陷性黄土和膨胀土,不仅是典型的非饱和土,而且具有很显著的结构特征。湿陷性黄土的结构性主要表现为具有特殊的孔隙结构和胶结,在工程上表现为水敏性和湿陷性;而膨胀土具有湿胀干缩特性和裂隙性,裂隙性是膨胀土的主要结构特征,俗称“裂土”。不言而喻,裂隙对膨胀土的变形和强度的影响远远超过所谓的双孔隙结构的影响。又如,冻土、盐渍土和可燃冰均具有类似的冰晶结构,并非均质。这些结构特征处于细观水平。不同的工作环境下特殊土的结构在受力过程中会发生显著变化(表现为原有结构逐渐损伤以至破坏,并可能形成新的结构),对土的力学性质影响很大,建模型必须考虑其细观结构的演化。

沈珠江强调指出^[64-66], “土体结构性数学模型——21 世纪土力学的核心问题”, “发展新一代的结构性模型是现代土力学的核心问题”, 非饱和土固结理论“必须建立在合理的本构模型的基础上、并用于分析黄土与膨胀土和冻土的变形问题”。因此探讨湿陷性黄土和膨胀土的细观结构在多种应力路径和干湿过程中的演化规律、建立相应的结构性模型(或称为弹塑性损伤模型)是重要研究内容^[21], CT 技术和电镜扫描技术为此提供了有力工具。

顺便指出,损伤力学也是以连续介质力学为基础的,详见文献[67~70]。文献[21]的第 20 章和第 21 章就是以非饱和土力学和连续介质力学的多个分支(如弹塑性力学、损伤力学)为基础,构建了原状湿陷性黄土和原状膨胀土的弹塑性损伤模型。

构建本构模型还应遵循“假设合理、物性鲜明、应用简便”的建模原则,采取“弄清两头、抓大放小、实事求是、有机结合”的建模路线,并以实践(试验和现场检测资料)作为检验模型真伪优劣的唯一标准。有关论述,详见文献[71~73]。

6 结 论

(1) “连续”是一个相对的概念,当外部特征尺寸远大于介质内部特征尺寸时,就可以把研究对象看作连续介质。连续介质力学和多孔介质流体动力学的连续性假设为土力学的连续性假设提供了有益参考,但都有一定的缺陷,不宜照搬照套。

(2) 混合物理论视每一组分为充满整个物理空间的连续介质,不同组分占有共同的物理空间,既可以方便地定义质量密度等变量,又可以避开在定义孔隙率时遇到的困扰,故用混合物理论的观点和方法描述土的连续性是合适的。只需在土力学绪论中增加一段文字即可弥补土力学中缺失连续性假设的不足。

(3) 物质宏观性质的数学模型称为本构关系,把本构关系写成具体的数学表达式就是本构方程。土的本构模型包括持水、渗水、渗气、传热、屈服、变形、强度、细观结构演化、热力学效应、相变规律等多方面的内容,不限于应力-应变关系。

(4) 现有土的各种本构模型均以连续介质力学为基础,总体上属于唯象模型。在研究特殊土(如原状膨胀土、原状黄土)的力学特性和本构模型时,应考虑其细观结构及其损伤演化的影响;在研究膨润土和盐渍土的持水特性、力学特性、热力学特性和本构模型时,应考虑物理-化学作用的影响。影响土的本构模型的因素很多,研究应针对具体土类,抓主要影响因素,建立解决主要问题的数学模型。

关于建模原则和建模路线,可参考文献[71~73]。

参考文献:

- [1] 杜庆华. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1957. (DU Qinghua. Mechanics of Materials[M]. Beijing: Higher Education Press, 1957. (in Chinese))
- [2] 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. (SUN Xunfang, FANG Xiaoshu, GUAN Laitai. Mechanics of Materials[M]. Beijing: People's Education

- Press, 1979. (in Chinese))
- [3] 铁摩辛柯 S, 古地尔 J N. 弹性理论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1964. (TIMOSHENKO S, GOODIER J N. Theory of Elasticity[M]. Beijing: People's Education Press, 1964. (in Chinese))
- [4] 王龙甫. 弹性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1978. (WANG Longfu. Elastic Theory[M]. Beijing: Science Press, 1978. (in Chinese))
- [5] 王 仁, 熊祝华, 黄文彬. 塑性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1998. (WANG Ren, XIONG Zhuhua, HUANG Wenbin. Plastic Mechanics[M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese))
- [6] 成都科学技术大学水力学教研室. 水力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. (Hydraulics Teaching and Research Section of Chengdu University of Science and Technology. Hydraulics[M]. Beijing: People's Education Press, 1979. (in Chinese))
- [7] 吕洪生, 曾新吾. 连续介质力学-中册-流体力学与爆炸力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1999. (LÜ Hongsheng, ZENG Xinwu. Continuum Mechanics[M]. Changsha: NUDT Press, 1999. (in Chinese))
- [8] ЦЫТОВИЧ. 土力学[M]. 北京: 地质出版社, 1954. (ЦЫТОВИЧ. Soil Mechanics[M]. Beijing: Geological Publishing House, 1954. (in Chinese))
- [9] LAMBE T W, WHITMAN R V. Soil Mechanics, SI Version[M]. New York: Wiley, 1979.
- [10] 武汉水利电力学院. 土力学及岩石力学[M]. 北京: 水利电力出版社, 1979. (Wuhan Institute of Water Resources and Electric Power. Soil Mechanics and Rock Mechanics[M]. Beijing: China Water & Power Press, 1979. (in Chinese))
- [11] 吴天行. 土力学[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1982. (WU Tianhang. Soil Mechanics[M]. Chengdu: Chengdu University of Science and Technology Press, 1982. (in Chinese))
- [12] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京: 水利电力出版社, 1983. (HUANG Wenxi. Engineering Properties of Soil[M]. Beijing: China Water & Power Press, 1983. (in Chinese))
- [13] 斯科特. 土力学及地基基础[M]. 北京: 水利电力出版社, 1983. (SCOTT C R. Soil Mechanics and Foundation[M]. Beijing: China Water & Power Press, 1983. (in Chinese))
- [14] 松岗元. 土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001. (MATSUOKA H. Soil Mechanics[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2001. (in Japanese))
- [15] 赵明华. 土力学与基础工程[M]. 3 版. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2009. (ZHAO Minghua. Soil Mechanics and Foundation Engineering[M]. 3rd ed. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2009. (in Chinese))
- [16] 东南大学. 土力学[M]. 2 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005. (Southeast University. Soil Mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005. (in Chinese))
- [17] 赵成刚, 白 冰. 土力学原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009. (ZHAO Chenggang, BAI Bing. Fundamentals of Soil Mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009. (in Chinese))
- [18] 河海大学《土力学》教材编写组. 土力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019. (Compilation Team of the Textbook 《Soil Mechanics》 at Hohai University. Soil Mechanics[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2019. (in Chinese))
- [19] 李广信, 张丙印, 于玉贞. 土力学[M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2022. (LI Guangxin, ZHANG Bingyin, YU Yuzhen. Soil Mechanics[M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2022. (in Chinese))
- [20] 同济大学数学教研室. 高等数学(上册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978. (Editor in chief of the Mathematics Teaching and Research Section of Tongji University. Advanced Mathematics (Volume 1) [M]. Beijing: People's Education Press, 1978.) (in Chinese))
- [21] 陈正汉. 非饱和土与特殊土力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2022. (CHEN Zhenghan. Mechanics for Unsaturated and Special Soils[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2022. (in Chinese))
- [22] 冯元桢. 连续介质力学导论[M]. 北京: 科学出版社, 1984. (FUNG Y C. Introduction to Mechanics of Continuous Media[M]. Beijing: Science Press, 1984. (in Chinese))
- [23] 褚圣麟. 原子物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979. (CHU Shenglin. Atomic Physics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1979. (in Chinese))
- [24] FUNG Y C. A First Course in Continuum Mechanics[M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.
- [25] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978. (The Algebra Group of the Geometry and Algebra Teaching and Research Section of the Department of Mathematical & Mechanics of Peking University. Advanced Algebra[M]. Beijing: People's Education Press, 1978. (in Chinese))
- [26] 贝尔. 多孔介质流体动力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983. (BEAR J. Dynamics of Fluids in Porous Media[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1983. (in Chinese))
- [27] HUBBERT M. Darcy's law and the field equations of the flow of underground fluids[J]. Hydrological Sciences

- Journal-journal Des Sciences Hydrologiques, 1956, 2: 23-59.
- [28] BOWEN R M. Theory of Mixtures[M]. New York: Academic Press, 1976.
- [29] BOWEN R M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures[J]. International Journal of Engineering Science, 1982, 20(6): 697-735.
- [30] BEDFORD A, DRUMHELLER D S. Theories of immiscible and structured mixtures[J]. International Journal of Engineering Science, 1983, 21(8): 863-960.
- [31] 陈正汉, 谢定义, 刘祖典. 非饱和土的固结理论[C]// 岩土力学新分析方法讨论会文集, 上海, 1989: 298 - 305. (CHEN Zhenghan, XIE Dingyi, LIU Zudian. Consolidation theory of unsaturated soil[C]// Proceedings of the Conference of New Analysis Methods of Geotechnical Mechanics Seminar, Shanghai, 1989: 298-305. (in Chinese))
- [32] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论——数学模型、试验研究、边值问题[D]. 西安: 陕西机械学院, 1991. (CHEN Zhenghan. Mixture Theory of Unsaturated Soil Consolidation: Mathematical Models, Experimental Studies and Boundary Value Problems[D]. Xi'an: Shaanxi Institute of Machinery, 1991. (in Chinese))
- [33] 陈正汉, 谢定义, 刘祖典. 非饱和土固结的混合物理论 (I)[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(2): 127-137. (CHEN Zhenghan, XIE Dingyi, LIU Zudian. Consolidation theory of unsaturated soil based on the theory of mixture (I)[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1993, 14(2): 127-137. (in Chinese))
- [34] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论 (II)[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(8): 687-698. (CHEN Zhenghan. Consolidation theory of unsaturated soil based on the theory of mixture (II)[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1993, 14(8): 687-698. (in Chinese))
- [35] 陈正汉. 岩土力学的公理化理论体系[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(10): 901-910. (CHEN Zhenghan. Axiomatic theoretical system of geotechnical mechanics[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1994, 15(10): 901-910. (in Chinese))
- [36] GREEN A E, NAGHDI P M. A dynamical theory of interacting continua[J]. International Journal of Engineering Science, 1965, 3(2): 231-241.
- [37] GREEN A E, NAGHDI P M. On basic equations for mixtures[J]. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1969, 22(4): 427-438.
- [38] 钱伟长. 《现代连续统物理丛书》译序//连续统物理的基本原理[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1985. (CHIEN Weizang. Preface to the Chinese version of 《Continuum Physics》//Basic Principle of Continuum Physics[M]. Nanjing: Jiangsu Science and Technology Press, 1985. (in Chinese))
- [39] TRUESDELL C, NOLL W. The non-linear field theories of mechanics[M]//The Non-Linear Field Theories of Mechanics /Die Nicht-Linearen Feldtheorien der Mechanik. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1965: 1-541.
- [40] ERIGEN A C. Continuum Physics (Vol. I-IV) [M]. New York: Academic Press, 1971.
- [41] ERIGEN A C. Mechanics of Continua[M]. 2nd ed. Malabar: Roberi E Krieger Publishing Company, Inc. 1980.
- [42] 郭仲衡. 非线性弹性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1980. (GUO Zhongheng. Nonlinear Elasticity Theory[M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese))
- [43] 德冈辰雄. 理性连续介质力学入门[M]. 北京: 科学出版社, 1982. (TATSUO Tokuoaka. Introduction to Rational Continuum Mechanics [M]. Beijing: Science Press, 1982. (in Japanese))
- [44] 朱兆祥, 戴天民. 本构关系[M]//中国大百科全书. 北京: 中国大百科全书出版社, 1985. (ZHU Zhaoxiang, DAI Tianmin. Constitutive relationship[M]// Encyclopedia of China. Beijing: China Encyclopedia Publishing House, 1985. (in Chinese))
- [45] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N. Mechanical behavior of an idealized “wet” clay[C]// Proc 2nd European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden, 1963.
- [46] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N, THURAIRAJAH A. Yielding of clays in states wetter than critical[J]. Géotechnique, 1963, 13(3): 211-240.
- [47] ROSCOE K H, BURLAND J B. On the generalized stress-strain behaviour of “wet” clay[M]// Engineering Plasticity. Cambridge University, 1968: 535-608.
- [48] SCHOFIELD A N, WROTH C P. Critical State Soil Mechanics[M]. London: McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1968.
- [49] DUNCAN J M, CHANG C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970, 96(5): 1629-1653.
- [50] 魏汝龙. 正常压密黏土的塑性势[J]. 水利学报, 1964(6): 9-20. (WEI Rulong. The plastic potential of normally consolidated clays[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1964(6): 9-20. (in Chinese))
- [51] 黄文熙. 土的弹塑性应力: 应变模型理论[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1979, 19(1): 1-26. (HUANG Wenxi. Theory of elastoplastic stress-strain models for soils[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 1979, 19(1):

- 1-26. (in Chinese))
- [52] 蒋彭年. 土的本构关系[M]. 北京: 科学出版社, 1982. (JIANG Pengnian. Constitutive Relation of Soil[M]. Beijing: Science Press, 1982. (in Chinese))
- [53] 陈正汉, 谢定义, 王永胜. 非饱和土的水气运动规律及其工程性质研究[J]. 岩土工程学报, 1993, **15**(3): 9-20. (CHEN Zhenghan, XIE Dingyi, WANG Yongsheng. Experimental studies of laws of fluid motion, suction and pore pressures in unsaturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1993, **15**(3): 9-20. (in Chinese))
- [54] 陈正汉. 重塑非饱和黄土的变形、强度、屈服和水量变化特性[J]. 岩土工程学报, 1999, **21**(1): 82-90. (CHEN Zhenghan. Deformation, strength, yield and water change characteristics of remolded unsaturated loess[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, **21**(1): 82-90. (in Chinese))
- [55] ERIGEN A C. 《现代连续统物理丛书》中译本序[M]//混合物理论. 南京: 江苏科学技术出版社, 1983. (ERIGEN A C. Preface to the Chinese version of 《Modern Continuum Physics Series》[M]// Theory of Mixtures .Nanjing: Jiangsu Science and Technology Press, 1983. (in Chinese))
- [56] 杨福家. 原子核物理[M]. 2 版. 上海: 复旦大学出版社, 2002. (YANG Fujia. Nuclear Physics[M]. 2nd ed. Shanghai: Fudan Press, 2002. (in Chinese))
- [57] 谢定义, 姚仰平, 党发宁. 高等土力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008. (XIE Dingyi, YAO Yangping, DANG Faning. Advanced Soil Mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008. (in Chinese))
- [58] MITCHELL J K, SOGA K. Fundamentals of soil behavior[M]. 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2005.
- [59] 谭罗荣, 孔令伟. 特殊岩土工程土质学[M]. 北京: 科学出版社, 2006. (TAN Luorong, KONG Lingwei. Special Geotechnical Engineering Soil Science[M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))
- [60] 赵成刚, 白 冰. 土力学原理[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2017. (ZHAO Chenggang, BAI Bing. Fundamentals of Soil Mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2017. (in Chinese))
- [61] 林家翘, 西格尔 L A. 自然科学中的确定性问题的应用数学[M]. 北京: 科学出版社, 1986. (LIN C C, SIEGEL L A. Applied Mathematics of Deterministic Problems in Natural Science [M]. Beijing: Science Press, 1986. (in Chinese))
- [62] 库特纳 M L. 天文学—物理新视野[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2005. (KUTNER M L. Astronomy: A Physical Perspective[M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2005. (in Chinese))
- [63] BRIAUD J L. Geotechnical Engineering: Unsaturated and Saturated Soils[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2013.
- [64] 沈珠江. 土体结构性的数学模型——21 世纪土力学的核心问题[J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(1): 95-97. (SHEN Zhujiang. Mathematical model of soil structure: the core problem of soil mechanics in the 21st century[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(1): 95-97. (in Chinese))
- [65] 沈珠江. 现代土力学的基本问题[J]. 力学与实践, 1998, **20**(6):1-6. (SHEN Zhujiang. The basic problems of modern soil mechanics [J]. Mechanics and Practice, 1998, **20**(6):1-6. (in Chinese))
- [66] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. (SHEN Zhujiang. Theoretical Soil Mechanics[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2000. (in Chinese))
- [67] KACHANOV L M. Introduction to Continuum Damage Mechanics[M]. The Netherlands: Martinus Nijhoff Publisher, Dordrecht, The Netherlands, 1986.
- [68] JEAN L. A continuous damage mechanics model for ductile fracture[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1985, **107**(1): 83-89.
- [69] CHABOCHE J L. Continuum damage mechanics: present state and future trends[J]. Nuclear Engineering and Design, 1987, **105**(1): 19-33.
- [70] CHABOCHE J L. Continuum damage mechanics[J]. Journal of Applied Mechanics, 1988, **55**: 59-72.
- [71] 陈正汉. 关于土力学理论模型与科研方法的思考[J]. 力学与实践, 2003, **25**(6): 59-62. (CHEN Zhenghan. Thoughts on theoretical model and scientific research method of soil mechanics[J]. Mechanics and Engineering, 2003, **25**(6): 59-62. (in Chinese))
- [72] 陈正汉. 关于土力学理论模型与科研方法的思考(续)[J]. 力学与实践, 2004, **26**(1): 63-67. (CHEN Zhenghan. Thoughts on theoretical model and scientific research method of soil mechanics (continued)[J]. Mechanics and Engineering, 2004, **26**(1): 63-67. (in Chinese))
- [73] 陈正汉. 非饱和土与特殊土力学: 理论创新、科研方法及治学感悟[M]. 北京: 科学出版社, 2021: 193-213. (CHEN Zhenghan. Unsaturated Soil and Special Soil Mechanics: Theoretical Innovation, Scientific Research Methods and Academic Understanding[M]. Beijing: Science Press, 2021: 193-213. (in Chinese))