

DOI: 10.11779/CJGE20230753

# 基于构造滑面正应力分布的岩质边坡三维极限平衡法与应用

卢坤林<sup>1</sup>, 梅一帆<sup>1</sup>, 王林飞<sup>2</sup>, 贾森林<sup>1</sup>, 秦涛<sup>1</sup>, 朱大勇<sup>3</sup>

(1. 合肥工业大学土木与水利学院, 安徽 合肥 230009; 2. 中钢集团马鞍山矿山研究院有限公司金属矿山安全与健康国家重点实验室, 安徽 马鞍山 243000; 3. 浙大宁波理工学院土木建筑工程学院, 浙江 宁波 315100)

**摘要:** 开展岩质边坡三维稳定性分析方法研究具有重要的理论意义和工程应用前景。常规的等效 Mohr-Coulomb 强度参数来分析岩质边坡的稳定性, 不能准确反映岩体材料强度包线呈非线性分布的特征, 计算结果偏于保守。建议了一种逐点等效 Mohr-Coulomb 强度参数替代常规的等效 Mohr-Coulomb 强度参数, 通过构造滑面上的正应力分布, 滑面上各点的等效黏聚力和等效内摩擦角则随着滑面正应力分布而逐点变化。在此基础上, 将逐点等效 Mohr-Coulomb 强度参数方法和基于滑面正应力修正的极限平衡法相结合, 提出了一种基于构造滑面正应力分布的岩质边坡三维稳定性分析方法。算例表明该方法计算结果与已有方法相印证, 适用于任意空间滑面形态。与常规等效 Mohr-Coulomb 强度参数相比, 该方法得到稳定性系数显著偏低。进一步将该方法应用于某露天矿边坡的整体稳定性评价, 效果理想, 并被工程单位所采纳。该方法结果可靠, 计算过程简单且易于编程, 可为岩质边坡工程稳定性评价提供理论参考。

**关键词:** 岩质边坡; 三维稳定性; 极限平衡; 稳定性系数; Hoek-Brown 强度准则; 逐点等效 Mohr-Coulomb 强度

中图分类号: TU457 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2024)11-2265-10

作者简介: 卢坤林(1980—), 男, 安徽庐江人, 副教授, 主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail: lukunlin@hfut.edu.cn。

## Three-dimensional limit equilibrium method for rock slopes by constructing normal stress distribution over sliding surface and its application

LU Kunlin<sup>1</sup>, MEI Yifan<sup>1</sup>, WANG Linfei<sup>2</sup>, JIA Senlin<sup>1</sup>, QIN Tao<sup>1</sup>, ZHU Dayong<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. State Key Laboratory of Safety and Health for Metal Mines, Sinosteel Ma'anshan Institute of Mining Research Co., Ltd., Ma'anshan 243000, China; 3. School of Civil Engineering and Architecture, NingboTech University, Ningbo 315100, China)

**Abstract:** The researches on the three-dimensional stability of rock slopes are of important theoretical significance and engineering application prospect. The conventional equivalent Mohr-Coulomb strength parameters used to analyze the stability of rock slopes cannot accurately reflect the nonlinear distribution of strength envelope of rock mass, resulting in conservative results. A point-by-point equivalent Mohr-Coulomb strength parameter is proposed to replace the conventional equivalent Mohr-Coulomb strength parameters. By constructing the normal stress distribution over the sliding surface, the equivalent cohesion and internal friction angle of the sliding surface change point-by-point with the normal stress distribution over the sliding surface. On this basis, a three-dimensional stability analysis method for rock slopes is proposed by combining the point-by-point equivalent Mohr-Coulomb strength parameter and the limit equilibrium method based on constructing the normal stress distribution over the sliding surface. Some examples show that the proposed method is correct and suitable for any spatial sliding surface shape. Compared with the conventional equivalent Mohr-Coulomb strength parameters, the stability coefficient obtained by the proposed method is lower. The method has successfully applied to a practical project and achieved good results. The results are reliable, and the calculation process is simple and easy to program, which can provide a theoretical reference for the stability evaluation of rock slope engineering.

**Key words:** rock slope; three-dimensional stability; limit equilibrium; stability coefficient; Hoek-Brown criterion; point-by-point equivalent Mohr-Coulomb strength

基金项目: 国家自然科学基金项目(52079121); 安徽省自然科学基金项目(2208085ME149)

收稿日期: 2023-08-07

## 0 引言

中国在公路、铁路、水利及城市建设等多个行业中经常会遇到岩质边坡工程，工程上常采用二维极限平衡法进行岩质边坡的稳定性分析。事实上，岩质边坡失稳呈现显著的三维空间效应，二维极限平衡法已不能满足一些重要工程的精度要求。因此，开展岩质边坡三维极限平衡法的理论研究具有重要的理论意义和工程应用前景。

经典的三维极限平衡法是基于二维条分法的拓展，陈祖煜<sup>[1]</sup>对早期研究代表性成果做了总结，相关研究奠定了三维极限平衡法的理论基础。朱大勇等<sup>[2-3]</sup>建立了基于滑面正应力修正的三维极限平衡法；Zheng<sup>[4]</sup>将三维极限平衡法归结为代数特征值问题，解决了安全系数的不收敛问题；近年来，Zhou 等<sup>[5]</sup>提出了考虑条间力和基于位移的严格极限平衡法；邓东平等<sup>[6]</sup>提出了三维边坡稳定性分析的非严格法和严格法；高玉峰等<sup>[7]</sup>建立了基于一个方向力（力矩）平衡的三维非对称边坡稳定性分析方法；卢坤林等<sup>[8]</sup>建立了适用任意形态滑面的三维极限平衡法。上述研究成果都是基于 Mohr-Coulomb（简称 M-C）强度准则，适用于土质边坡。

朱合华等<sup>[9]</sup>认为 M-C 强度准则不能完全反映岩石力学特性。对于岩质边坡稳定性研究应选用 Hoek-Brown（简称 H-B）强度准则。孙超伟等<sup>[10]</sup>采用 H-B 强度折减法，编制了一套岩质边坡安全系数的稳定性图表；林杭等<sup>[11]</sup>实现了 H-B 强度折减法的三维岩质边坡稳定性分析方法；Deng 等<sup>[12]</sup>采用非线性 H-B 强度准则的泰勒级数线性展开式实现了岩质边坡安全系数的计算；Kumar 等<sup>[13]</sup>将 H-B 破坏准则与等效的 M-C 强度参数相结合，采用 PSO 分析岩质边坡的稳定性；Yang 等<sup>[14]</sup>基于 H-B 强度准则与极限分析上限法，实现了动力和静力荷载下两级三维岩质边坡稳定性分析方法；Michałowski 等<sup>[15]</sup>基于 H-B 强度准则，采用极限分析运动学方法对弧形滑动的岩质边坡进行稳定性评估。

基于 M-C 强度准则的土质边坡三维极限平衡法已有了长足的进展，但基于 H-B 强度准则的岩质边坡三维极限平衡法的研究尚不够充分。鉴于此，本文将 H-B 强度准则与构造滑面正应力分布的极限平衡法<sup>[8]</sup>相结合，合理构造滑面正应力分布函数，建立满足三个力平衡和一个绕垂直滑动方向的力矩平衡的岩质边坡三维极限平衡法。

## 1 滑面正应力的构造

恰当合理地构造滑面正应力分布模式是边坡三维

稳定性分析正确解答的前提。朱大勇等<sup>[2-3]</sup>假设了滑面正应力分布合理形式。卢坤林等<sup>[8]</sup>研究表明，边坡稳定性系数对合理构造的滑面正应力分布不敏感，建议构造的滑面正应力分布函数（坐标原点选在滑体中心）：

$$\sigma = \sigma_0(1 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot y) \quad . \quad (1)$$

式中： $\lambda_1$ ， $\lambda_2$ ， $\lambda_3$  为待定参数； $\sigma_0$  为初始滑面正应力，采用 Hovland<sup>[16]</sup>的瑞典法 3D 扩展的滑面正应力。

合理构造的滑面正应力必须满足：①滑面正应力非负，滑面正应力连续光滑且单值；②初始滑面正应力  $\sigma_0$  为滑面正应力构造的核心。

## 2 逐点等效 M-C 强度参数

### 2.1 H-B 强度准则

H-B 强度准则是 Hoek 等通过对大量岩石三轴试验资料和岩体现场试验成果的统计分析，并综合考虑了岩体结构、岩块强度、应力状态等多方面的影响，而得出的岩体破坏经验公式。在岩质边坡稳定性分析中，通常需要将强度准则表达成法向应力和切应力的关系，为此 Hoek 等<sup>[17]</sup>建立的表达式为

$$\tau_f = A\sigma_c \left( \frac{\sigma - \sigma_{tm}}{\sigma_c} \right)^B \quad . \quad (2)$$

式中： $A$ ， $B$  均为与岩体材料相关的拟合参数，通过对三轴应力点拟合确定<sup>[18]</sup>； $\sigma_c$  为岩石单轴抗压强度； $\sigma$  为滑面的法向应力； $\sigma_{tm}$  为节理岩体的抗拉强度。

### 2.2 逐点等效 M-C 强度参数

如图 1 所示，选取 H-B 强度包络线上的任意一点  $(\sigma_i, \tau_i)$  做该点切线，其斜率的反正切值即为该点的  $\varphi_i$  值，其与  $y$  轴的截距即为该点的  $c_i$  值。拓展到整条曲线，各点的  $\varphi$  值和  $c$  值可表示为

$$\varphi = \arctan \left[ AB \left( \frac{\sigma - \sigma_{tm}}{\sigma_c} \right)^{B-1} \right] \quad , \quad (3)$$

$$c = A\sigma_c \left( \frac{\sigma - \sigma_{tm}}{\sigma_c} \right)^B - \sigma \tan \varphi \quad . \quad (4)$$

式中： $\varphi$  为逐点等效内摩擦角； $c$  为逐点等效黏聚力，均为滑面正应力  $\sigma$  的函数，并与坐标位置密切关联。由于正应力  $\sigma$  的分布未知，逐点等效内摩擦角  $\varphi$  和逐点等效黏聚力  $c$  的值也不能直接获取。

引入构造滑面正应力的分布（式（1）），得到逐点等效内摩擦角  $\varphi$  和逐点等效黏聚力  $c$  的表达式为

$$\varphi = \arctan \left[ AB \left( \frac{\sigma_0(1 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot y) - \sigma_{tm}}{\sigma_c} \right)^{B-1} \right], \quad (5)$$

$$c = A\sigma_c \left( \frac{\sigma_0(1 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot y) - \sigma_{tm}}{\sigma_c} \right)^B -$$

$$\sigma_0(1 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot y) \tan \varphi \quad . \quad (6)$$

由式(5), (6)能够获得整个滑面上每个点的等效等效内摩擦角  $\varphi$  和等效黏聚力  $c$ , 在空间上分布不恒定, 这与采用 Hoek 等<sup>[19]</sup>提出的常规等效 M-C 参数为固定值有着显著的区别。

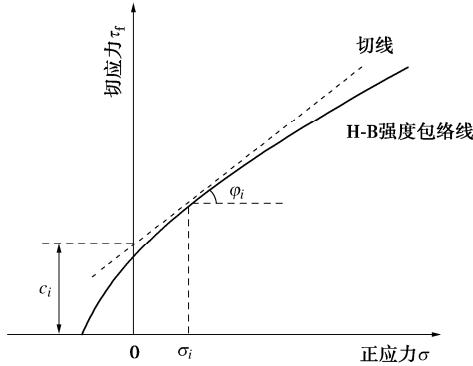


图 1 H-B 逐点等效 M-C 等效方式示意

Fig. 1 Schematic of H-B strength parameters by point-by-point equivalent M-C strength parameter

### 3 岩质边坡三维极限平衡法

#### 3.1 基本假定

(1) 滑动方向与  $oxz$  面平行, 即滑面剪应力与滑动方向平行。

(2) 图 2(a) 所示的边坡与三维滑面, 坡面方程  $z=g$ , 滑面方程为  $z=S$ ,  $S_x$  和  $S_y$  为滑面  $S$  沿  $x$ ,  $y$  轴的斜率。

(3) 图 2(b) 为典型条柱, 作用其上的重力  $W=w\Delta dx dy$ ,  $w$  为滑体单位面积上的条柱重量, 岩体重度为  $\gamma$ ,  $w=\gamma \cdot (g-S)$ 。条块底面法向力  $N=\sigma \Delta dx dy$  和切向力  $T=\tau \Delta dx dy$ , 其中  $\Delta=\sqrt{1+S_x^2+S_y^2}$ 。滑面正应力分布采用式(1), 其中  $\sigma_0=w/(1+S_x^2+S_y^2)$ , 为条柱体积力对滑面正应力的贡献分量, 也就是采用 Hovland<sup>[16]</sup>的瑞典法 3D 扩展的滑面正应力。

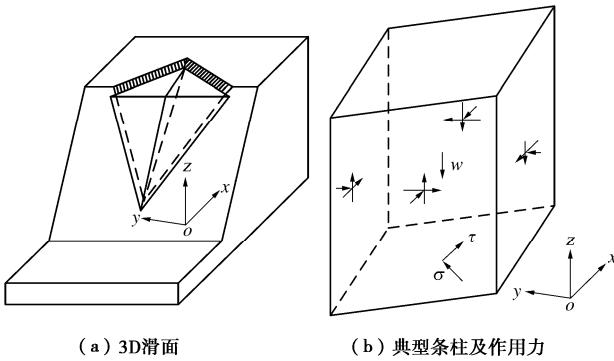


图 2 3D 滑面及条柱受力

Fig. 2 3D slip surface and forces acting on a column

#### 3.2 平衡方程

考虑整个滑体的 3 个方向的力平衡和绕垂直方向

( $y$  轴) 的力矩平衡, 忽略另两个力矩平衡条件可得:

$$\iint \sigma \cdot n_\sigma^y \cdot \Delta dx dy = 0 \quad , \quad (7a)$$

$$\iint (\sigma \cdot n_\sigma^x + \tau \cdot n_\tau^x) \cdot \Delta dx dy = 0 \quad , \quad (7b)$$

$$\iint (\sigma \cdot n_\sigma^z + \tau \cdot n_\tau^z) \cdot \Delta dx dy - W = 0 \quad , \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} & \iint (\sigma \cdot n_\sigma^z + \tau \cdot n_\tau^z) \cdot x \cdot \Delta dx dy - \\ & \iint (\sigma \cdot n_\sigma^x + \tau \cdot n_\tau^x) \cdot S \cdot \Delta dx dy = M \quad . \end{aligned} \quad (7d)$$

$$\text{式中: } W = \iint w \cdot \Delta dx dy ; \quad M = \iint w \cdot x \cdot \Delta dx dy ; \quad n_\sigma^x = -\frac{S_x}{\Delta} ;$$

$$\begin{aligned} n_\sigma^y &= -\frac{S_y}{\Delta} ; \quad n_\sigma^z = \frac{1}{\Delta} ; \quad n_\tau^x = \frac{1}{\Delta'} ; \quad n_\tau^y = 0 ; \quad n_\tau^z = \frac{S_x}{\Delta'} ; \\ \Delta' &= \sqrt{1+S_x^2} . \end{aligned}$$

根据 H-B 准则 (式(2)) 有:

$$\tau = \frac{\tau_f}{F_s} = \frac{A \sigma_c \left( \frac{\sigma - \sigma_{tm}}{\sigma_c} \right)^B}{F_s} \quad . \quad (8)$$

由式(8)表示的  $\tau$  在代入式(7a)~(7d)后, 由于其指数  $B$  的取值为小于 1 的非整数, 使得与  $\tau$  相关的未知量无法提出而全部堆叠在方程组右侧。经多次演算发现, 在后续迭代过程中均出现了难以收敛的问题。Deng 等<sup>[12]</sup>也指出在计算过程中由于要嵌套多个公式使得迭代过程变得困难。故采用逐点等效 M-C 强度参数 (式(5), (6)):

$$\tau = \frac{c + \sigma \tan \varphi}{F_s} \quad . \quad (9)$$

式中:  $c$ ,  $\varphi$  为逐点等效黏聚力和逐点等效内摩擦角, 是滑面正应力的变量, 随滑面位置和滑面正应力逐点变化, 并非是固定值。

将式(9)代入式(7a)~(7d), 进一步整理得:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \iint (-S_y) \sigma_0 dx dy + \lambda_2 \iint (-S_y) \sigma_0 x dx dy + \\ \lambda_3 \iint (-S_y) \sigma_0 y dx dy = \iint S_y \sigma_0 dx dy \quad , \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \iint \left( -S_x + \frac{\Delta \tan \varphi}{\Delta' F_s} \right) \sigma_0 dx dy + \lambda_2 \iint \left( -S_x + \frac{\Delta \tan \varphi}{\Delta' F_s} \right) \sigma_0 x dx dy + \\ \lambda_3 \iint \left( -S_x + \frac{\Delta \tan \varphi}{\Delta' F_s} \right) \sigma_0 y dx dy = - \iint c \cdot \frac{\Delta}{\Delta' F_s} dx dy - \\ \iint \left( -S_x + \frac{\Delta \tan \varphi}{\Delta' F_s} \right) \sigma_0 dx dy \quad , \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \iint \left( 1 + S_x \frac{\Delta \tan \varphi}{\Delta' F_s} \right) \sigma_0 dx dy + \lambda_2 \iint \left( 1 + S_x \frac{\Delta \tan \varphi}{\Delta' F_s} \right) \sigma_0 x dx dy + \\ \lambda_3 \iint \left( 1 + S_x \frac{\Delta \tan \varphi}{\Delta' F_s} \right) \sigma_0 y dx dy = W - \iint c \cdot S_x \frac{\Delta}{\Delta' F_s} dx dy - \\ \iint \left( 1 + S_x \frac{\Delta \tan \varphi}{\Delta' F_s} \right) \sigma_0 dx dy \quad , \end{aligned} \quad (10c)$$

$$F_s = \left[ \iint \sigma_0 (1 + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y) \cdot (S_x \cdot x - S) \frac{A}{A'} \tan \varphi dxdy + \iint c \cdot (S_x \cdot x - S) \frac{A}{A'} dxdy \right] / \left[ M - \iint \sigma_0 (1 + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y) \cdot (x + S_x \cdot S) dxdy \right] . \quad (10d)$$

将式(10a)~(10d)简记为

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 = D_4 , \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 (F_s A_{11} + A'_{11}) + \lambda_2 (F_s A_{12} + A'_{12}) + \lambda_3 (F_s A_{13} + A'_{13}) \\ = F_s A_{14} + A'_{14} , \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 (F_s A_{21} + A'_{21}) + \lambda_2 (F_s A_{22} + A'_{22}) + \lambda_3 (F_s A_{23} + A'_{23}) \\ = F_s A_{24} + A'_{24} , \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 (F_s A_{31} + A'_{31}) + \lambda_2 (F_s A_{32} + A'_{32}) + \lambda_3 (F_s A_{33} + A'_{33}) \\ = F_s A_{34} + A'_{34} . \end{aligned} \quad (11d)$$

式(11a)~(11d)中的简写符号的表达式见表1。

### 3.3 稳定性系数迭代求解

求解稳定性系数步骤如下:

(1) 假定初始的  $\lambda_1^{(0)}$ ,  $\lambda_2^{(0)}$ ,  $\lambda_3^{(0)}$ , 代入式(1)得到初始滑面正应力函数。

(2) 将式(1)的滑面正应力函数代入式(5)、(6)得到逐点等效黏聚力和逐点等效内摩擦角的初始表达式, 再将其代入式(11a)~(11d)。由克拉默法则通过式(11b)~(11d)解得:

表1 符号对应具体表达式  
Table 1 Symbols corresponding to specific expressions

简写符号	表达式	简写符号	表达式	简写符号	表达式
$D_1$	$\iint -S_y \sigma_0 dxdy$	$A_{14}$	$\iint S_x \sigma_0 dxdy$	$A_{31}$	$\iint \sigma_0 (x + S \cdot S_x) dxdy$
$D_2$	$\iint -S_y \sigma_0 x dxdy$	$A'_{14}$	$\iint -(c + \sigma_0 \tan \varphi) \frac{A}{A'} dxdy$	$A'_{31}$	$\iint (x S_x - S) \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 dxdy$
$D_3$	$\iint -S_y \sigma_0 y dxdy$	$A_{21}$	$\iint \sigma_0 dxdy$	$A_{32}$	$\iint \sigma_0 (x + S \cdot S_x) x dxdy$
$D_4$	$\iint S_y \sigma_0 dxdy$	$A'_{21}$	$\iint S_x \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 dxdy$	$A'_{32}$	$\iint (x S_x - S) \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 x dxdy$
$A_{11}$	$\iint -S_x \sigma_0 dxdy$	$A_{22}$	$\iint \sigma_0 x dxdy$	$A_{33}$	$\iint \sigma_0 (x + S \cdot S_x) y dxdy$
$A'_{11}$	$\iint \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 dxdy$	$A'_{22}$	$\iint S_x \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 x dxdy$	$A'_{33}$	$\iint (x S_x - S) \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 y dxdy$
$A_{12}$	$\iint -S_x \sigma_0 x dxdy$	$A_{23}$	$\iint \sigma_0 y dxdy$	$A_{34}$	$M - \iint \sigma_0 (x + S \cdot S_x) dxdy$
$A'_{12}$	$\iint \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 x dxdy$	$A'_{23}$	$\iint S_x \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 y dxdy$	$A'_{34}$	$\iint -(c + \sigma_0 \tan \varphi) (x S_x - S) \frac{A}{A'} dxdy$
$A_{13}$	$\iint -S_x \sigma_0 y dxdy$	$A_{24}$	$W - \iint \sigma_0 dxdy$		
$A'_{13}$	$\iint \frac{A}{A'} \tan \varphi \sigma_0 y dxdy$	$A'_{24}$	$\iint -(c + \sigma_0 \tan \varphi) S_x \frac{A}{A'} dxdy$		

式中:

$$\lambda_i^{(1)} = \frac{A_i^{(0)}}{A_0^{(0)}} \quad (i=1, 2, 3) . \quad (12)$$

$$A_0^{(0)} = \begin{vmatrix} F_s A_{11} + A'_{11} & F_s A_{12} + A'_{12} & F_s A_{13} + A'_{13} \\ F_s A_{21} + A'_{21} & F_s A_{22} + A'_{22} & F_s A_{23} + A'_{23} \\ F_s A_{31} + A'_{31} & F_s A_{32} + A'_{32} & F_s A_{33} + A'_{33} \end{vmatrix} , \quad (13a)$$

$$A_1^{(0)} = \begin{vmatrix} F_s A_{11} + A'_{14} & F_s A_{12} + A'_{12} & F_s A_{13} + A'_{13} \\ F_s A_{21} + A'_{24} & F_s A_{22} + A'_{22} & F_s A_{23} + A'_{23} \\ F_s A_{31} + A'_{34} & F_s A_{32} + A'_{32} & F_s A_{33} + A'_{33} \end{vmatrix} , \quad (13b)$$

$$A_2^{(0)} = \begin{vmatrix} F_s A_{11} + A'_{11} & F_s A_{12} + A'_{14} & F_s A_{13} + A'_{13} \\ F_s A_{21} + A'_{21} & F_s A_{22} + A'_{24} & F_s A_{23} + A'_{23} \\ F_s A_{31} + A'_{31} & F_s A_{32} + A'_{34} & F_s A_{33} + A'_{33} \end{vmatrix} , \quad (13c)$$

$$A_3^{(0)} = \begin{vmatrix} F_s A_{11} + A'_{11} & F_s A_{12} + A'_{12} & F_s A_{13} + A'_{14} \\ F_s A_{21} + A'_{21} & F_s A_{22} + A'_{22} & F_s A_{23} + A'_{24} \\ F_s A_{31} + A'_{31} & F_s A_{32} + A'_{32} & F_s A_{33} + A'_{34} \end{vmatrix} . \quad (13d)$$

将式(12)代入式(11a), 经整理可得关于稳定性系数的一元三次方程:

$$t_3 F_s^3 + t_2 F_s^2 + t_1 F_s + t_0 = 0 . \quad (14)$$

式中:  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  为系数, 已知。其具体表达式可参考文献[3], 其中简写表达式不同处已在表1中给出。求解式(14)的最大实根<sup>[3]</sup>为稳定性系数  $F_s^{(1)}$ , 将其

代入式(12)即可获得迭代后的 $\lambda_1^{(1)}$ ,  $\lambda_2^{(1)}$ ,  $\lambda_3^{(1)}$ 。

(3) 将 $\lambda_1^{(1)}$ ,  $\lambda_2^{(1)}$ ,  $\lambda_3^{(1)}$ 代回式(1), 得到迭代后的滑面正应力分布函数, 并重复(2)的步骤可得稳定性系数 $F_s^{(2)}$ ,  $\lambda_1^{(2)}$ ,  $\lambda_2^{(2)}$ ,  $\lambda_3^{(2)}$ 。

(4) 比较 $F_s^{(1)}$ 和 $F_s^{(2)}$ ,  $\lambda_1^{(1)}$ 和 $\lambda_1^{(2)}$ ,  $\lambda_2^{(1)}$ 和 $\lambda_2^{(2)}$ ,  $\lambda_3^{(1)}$ 和 $\lambda_3^{(2)}$ , 若二者间的差值均满足精度要求( $\varepsilon=0.001$ ), 则 $F_s=(F_s^{(1)}+F_s^{(2)})/2$ , 否则令 $\lambda_1^{(1)}=\lambda_1^{(2)}$ ,  $\lambda_2^{(1)}=\lambda_2^{(2)}$ ,  $\lambda_3^{(1)}=\lambda_3^{(2)}$ , 重复步骤(2), 直至前次和本次稳定性系数与待定参数的差值满足精度要求( $\varepsilon=0.001$ )。

具体计算流程如图3所示。

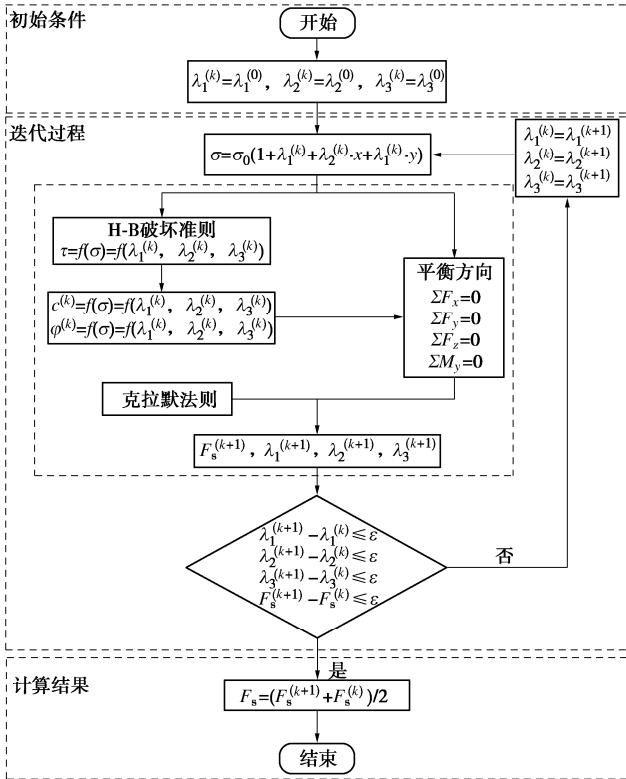


图3 稳定性系数计算流程图

Fig. 3 Flow chart of calculation of stability coefficient

## 4 算例验证

### 4.1 算例1

如图4所示, 算例1的岩质边坡来自文献[20], 破坏形式为楔体破坏。

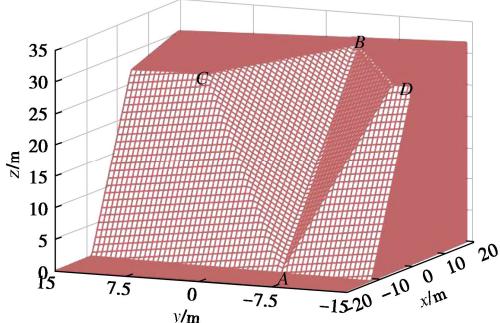


图4 算例1计算模型

Fig. 4 Computational model for example 1

采用直角坐标表示的三维滑面数学方程为

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{349.36}{312.23}x + \frac{303.69}{312.23}y + \frac{4706.4}{312.23}, \\ S_{ABD} &= \frac{246.62}{205.65}x - \frac{365.62}{205.65}y + \frac{422.3}{205.65}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

岩体强度参数如表2所示,  $m_b$ ,  $s$ ,  $a$ 均为反映岩体质量和岩体类型的常数, 具体的表达式见文献[19]。

表2 岩体参数

Table 2 Material parameters of rock mass

参数	滑面ABC	滑面ABD
重度 $\gamma/(kN \cdot m^{-3})$	25.0	25.0
单轴抗压强度 $\sigma_{ci}/MPa$	0.818	0.682
完整岩石材料参数 $m_i$	20	15
地质强度指标 GSI	100	75
扰动因子 $D$	0	0
$m_b$	20	6.142
$s$	1	$6.22 \times 10^{-2}$
$a$	0.5	0.501

根据Hoek[19]方法计算滑面ABC、滑面ABD的岩体抗拉强度 $\sigma_{tm}$ 分别为40.82, 6.89 kPa。依据陈祖煜等[18]的数据拟合方法计算滑面ABC、滑面ABD的参数A分别为1.1719, 0.8208; 参数B分别为0.7151, 0.7098。采用本文方法计算相应的稳定性系数, 并与其他学者成果相比较, 结果列于表3中。

表3 算例1稳定性系数计算结果

Table 3 Calculated results of stability coefficient of example 1

计算方法	计算结果	误差/%
逐点等效 M-C(本文方法)	3.562	
广义 H-B (Deng <sup>[20]</sup> )	3.593	0.86
等效 M-C (Deng <sup>[20]</sup> )	4.657	23.51

由表3可知, 采用本文计算方法得到的稳定性系数为3.562与广义H-B(Deng<sup>[20]</sup>)的结果基本一致, 误差为0.86%, 验证了本文方法的正确性与合理性。

### 4.2 算例2

如图5所示, 有一高度为30 m, 坡比为1.5的岩质边坡, 岩体的强度参数如表4所示。

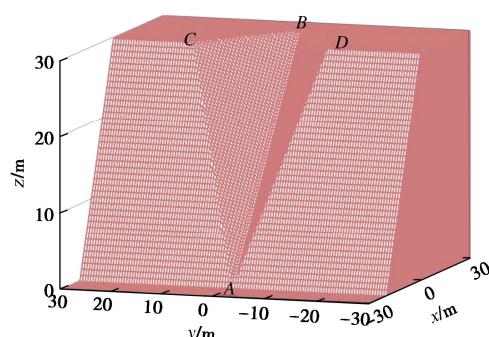


图5 算例2计算模型

Fig. 5 Computational model for example 2

三维滑裂面的形态已知, 采用直角坐标表示的三

维滑面数学方程为

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{3}{4}x + \frac{15}{14}y + 15, \\ S_{ABD} &= \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}y + 15. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

表 4 岩体参数及 H-B 计算参数

Table 4 Parameters of rock mass and Hoek-Brown criterion

参数	取值
重度 $\gamma /(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	25.0
单轴抗压强度 $\sigma_c/\text{MPa}$	0.4
完整岩石材料参数 $m_i$	8
地质强度指标 GSI	60
扰动因子 $D$	0
$m_b$	1.917
$s$	$1.17 \times 10^{-2}$
$a$	0.503
$\sigma_{tm}/\text{kPa}$	2.44
$A$	0.5630
$B$	0.6933

根据 Hoek 等<sup>[19]</sup>方法得到常规等效 M-C 强度准则的黏聚力  $c=54.77 \text{ kPa}$  和内摩擦角  $\varphi=20.23^\circ$ 。分别采用逐点等效 M-C 和常规等效 M-C 计算该边坡的稳定性系数, 结果列于表 5。

表 5 算例 2 稳定性系数计算结果

Table 5 Calculated results of stability coefficient of example 2

计算方法	计算结果	误差/%
逐点等效 M-C(本文方法)	1.614	
常规等效 M-C(卢坤林等 <sup>[8]</sup> )	1.913	15.63
常规等效 M-C (三维楔形体法)	1.921	15.98

由表 5 可知, 本文方法得到的稳定性系数为 1.614, 低于三维楔形体法计算的稳定性系数 1.921, 偏低达 15.98%; 低于卢坤林等<sup>[8]</sup>的 1.913, 偏低 15.63%。这是由于本文方法采用逐点等效 M-C 的强度参数, 而三维楔形体法和卢坤林等<sup>[8]</sup>采用常规等效 M-C 的强度参数。这与 Deng 等<sup>[20]</sup>所得到的结论较为一致。

图 6 为算例 2 的计算迭代过程, 收敛速度快且收敛效果理想。图 7~9 展示了收敛后的构造滑面正应力、逐点等效黏聚力和逐点等效内摩擦角的空间分布。

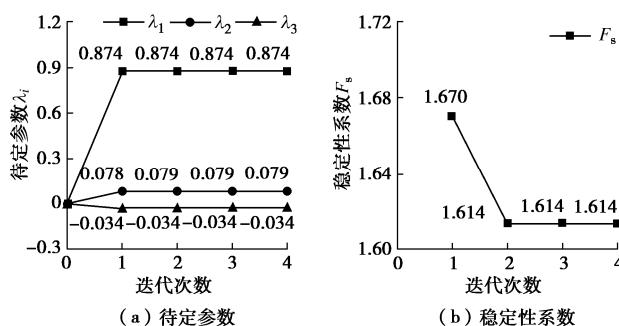


图 6 迭代过程图

Fig. 6 Diagram of iterative process

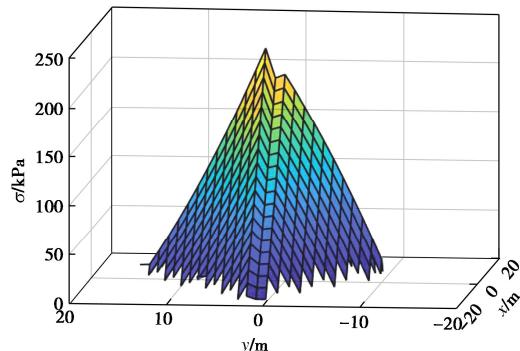


图 7 构造滑面正应力分布

Fig. 7 Distribution of constructed normal stress of sliding surface

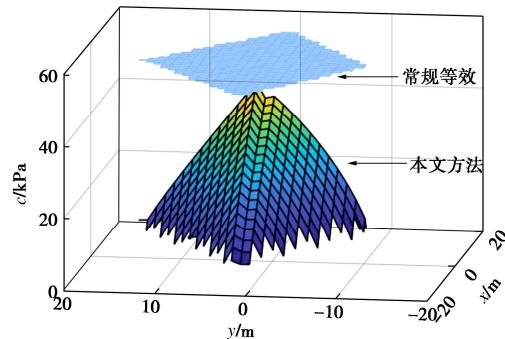


图 8 逐点等效黏聚力分布

Fig. 8 Distribution of point-by-point equivalent cohesion

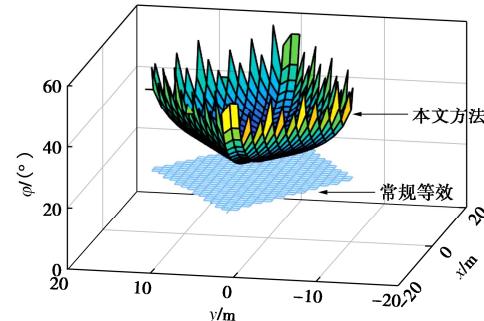


图 9 逐点等效内摩擦角分布

Fig. 9 Distribution of point-by-point equivalent internal friction angle

#### 4.3 算例 3

如图 10 所示, 岩质边坡高度为 15 m, 坡比为 0.5。岩体的强度参数同算例 2。

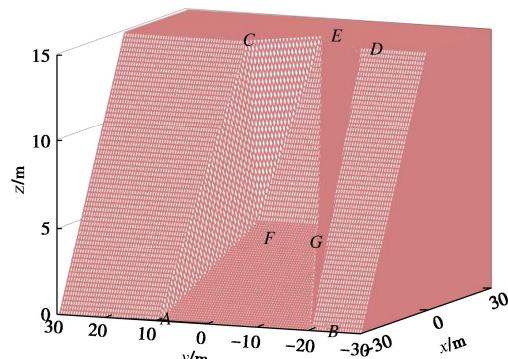


图 10 算例 3 计算模型

Fig. 10 Computational model for example 3

三维滑裂面可采用直角坐标表示为

$$\left. \begin{array}{l} S_{ABFG} = \frac{5}{22}x + \frac{75}{11}, \\ S_{ACF} = \frac{25}{38}x - \frac{18}{19}y + \frac{195}{19}, \\ S_{CEF} = \frac{10}{13}x + \frac{10}{13}y + \frac{145}{13}, \\ S_{EFG} = \frac{5}{9}x + \frac{85}{9}, \\ S_{DEG} = \frac{60}{73}x - \frac{50}{73}y + \frac{245}{73}, \\ S_{BDG} = \frac{35}{58}x - \frac{30}{29}y - \frac{75}{29}. \end{array} \right\} \quad (17)$$

根据 Hoek 等<sup>[19]</sup>方法得到常规等效 M-C 强度的黏聚力  $c=37.21\text{kPa}$ 、内摩擦角  $\varphi=24.78^\circ$ 。采用本文方法计算的稳定性系数为 2.547，常规等效 M-C 的三维极限平衡法为 2.922，本文方法偏低 12.83%，计算结果列于表 6。

表 6 算例 3 稳定性系数计算结果

Table 6 Calculated results of stability coefficient of example 3

计算方法	计算结果	误差/%
逐点等效 M-C(本文方法)	2.547	
常规等效 M-C (朱大勇等 <sup>[3]</sup> )	2.922	12.83

结合表 5、6 可知，与常规等效 M-C 强度参数相比，采用逐点等效 M-C 强度参数进行岩质边坡三维稳定性分析会显著偏低一些。

#### 4.4 算例 4

如图 11 所示，岩质边坡高 20 m，坡比为 1，岩体强度参数如表 7 所示，滑面为椭球状，采用直角坐标表示的三维滑面数学方程为

$$\frac{(x+6.9881)^2}{35^2} + \frac{y^2}{(35 * n)^2} + \frac{(z-34.2953)^2}{35^2} = 1。 \quad (18)$$

式中： $n$  为该滑体  $y$  轴轴长与  $x$  轴轴长的比值，通过  $n$  的变化，可以表征不同形态的椭球状滑面。

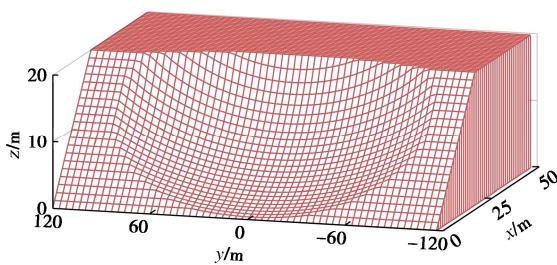


图 11 算例 4 计算模型 ( $n=5$ )

Fig. 11 Computational model for example 4( $n=5$ )

根据 Hoek 等<sup>[19]</sup>方法得到常规等效 M-C 强度准则的黏聚力  $c=46.25\text{kPa}$  和内摩擦角  $\varphi=19.78^\circ$ 。分别采用逐点等效 M-C 和常规等效 M-C 计算该边坡的稳定

性系数，结果列于表 8。

表 7 岩体参数

Table 7 Material parameters of rock mass

参数	取值
重度 $\gamma/(kN \cdot m^{-3})$	23.0
单轴抗压强度 $\sigma_{ci}/MPa$	0.081
完整岩石材料参数 $m_i$	15
地质强度指标 GSI	70
扰动因子 $D$	0
$m_b$	5.138
$s$	$3.57 \times 10^{-2}$
$a$	0.501
$\sigma_{tm}/kPa$	0.842
$A$	0.7771
$B$	0.7101

表 8 算例 4 稳定性系数计算结果

Table 8 Calculated results of stability coefficient of example 4

$n$	逐点等效 M-C(本文) M-C	常规等效 M-C (朱大勇等 <sup>[3]</sup> )	二维 (Li 等 <sup>[21]</sup> )	误差/ %
1	1.100	1.210		9.15
2	1.079	1.179		8.46
5	1.073	1.170		8.27
10	1.072	1.168		8.23
20	1.072	1.168		8.22
$\infty$			1.002	

由表 8 可知，本文方法得到的稳定性系数低于常规等效 M-C 所得到的稳定性系数，偏低 8%左右；在滑面趋近于二维形态时，本文方法计算得到的稳定性系数更接近二维稳定性系数<sup>[21]</sup>，再次验证了本文方法的合理性。

## 5 讨 论

### 5.1 逐点等效 M-C 与常规等效 M-C 的参数差异

逐点等效 M-C 强度参数是滑面正应力的变量，常规等效 M-C 强度参数为固定值。从算例 2 和算例 3 可看出，本文方法得到的等效黏聚力明显低于常规等效的黏聚力，平均值分别偏低 56.9%，46.6%；而本文方法得到的等效内摩擦角明显高于常规等效的内摩擦角，平均值分别偏高 75.1%，52.8%。

由于逐点等效 M-C 强度参数与常规等效 M-C 强度参数有较大的差异，当采用同一个三维稳定性分析方法计算稳定性系数时，本文方法所得稳定性系数显著偏低。

### 5.2 滑面正应力分布对稳定性系数的影响

滑面正应力  $\sigma$  的分布对逐点等效 M-C 强度参数有着直接的影响，进而影响到稳定性系数的大小。为探究这一影响幅度，借鉴刘华丽等<sup>[22]</sup>的研究思路，在式（1）的基础上引入变量  $k$ ，此时的正应力表达式为

$$\sigma = \sigma_0(1 + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot y + k \cdot xy)。 \quad (19)$$

以算例 2 为例，参数  $k$  的取值需保证滑面正应力处处为正，经试算  $k$  的取值范围为  $-0.03 \sim 0.03$ 。 $k$  在

不同取值下相对应的稳定性系数如图 12, 由图 12 可看出滑面正应力分布的不同对边坡稳定性系数的影响不显著, 最大差别仅为 1.80%。

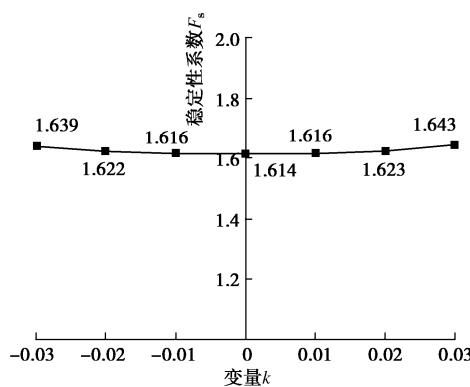


图 12 不同正应力分布对应的稳定性系数

Fig. 12 Stability coefficient corresponding to different normal stress distributions

## 6 工程实例

### 6.1 工程概况

如图 13 所示, 该工程为一矿区边坡, 中部冲沟处为不稳定坡体。不稳定坡体后缘以后缘共轭光滑节理面为界, 不稳定坡体左右两侧主要以出露的碎裂状凝灰岩结构为界; 前缘主要根据地形陡缓交界及开挖的矿坑边坡综合推断确定。不稳定坡体纵长约 190 m, 最大横宽约 55 m, 平面面积约  $1.7 \times 10^4 \text{ m}^2$ , 根据不稳定坡体前、中部探槽揭示, 滑体厚度 5.5~30.5 m, 平均厚度约 18.8 m, 总体积约  $1.9 \times 10^5 \text{ m}^3$ 。

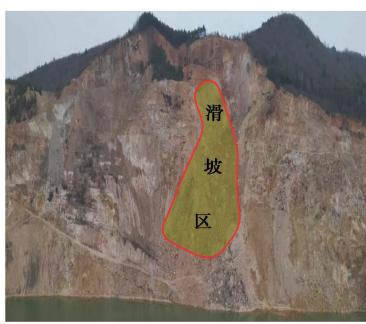
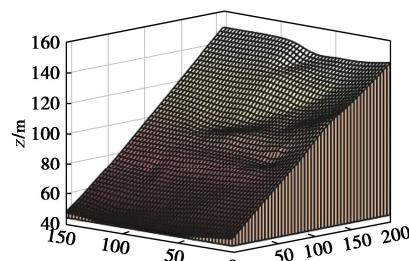


图 13 不稳定坡体区域全貌

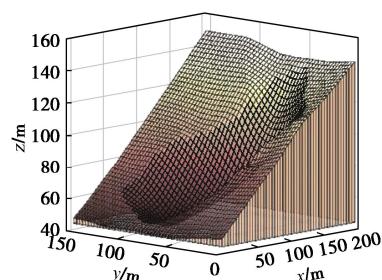
Fig. 13 Overall view of slope

### 6.2 计算模型

根据现场实测数据, 建立三维边坡计算模型如图 14 所示, 图 14 (a) 为三维边坡形态, 图 14 (b) 为潜在三维滑面的形态。由于三维滑面的空间分布不规律, 难以准确地采用数学方程来表示, 通过 Matlab 读取三维滑面模型来获取滑面上各点的坐标, 采用坐标矩阵代替数学方程来获取三维滑面。



(a) 三维边坡



(b) 三维滑面

图 14 三维边坡计算模型

Fig. 14 Computational model for three-dimensional slope

岩体的强度参数如表 9 所示。

表 9 岩体参数

Table 9 Material parameters of rock mass

参数	取值
重度 $\gamma /(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	28.0
单轴抗压强度 $\sigma_{ci}/\text{MPa}$	10
完整岩石材料参数 $m_i$	6
地质强度指标 GSI	26
扰动因子 $D$	0.8
$m_b$	0.0733
$s$	$1.4 \times 10^{-5}$
$a$	0.529

根据 Hoek 等<sup>[19]</sup>方法计算得岩体抗拉强度  $\sigma_{tm}=1.842 \text{ kPa}$ 。采用陈祖煜等<sup>[18]</sup>的数据拟合方法计算参数  $A, B$  得出  $A=0.1406, B=0.6734$ 。

### 6.3 计算结果

采用本文方法对该不稳定坡体进行稳定性分析, 并与其他三维极限平衡法相比较, 列于表 10 中。

表 10 不稳定坡体稳定性系数计算结果

Table 10 Calculated results of stability coefficient of landslide area

计算方法	计算结果	误差/%
逐点等效 M-C(本文方法)	0.942	
常规等效 M-C (朱大勇等 <sup>[3]</sup> )	1.154	18.37

由表 10 可知, 本文计算方法得到该不稳定坡体的稳定性系数为 0.942, 低于朱大勇等<sup>[3]</sup>的 1.154, 偏低 18.37%。实际工程中, 该边坡已经临近失稳 (稳定性系数预计约为 1.0), 从计算结果来看, 朱大勇等<sup>[3]</sup>方法得到的稳定性系数偏高, 结果偏于激进; 而本文方法得到的稳定性系数偏低, 结果偏于保守一些。最后, 业主采纳了本文方法结果。本文方法偏低的原因可能是 H-B 模型参数取值有偏差造成的。

计算迭代过程如图 15, 图 16~18 为迭代稳定后的构造滑面正应力、逐点等效黏聚力和逐点等效内摩擦角空间分布。

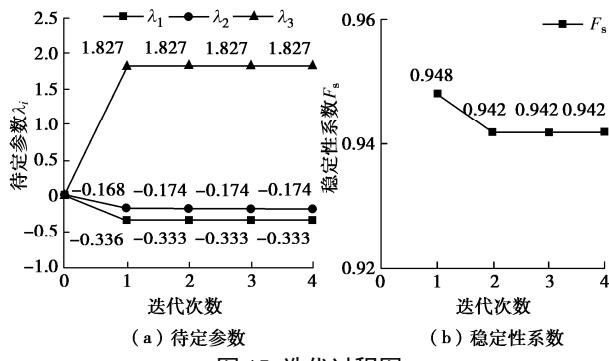


图 15 迭代过程图

Fig. 15 Diagram of iterative process

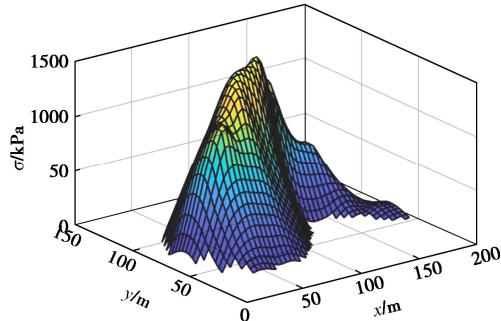


图 16 滑面正应力分布

Fig. 16 Distribution of normal stress of sliding surface

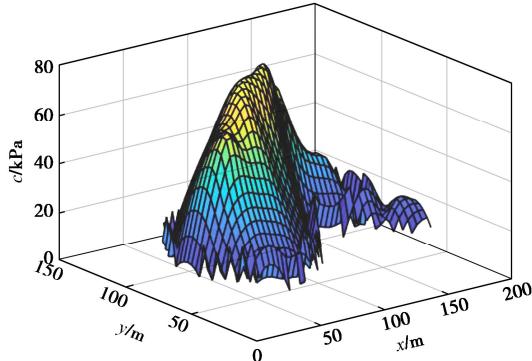


图 17 逐点等效黏聚力分布

Fig. 17 Distribution of point-by-point equivalent cohesion

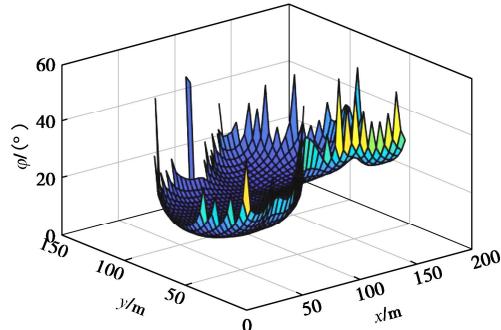


图 18 逐点等效内摩擦角分布

Fig. 18 Distribution of point-by-point equivalent internal friction angle

## 7 结 论

针对岩质边坡中岩体强度包线呈非线性分布的特征, 提出了一种基于构造滑面正应力分布的岩质边坡三维极限平衡法, 该方法收敛性较好, 收敛速度快, 易于编程实现, 适用于任意滑面形态。

(1) 通过构造滑面正应力分布, 提出了逐点等效 M-C 强度参数, 将等效黏聚力和等效内摩擦角转化为滑面正应力的变量, 获得了逐点等效黏聚力和逐点等效内摩擦角的空间分布。与常规等效 M-C 强度参数相比, 本文得到的等效参数不再是固定值, 逐点等效黏聚力低于常规等效的黏聚力, 而逐点等效内摩擦角高于常规等效的内摩擦角。

(2) 将 H-B 强度准则的逐点等效 M-C 强度参数与构造滑面正应力相结合, 根据整个滑体的平衡条件建立了 4 个平衡方程(3 个力平衡方程与 1 个力矩平衡方程), 建立了岩质三维边坡稳定性分析方法。4 个算例和 1 个工程实例验证了本方法的正确性和合理性, 本文方法得到的三维岩质边坡稳定性系数可能会偏于保守些。对于考虑整个滑体 6 个平衡方程的严格三维极限平衡法和最新版的 H-B 模型将是未来研究方向。

## 参 考 文 献:

- [1] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析:原理·方法·程序[M]. 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zuyu. Soil Slope Stability Analysis[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2003. (in Chinese))
- [2] 朱大勇, 钱七虎. 三维边坡严格与准严格极限平衡解答及工程应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(8): 1513-1528. (ZHU Dayong, QIAN Qihu. Rigorous and quasi-rigorous limit equilibrium solutions of 3d slope stability and application to engineering[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(8): 1513-1528. (in Chinese))
- [3] 朱大勇, 丁秀丽, 钱七虎. 一般形状边坡三维极限平衡解答[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(10): 1460-1464. (ZHU Dayong, DING Xiuli, QIAN Qihu. Three-dimensional limit equilibrium solution to generalized-shaped slope stability[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(10): 1460-1464. (in Chinese))
- [4] ZHENG H. Eigenvalue problem from the stability analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2009, 135(5): 647-656.
- [5] ZHOU X P, CHENG H. Analysis of stability of three-

- dimensional slopes using the rigorous limit equilibrium method[J]. *Engineering Geology*, 2013, **160**: 21-33.
- [6] 邓东平, 李亮. 一般形状边坡下准严格与非严格三维极限平衡法[J]. *岩土工程学报*, 2013, **35**(3): 501-511. (DENG Dongping, LI Liang. Quasi-rigorous and non-rigorous 3D limit equilibrium methods for generalized-shaped slopes[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(3): 501-511. (in Chinese))
- [7] 高玉峰, 万愉快, 张飞. 三维非对称边坡稳定性分析极限平衡法 [J]. *中国科学: 技术科学*, 2022, **52**(12): 1819-1830. (GAO Yufeng, WAN Yukuai, ZHANG Fei. Three-dimensional limit equilibrium method for asymmetrical slope stability analysis[J]. *Scientia Sinica (Technologica)*, 2022, **52**(12): 1819-1830. (in Chinese))
- [8] 卢坤林, 朱大勇, 甘文宁, 等. 一种边坡稳定性分析的三维极限平衡法及应用[J]. *岩土工程学报*, 2013, **35**(12): 2276-2282. (LU Kunlin, ZHU Dayong, GAN Wenning, et al. 3D limit equilibrium method for slope stability analysis and its application[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(12): 2276-2282. (in Chinese))
- [9] 朱合华, 张琦, 章连洋. Hoek-Brown 强度准则研究进展与应用综述[J]. *岩石力学与工程学报*, 2013, **32**(10): 1945-1963. (ZHU Hehua, ZHANG Qi, ZHANG Lianyang. Review of research progresses and applications of Hoek-Brown strength criterion[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2013, **32**(10): 1945-1963. (in Chinese))
- [10] 孙超伟, 柴军瑞, 许增光, 等. 基于 Hoek-Brown 强度折减法的边坡稳定性图表法研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2018, **37**(4): 838-851. (SUN Chaowei, CHAI Junrui, XU Zengguang, et al. Stability charts for rock slopes based on the method of reduction of Hoek-Brown strength[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, **37**(4): 838-851. (in Chinese))
- [11] 林杭, 曹平, 李江腾, 等. 基于 Hoek-Brown 准则的三维边坡变形稳定性分析[J]. *岩土力学*, 2010, **31**(11): 3656-3660. (LIN Hang, CAO Ping, LI Jiangteng, et al. Deformation stability of three-dimensional slope based on Hoek-Brown criterion[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, **31**(11): 3656-3660. (in Chinese))
- [12] DENG D P, LI L, WANG J F, et al. Limit equilibrium method for rock slope stability analysis by using the generalized Hoek-Brown criterion[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2016, **89**: 176-184.
- [13] KUMAR V, HIMANSHU N, BURMAN A. Rock slope analysis with nonlinear Hoek-Brown criterion incorporating equivalent Mohr-Coulomb parameters[J]. *Geotechnical and Geological Engineering*, 2019, **37**(6): 4741-4757.
- [14] YANG X L, LONG Z X. Seismic and static 3D stability of two-stage rock slope based on Hoek-Brown failure criterion[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2016, **53**(3): 551-558.
- [15] MICHALOWSKI R L, PARK D. Stability assessment of slopes in rock governed by the Hoek-Brown strength criterion[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2020, **127**: 104217.
- [16] HOVLAND H J. Three-dimensional slope stability analysis method[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1977, **103**(9): 971-986.
- [17] HOEK E, BROWN E T. Empirical strength criterion for rock masses[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1980, **106**(9): 1013-1035.
- [18] 陈祖煜, 汪小刚. 岩质边坡稳定分析: 原理·方法·程序 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005. (CHEN Zuyu, WANG Xiaogang. *Rock Slope Stability Analysis*[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2005. (in Chinese))
- [19] HOEK E, CARRANZA-TORRES C, CORKUM B. Hoek-Brown failure criterion-2002 edition[J]. *Proceedings of NARMS-Tac*, 2002, **1**(1): 267-273.
- [20] DENG D. Limit equilibrium analysis on the stability of rock wedges with linear and nonlinear strength criteria[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2021, **148**: 104967.
- [21] LI A J, MERIFIELD R S, LYAMIN A V. Stability charts for rock slopes based on the Hoek-Brown failure criterion[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2008, **45**(5): 689-700.
- [22] 刘华丽, 朱大勇, 钱七虎, 等. 滑面正应力分布对边坡安全系数的影响[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, **25**(7): 1323-1330. (LIU Huali, ZHU Dayong, QIAN Qihu, et al. Effect of normal stress distribution on factor of safety of a slope[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, **25**(7): 1323-1330. (in Chinese))