

DOI: 10.11779/CJGE20230399

# 非线性软化 Cosserat 连续体模型及其在土体应变局部化有限元分析中的应用

韦文成, 唐洪祥\*, 刘京茂, 邹德高

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 完善了土体非线性应变软化公式, 并将其引入到 Cosserat 连续体 DP-MC 屈服准则中, 推导了本构方程积分的返回映射算法和弹塑性切线模量矩阵。利用有限元软件 ABAQUS 提供的用户自定义单元子程序接口 (UEL) 对考虑非线性软化的 Cosserat 连续体 DP-MC 本构模型进行了数值实现, 并与平面应变试验进行了数值对比验证。结果表明, 考虑非线性软化的 Cosserat 连续体模型, 能够有效克服经典有限元在分析土体由应变软化引起的应变局部化问题时病态的网格依赖性, 同时, 还能够一定程度上反映土体剪切带内材料点旋转的细观效应。进一步地, 通过对平面应变压缩算例的模拟发现软化系数  $\omega$  和形状参数  $\eta$  均对土体强度有重要影响。

**关键词:** 非线性软化; 剪切带; 应变局部化; 网格依赖性; Cosserat 连续体

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2024)12-2492-11

**作者简介:** 韦文成(1990—), 男, 博士研究生, 主要从事岩土工程数值计算方面的研究工作。E-mail: wei\_wen\_cheng@163.com。

## Nonlinear softening Cosserat continuum model and its application in finite element analysis for strain localization of soils

WEI Wencheng, TANG Hongxiang, LIU Jingmao, ZOU Degao

(Dalian University of Technology, State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian 116024, China)

**Abstract:** An innovative approach is introduced to enhance the original soil nonlinear strain softening formula proposed by Ma et al. This formula is incorporated into the DP-MC yield criterion in the framework of Cosserat continuum, and the corresponding return mapping algorithm and consistent elastic-plastic tangent modulus matrix for the integration of constitutive equation are derived. The numerical implementation is realized through the user-defined element subroutine interface (UEL) in the ABAQUS finite element software. The proposed nonlinear softening DP-MC constitutive model for the Cosserat continuum is validated through the numerical modelling of the plane strain tests. The results demonstrate that the proposed model can effectively overcome the mesh-dependent issues of the classical finite element analysis for strain localization due to strain softening in soils. The model also captures the microscopic effects of particle rotation within the shear band. Additionally, the simulation for the plane compression tests highlights the significant impact of the softening coefficient  $\omega$  and shape parameter  $\eta$  on the strength of soils.

**Key words:** nonlinear softening; shear band; strain localization; mesh dependency; Cosserat continuum

## 0 引言

应变软化是岩土材料常见的一种力学特性, 如超固结黏土、密砂、敏感土以及冻土等<sup>[1-2]</sup>。具有应变软化特性的土体在外荷载作用下易发生应变局部化现象, 即不可逆的塑性应变在狭窄的带状区域 (剪切带) 内急剧发展<sup>[3]</sup>。由应变软化引起的应变局部化现象往往与边坡、地基以及挡土墙等土工构筑物的渐进失稳过程关系密切, 近些年来已成为岩土工程的热点研究

内容之一。

随着计算机和数值仿真技术的不断提高, 采用有限元法对岩土体应变局部化问题进行研究也取得了一定的进展。然而, 已有研究表明, 经典连续体有限元数值结果存在病态的网格依赖性<sup>[3-4]</sup>。为正确地模拟由应变软化引起, 以在局部狭窄区域急剧发生和发展的

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51979025)

收稿日期: 2023-05-08

\*通信作者 (E-mail: tanghx@dlut.edu.cn)

非弹性应变为特征的应变局部化现象, 需要在经典连续体中引入某种正则化机制以保持应变局部化问题求解的适定性。目前用于解决这一问题比较常见的方法主要有非局部积分法<sup>[5]</sup>、梯度塑性理论<sup>[6]</sup>以及 Cosserat 连续体理论 (又称微极理论)<sup>[7-9]</sup>。其中, Cosserat 连续体理论由于在材料点上考虑了转动自由度, 同时在本构模型中引入了与颗粒尺寸有关的内部长度参数, 使得该连续体方法与作为颗粒材料的土体在宏观描述上保持了自然的衔接, 近些年在岩土体应变局部化问题的有限元分析中得到了大量的应用。

de Borst<sup>[7]</sup>将 von Mises 屈服准则发展到 Cosserat 连续体理论框架中, 并进一步考虑压力相关的  $J_2$  流动法则, 对剪切带进行了有效模拟<sup>[10]</sup>; Li 等<sup>[8]</sup>提出了 Drucker-Prager 屈服准则的弹塑性 Cosserat 连续体模型, 对土体应变软化引起的宏观力学响应进行了研究; 马刚等<sup>[11]</sup>分别将基于 Cosserat 理论的 Mohr-Coulomb 弹塑性模型和 Drucker-Prager 弹塑性模型应用于二维重力坝深层抗滑稳定计算中; 唐嘉博等<sup>[12]</sup>进一步将 Cosserat 连续体 Mohr-Coulomb 应变软化本构模型发展到三维空间, 并对考虑地基土应变软化特性的三维重力坝的稳定性进行了分析; 唐洪祥等<sup>[13]</sup>提出了 CAP 弹塑性 Cosserat 连续体模型、耦合了强度各向异性特性<sup>[14-15]</sup>以及结合粒子有限元对岩土体大变形问题进行了分析<sup>[16]</sup>。同时, 基于 Cosserat 连续体理论的岩土颗粒材料破坏相关研究也取得了一定的进展<sup>[17-18]</sup>。这些研究为完善 Cosserat 连续体在岩土体应变局部化问题中的应用起到了重要推动作用。

然而, 以上用于应变局部化分析的 Cosserat 连续体应变软化本构模型, 均考虑的是黏聚力随塑性应变的线性软化。大量的超固结黏土和密砂的试验研究已经证明, 土体的峰后软化曲线具有明显的非线性特征<sup>[19-20]</sup>。Ma 等<sup>[21]</sup>在利用物质点法 (MPM) 分析滑坡体的大变形问题中提出了土体强度参数 (黏聚力和内摩擦角) 随塑性剪应变增加而减小的指数非线性软化公式。Liu 等<sup>[22]</sup>进一步将此非线性软化公式用于地震作用下三维边坡失稳的大变形有限元分析中, 得到了比较合理的计算结果。为了充分利用 Cosserat 连续体有限元方法在分析应变局部化问题中的优势以及更加准确地模拟土体的后破坏力学行为, 本文进一步完善了 Ma 等<sup>[21]</sup>提出的土体强度非线性应变软化公式, 并将其引入到 Cosserat 连续体下匹配 Mohr-Coulomb 的 Drucker-Prager 本构模型中, 推导了一致性本构积分算法和弹塑性切线模量矩阵。同时, 利用 ABAQUS 有限元软件提供的用户自定义单元子程序 (UEL) 接口进行了数值实现, 通过模拟黏性土平面应变试验对模型进行

了验证; 在此基础上, 进一步分析了该模型在岩土体应变局部化模拟中的优势, 对非线性软化参数的影响进行了详细地研究。

## 1 非线性软化 Cosserat 连续体模型

### 1.1 二维平面应变 Cosserat 连续体理论

根据 Li 等<sup>[8]</sup>的研究, 在二维 Cosserat 连续体理论中每个材料点具有 3 个自由度,

$$\mathbf{u} = [u_x \quad u_y \quad w_z]^T \quad (1)$$

式中:  $u_x$ ,  $u_y$  为平移自由度;  $w_z$  为 Cosserat 理论引入的旋转自由度。

应力和应变向量定义为

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yx} \quad \frac{m_{xz}}{l_c} \quad \frac{m_{yz}}{l_c} \right]^T, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yx} \quad k_{xz} l_c \quad k_{yz} l_c \right]^T. \quad (3)$$

式中:  $l_c$  为内部长度参数, 当  $l_c$  为 0 时则退化为经典连续体;  $k_{xz}$ ,  $k_{yz}$  为微曲率;  $m_{xz}$ ,  $m_{yz}$  分别为对应的偶应力 (图 1), 其余的应力和应变分量意义与经典连续体相同。

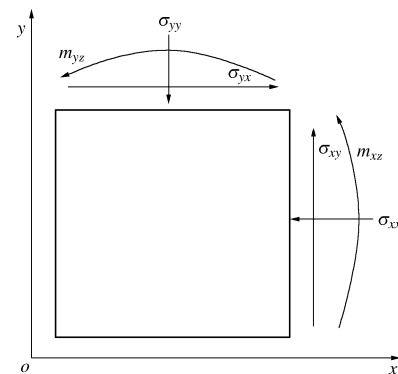


图 1 二维 Cosserat 连续体应力分量分布图

Fig. 1 Distribution diagram of stress components of two-dimensional Cosserat continuum

平面 Cosserat 连续体静力平衡方程为

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{f}$  为体力向量;  $\mathbf{L}$  为微分算子矩阵,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & l_c \frac{\partial}{\partial x} & l_c \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T. \quad (5)$$

平面 Cosserat 连续体应变-位移关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (6)$$

## 1.2 非线性软化 DP-MC 屈服准则

根据相关研究<sup>[23-24]</sup>, 对 Drucker-Prager 屈服准则 (简称 DP 准则) 中的系数  $A_\phi$ ,  $B_\phi$  进行合理取值, 可以使 DP 屈服准则与 Mohr-Coulomb 屈服准则 (简称 MC 准则) 在计算岩土体强度相关问题时具有较高的一致性, 即得到与 MC 准则匹配的 DP 准则 (后文简称 DP-MC 准则)。图 2 给出了主应力空间  $\Pi$  平面上 DP-MC 准则与 MC 准则的位置关系示意图, 可以清晰地看到 DP-MC 准则在  $\Pi$  平面上为圆形, 且大小介于 MC 的外接圆和内切圆之间。由于该准则能够体现 MC 准则在计算土体强度方面的物理意义, 同时又充分地发挥了 DP 准则在数值计算方面的优势, 目前已被广泛地应用于岩土体强度和稳定性问题的分析中<sup>[9, 15, 25]</sup>。鉴于此, 本文将基于 DP-MC 准则开展相关研究。

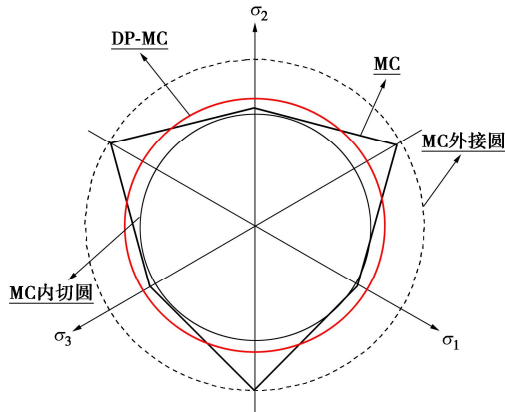


图 2 主应力空间  $\Pi$  平面上 DP-MC 准则与 MC 准则相对位置关系示意图

Fig. 2 Illustration of relative position of DP-MC criterion and MC criterion on  $\Pi$  plane in principal stress space

二维平面应变条件下, DP-MC 屈服面方程表示为

$$F = q + A_\phi \sigma_h + B_\phi = 0 \quad (7)$$

式中:

$$q = \left( \frac{1}{2} \sigma^T P \sigma \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (8)$$

$$\sigma_h = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}); \quad (9)$$

$$A_\phi = -\sin \phi; \quad (10)$$

$$B_\phi = -\sqrt{3}c \cdot \cos \phi; \quad (11)$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

根据 Ma 等<sup>[21]</sup>的研究, 对于土体强度的软化特性, 可以采用对强度参数 (黏聚力  $c$  和内摩擦角  $\phi$ ) 的指数非线性应变软化公式进行实现, 具体表示形式为

$$\left. \begin{aligned} c &= c_r + (c_p - c_r) \cdot e^{-\eta_c \bar{\epsilon}^p}, \\ \phi &= \phi_r + (\phi_p - \phi_r) \cdot e^{-\eta_\phi \bar{\epsilon}^p} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中:  $c_p$ ,  $c_r$  分别为黏聚力的峰值和残余值;  $\phi_p$ ,  $\phi_r$  分别为内摩擦角的峰值和残余值, 均可根据土体材料的常规三轴试验或平面应变试验获取;  $\bar{\epsilon}^p$  为累积的等效塑性应变, 在计算过程中为一状态变量;  $\eta$  为形状参数, 可以通过调整此参数的大小使得应力-应变关系曲线的峰后软化段形态更好地与试验曲线进行拟合。考虑到土体在剪切破坏过程中黏聚力和内摩擦角的软化规律可能不一致, 将黏聚力和内摩擦角分别采用各自的形状参数, 则式 (13) 可调整为

$$\left. \begin{aligned} c &= c_r + (c_p - c_r) \cdot e^{-\eta_c \bar{\epsilon}^p}, \\ \phi &= \phi_r + (\phi_p - \phi_r) \cdot e^{-\eta_\phi \bar{\epsilon}^p} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中:  $\eta_c$ ,  $\eta_\phi$  分别为黏聚力和内摩擦角的软化形状参数。为了方便后续进行参数化分析, 参考 Liu 等<sup>[22]</sup>的研究, 定义两个软化系数  $\omega_c = c_r / c_p$  和  $\omega_\phi = \phi_r / \phi_p$ , 显然,  $\omega_c$ ,  $\omega_\phi$  越小, 材料的软化程度越高,  $\omega_c = \omega_\phi = 1$  时, 模型退化为不考虑应变软化的理想弹塑性模型, 可以将式 (14) 改写为

$$\left. \begin{aligned} c &= \left[ \omega_c + (1 - \omega_c) \cdot e^{-\eta_c \bar{\epsilon}^p} \right] c_p, \\ \phi &= \left[ \omega_\phi + (1 - \omega_\phi) \cdot e^{-\eta_\phi \bar{\epsilon}^p} \right] \phi_p \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

塑性势函数表示为

$$G = q + A_\psi \sigma_h + B_\psi, \quad (16)$$

$$A_\psi = -\sin \psi, \quad (17)$$

$$B_\psi = -\sqrt{3}c \cdot \cos \psi. \quad (18)$$

式中:  $\psi$  为塑性势角 (剪胀角)。若  $\psi = \phi$ , 模型即为关联塑性。

## 1.3 Cosserat 非线性软化 DP-MC 本构积分算法

(1) 本构方程积分的返回映射算法

对于使材料局部处进一步发展塑性变形的一个荷载增量步, 当前应力可表示为

$$\sigma = \sigma^E - \Delta \lambda D_e \frac{\partial G}{\partial \sigma}. \quad (19)$$

式中:  $\Delta \lambda$  为塑性乘子;  $\sigma^E$  为由弹性应变确定的荷载增量步终点应力的弹性预测值,

$$\sigma^E = D_e \epsilon, \quad (20)$$

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G+G_c & G-G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G-G_c & G+G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中:  $G_c$  为 Cosserat 剪切模量; Lamé 常数  $\lambda = 2G\nu / (1-2\nu)$ ,  $G$ ,  $\nu$  为经典意义上的剪切模量和泊松比。

塑性流动向量:

$$\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2q} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} + \frac{A_\psi}{\sqrt{3}} \mathbf{m} \quad (22)$$

式中:

$$\mathbf{m} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (23)$$

将应力向量分解为偏量和球量之和:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma}_m \quad (24)$$

式中:

$$\boldsymbol{\sigma}_m = [\sigma_m \ \sigma_m \ \sigma_m \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (25)$$

$$\sigma_m = \sigma_h / \sqrt{3} \quad (26)$$

根据式 (8),  $q$  以及其弹性预测值  $q^E$  可以用应力向量的偏量进行表示, 即

$$\left. \begin{aligned} q &= \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ q^E &= \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}^{E^T} \mathbf{M} \mathbf{s}^E \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

根据式 (19), (27) 可得

$$\left. \begin{aligned} q &= q^E - 3G\Delta\lambda, \\ \sigma_h &= \sigma_h^E - 3KA_\psi\Delta\lambda \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中:  $\sigma_h^E$  为  $\sigma_h$  的弹性预测值;  $K = E/[3(1-2\nu)]$  为体积模量。

由式 (19) 可见, 只要确定  $\Delta\lambda$ , 便可以在数值计算中, 按增量步进行应力更新和屈服面的更新。为确定  $\Delta\lambda$ , 将弹性预测值表示的应力相关量式 (29) 带入屈服面方程 (7) 得到:

$$F = F(\Delta\lambda, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

$$= q^E - 3\Delta\lambda(G + KA_\psi A_\psi) + A_\psi \sigma_h^E + B_\varphi = 0 \quad (30)$$

由广义等效塑性剪应变  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  的定义<sup>[26]</sup>:

$$F_c = F_c(\Delta\lambda, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \Delta\lambda \left[ 1 + \text{sign}(\sigma_h) \frac{A_\psi}{\sqrt{3}} \right] = 0 \quad (31)$$

式中:  $\text{sign}(\sigma_h)$  为符号函数, 当  $\sigma_h$  大于 0 时取 1, 当  $\sigma_h$  等于 0 时取 0, 当  $\sigma_h$  小于 0 时取 -1。

根据式 (30), (31) 可构造局部积分点处非线性本构方程的 Newton-Raphson 本构迭代过程:

$$F_k = F_{k-1} + \Delta F = 0 \quad (32)$$

以确定内状态变量  $\Delta\lambda$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta(\Delta\lambda_k) &= -F_{k-1} / \frac{dF}{d\Delta\lambda}, \\ \Delta\lambda &= \Delta\lambda_{k-1} + \delta(\Delta\lambda_k) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

式中:

$$\frac{dF}{d\Delta\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \Delta\lambda} - \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \cdot \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}{\partial \Delta\lambda} / \frac{\partial F_c}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Delta\lambda} &= -3(G + KA_\psi A_\psi), \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} &= (\sigma_h^E - 3KA_\psi \Delta\lambda) \frac{\partial A_\psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}, \\ \frac{\partial F_c}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} &= 1, \\ \frac{\partial F_c}{\partial \Delta\lambda} &= - \left[ 1 + \text{sign}(\sigma_h) \frac{A_\psi}{\sqrt{3}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

式 (35) 中:

$$\frac{\partial A_\psi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} = (1 - \omega_\varphi) \eta_\varphi e^{-\eta_\varphi \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \varphi_p \cos \varphi \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} &= \sqrt{3} \left[ (1 - \omega_c) c_p \eta_c e^{-\eta_c \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. c(1 - \omega_\varphi) \varphi_p \eta_\varphi e^{-\eta_\varphi \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \sin \varphi \right] \quad (37) \end{aligned}$$

(2) 弹塑性切线模量矩阵

经过推导, 可以得到考虑非线性软化的 Cosserat 连续体 DP-MC 本构积分的弹塑性切线模量矩阵, 限于篇幅, 下面直接给出一致性弹塑性切线模量矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{ep} &= \mathbf{P}^* \left[ (1 - \alpha + b_\lambda) \frac{1}{6q^2} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma})^T + \mathbf{C}_\alpha \right] \mathbf{D}_e \mathbf{P}^* + \\ &\quad K \left[ 1 + \frac{K}{G} A_\psi A_\psi b_\lambda \right] \mathbf{m} \mathbf{m}^T + \frac{1}{\sqrt{3}q} b_\lambda K \left[ A_\psi \mathbf{P}^* (\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{m}^T + \right. \\ &\quad \left. A_\psi \mathbf{m} (\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{P}^* \right] \quad (38) \end{aligned}$$

式中:

$$\alpha = q/q^E; \tag{39}$$

$$b_\lambda = 3G \frac{\partial F_c / \partial \varepsilon^p}{\partial F_c / \partial \Delta \lambda}.$$

$$\left( -3KA_\phi A_\psi \frac{\partial F_c / \partial \varepsilon^p}{\partial F_c / \partial \Delta \lambda} - \frac{\partial B_\phi}{\partial \varepsilon^p} - 3G \frac{\partial F_c / \partial \varepsilon^p}{\partial F_c / \partial \Delta \lambda} \right)^{-1}; \tag{40}$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{41}$$

$$C_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+1}{2} & \frac{\alpha-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-1}{2} & \frac{\alpha+1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}. \tag{42}$$

2 模型验证

由于本文提出的模型是在二维平面应变条件下建立的，为了合理地验证该模型，对具有 200 kPa 先期固结压力的某黏土试样进行侧向围压分别为 50, 100, 150 kPa 的固结不排水平面应变压缩试验，则 3 种围压对应的超固结比（OCR）分别为 4.0, 2.0, 1.33。平面应变试验装置如图 3 所示，试样在平面内的尺寸为 6 cm×10 cm，试验得到不同围压下试样的应力-应变曲线如图 4 所示。

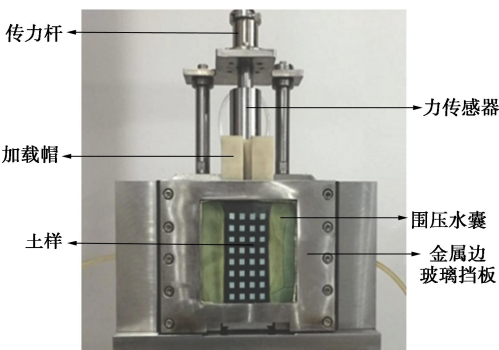


图 3 平面应变仪

Fig. 3 Plane strain instrument

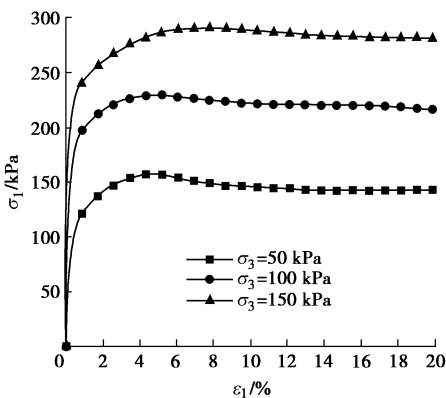


图 4 平面应变试验的竖向应力-竖向应变曲线图

Fig. 4 Curves of vertical stress-vertical strain of plane strain tests

接下来，将利用围压分别为 100, 150 kPa 时对应的应力-应变曲线获取土样的强度参数，并将得到的强度参数结合本文提出的模型对围压为 50 kPa 的情况进行有限元计算，通过将计算结果与试验曲线进行对比来验证模型的有效性。根据两条曲线的峰值点和残余值点坐标在  $\sigma$ - $\tau$  坐标系下绘制应力摩尔圆，取应力摩尔圆公切线得到黏聚力的峰值  $c_p = 49.52$  kPa，残余值  $c_r = 37.03$  kPa，峰值点和残余值点的内摩擦角基本相同，约为  $6.6^\circ$ 。

对于形状参数  $\eta_c$  的取值，通过利用上文得到的强度参数并取用不同的  $\eta_c$  值对 OCR 为 1.33 ( $\sigma_3 = 150$  kPa)，2.0 ( $\sigma_3 = 100$  kPa) 两种情况进行试算，计算得到  $\eta_c = 2$  时的峰后曲线形态与 OCR=1.33 时的试验曲线较为一致， $\eta_c = 4$  时与 OCR=2.0 时的试验曲线较为一致。对于待模拟的 OCR=4.0 ( $\sigma_3 = 50$  kPa) 的情况，根据前两种情况得到的 OCR 和  $\eta_c$  之间的关系，通过线性外插值近似得到 OCR=4.0 时的形状参数  $\eta_c = 11.94$ 。弹性模量  $E$  近似取围压为 50 kPa 时试验曲线在整个峰值前段的压缩模量为 3.75 MPa，将泊松比  $\nu$  简单取为 0.3；由于模拟的是不排水工况，所以剪胀角  $\psi$  取 0。

根据 Li 等<sup>[8]</sup>的研究，Cosserat 剪切模量  $G_c$  的取值不小于 0.5 $G$  时就可以保障计算的正则化效果，且  $G_c$  的取值变化对计算结果影响很小，所以在本文中将  $G_c$  取为 0.75 MPa。而内部长度参数  $l_c$  对计算结果是有影响的，但目前对于黏性土的  $l_c$ ，还没有根据土样的客观物理量或者试验进行定量获取的方式，在实际应用中一般根据经验在 (0.01~0.1) 倍的模型尺寸范围进行取值，然后在经验范围内取多个  $l_c$  在不同的网格密度下进行试算，再按照既可以保证有限元计算的正则化效果又不至于过高预测承载力的原则来具体确定其取值。关于  $l_c$  取值的具体试算方法及过程在 Wei 等<sup>[25]</sup>的研究中已有非常详细的介绍。限于篇幅原因，这里直接给出对该平面应变试验通过试算确定的内部长度参数为 0.01 $H$ ，即  $l_c = 1$  mm，该取值也与以往研究中



对平面应变试验的模拟采用的  $l_c$  一致<sup>[9, 15, 25]</sup>。

为了形成对比, 也分别采用峰值强度和残余强度的理想弹塑性模型, 以及线性应变软化模型对 50 kPa 围压情况下的平面应变试验进行了模拟。计算采用的模型尺寸、网格划分情况以及边界条件见图 5。计算过程中, 在围压施加完毕后, 通过对模型顶边界逐步施加竖直向下的位移进行加载。计算结果见图 6。

$$\sigma_{1u} = \sigma_3 \tan^2\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) + 2c \tan\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (43)$$

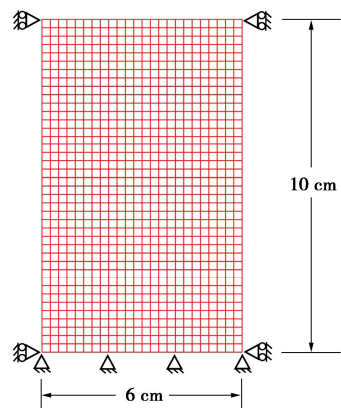


图 5 模型的尺寸、网格划分及边界条件示意图

Fig. 5 Dimension, meshing and boundary conditions of plane

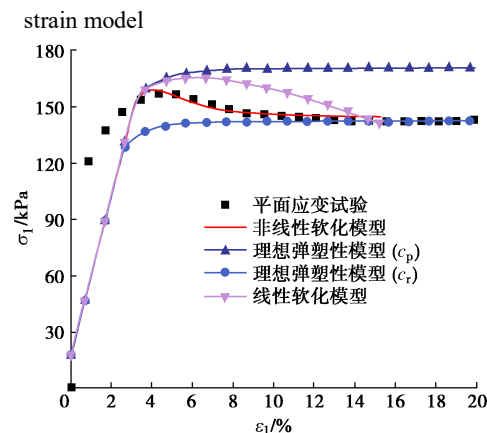


图 6 50 kPa 围压下竖向应力-竖向应变曲线图

Fig. 6 Curves of vertical stress-vertical strain ( $\sigma_3 = 50$  kPa)

首先, 根据曲线图可知当采用理想弹塑性模型 ( $c_p$ ) 时得到的竖向应力的峰值为 170.8 kPa。对于该工况, 若采用 Mohr-Coulomb 准则按照式 (43) 计算得到的竖向应力极限值理论解为 174.1 kPa, 可见两者非常接近, 说明了在该工况下, 本文采用的 DP-MC 准则与 Mohr-Coulomb 准则在土体承载力的量化上有较好的匹配度。

其次, 可以发现采用峰值强度的理想弹塑性模型仅能比较准确地计算得到峰值应力, 但却明显高估了峰后应力; 采用残余强度的理想弹塑性模型仅能比较准确地计算得到残余应力, 但却明显低估了土体的峰值应力; 当采用线性软化模型时, 可以得到介于前两

种理想弹塑性模型之间的峰后曲线, 相对而言, 也更接近试验曲线, 但是由于线性软化的原因, 得到的峰后曲线近似直线, 仍然与试验结果有较大差距; 当采用本文提出的 Cosserat 非线性软化模型时, 便可以得到与试验曲线非常接近的计算结果。可见本文提供了一种能够更为准确模拟土体后破坏力学行为的数值方法, 这对于渐进破坏失稳的岩土构筑物 (如边坡和地基等) 的模拟来说, 是非常重要的。

从图 6 中还可以发现的一个问题是, 图 6 中的不同模型对于试验曲线峰值前段的模拟都存在相似的偏差, 这主要是数值计算采用的弹塑性本构模型的弹性部分均为符合胡克定律的线弹性模型, 造成了计算结果在塑性应变出现前的应力-应变关系基本也呈线性。而实际土样的塑性变形从加载早期就会出现, 所以应力-应变曲线从加载到峰值会呈现一定的非线性特征, 而这种曲线特征是线弹性-塑性本构模型无法完全复现的, 这也是本文模型接下来进一步完善的方向。

3 算例分析

下面将通过算例重点分析本文在 Cosserat 连续体框架下所建立的非线性软化本构模型的优势, 同时对非线性软化参数 (软化系数和形状参数) 的影响进行全面分析。为便于分析, 且令  $\omega_c = \omega_\phi = \omega$ 、 $\eta_c = \eta_\phi = \eta$ , 仍采用图 5 的计算模型, 并将侧向围压取为 0, 用于计算的基本材料参数见表 1, 软化系数  $\omega$ 、形状参数  $\eta$  以及内尺寸参数  $l_c$  将在后续具体计算中给出。

表 1 材料参数表

Table 1 Parameters of materials

材料参数	数值
弹性模量 $E/\text{Pa}$	$3.9 \times 10^6$
泊松比 $\nu$	0.3
峰值黏聚力 $c_p/\text{Pa}$	$3.3 \times 10^4$
峰值内摩擦角 $\phi_p / (^\circ)$	15
塑性势角 $\psi / (^\circ)$	0
Cosserat 剪模 $G_c/\text{Pa}$	$7.5 \times 10^5$

3.1 土体应变局部化问题模拟

由于 Cosserat 连续体模型考虑了颗粒材料的转动自由度, 并在模型中引入了与颗粒材料尺寸相关的内部长度参数, 能够在一定程度上反应土体剪切带内颗粒转动的细观特征。同时, 模型又能够有效克服经典有限元在分析土体由应变软化引起的应变局部化问题时的网格病态依赖性。接下来将结合数值算例来进一步说明。

为了证明本文在 Cosserat 连续体框架下建立的非线性软化模型能够有效地解决网格依赖性问题, 以  $\eta=6$  且  $\omega=0.6$  的情况为例, 分别采用 Cosserat 连续体模型 ( $l_c=1$  mm) 和经典连续体模型 ( $l_c=0$ ) 在网格尺寸  $a$  分别为 3.5, 2.5, 1.0, 0.5 mm 的情况下对图 5

算例进行有限元计算。为方便起见,定义一无量纲承载力系数为 $\sigma/c_p$ ,计算得到的承载力系数随竖向应变变化曲线如图 7, 8 所示。可见经典连续体模型在网格尺寸减小过程中,得到的峰值承载力系数不断减小,峰后软化段的离散性更大,甚至当网格尺寸 $a=0.5\text{ mm}$ 时,模型刚刚计算得到峰值后,经过很小的竖向应变便出现收敛困难问题而不能继续计算下去,无法对峰后力学行为进行分析。说明经典连续体模型在计算应变软化引起的应变局部化问题时,计算结果对有限元网格尺寸有严重的依赖性。

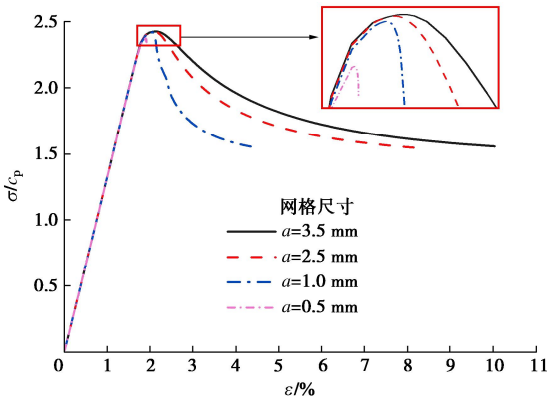


图 7 经典连续体模型的承载力系数-竖向应变曲线 ( $\omega=0.6$  且  $\eta=6$ )

Fig. 7 Curves of bearing capacity coefficient versus vertical strain from classical FEM ( $\omega=0.6$  and  $\eta=6$ )

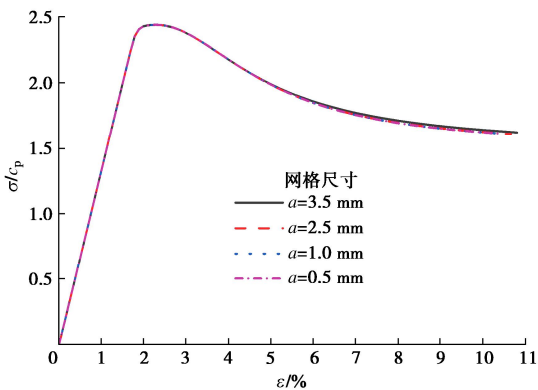


图 8 Cosserat 连续体模型的承载力系数-竖向应变曲线 ( $\omega=0.6$  且  $\eta=6$ )

Fig. 8 Curves of bearing capacity coefficient versus vertical strain from Cosserat FEM ( $\omega=0.6$  and  $\eta=6$ )

而当采用 Cosserat 连续体模型时,在不同网格尺寸下,得到的承载力系数-竖向应变曲线非常一致,且当网格尺寸 $a$ 取 2.5, 1.0, 0.5 mm 时,得到的曲线基本是重合的。说明本文在 Cosserat 连续体理论框架下建立的非线性应变软化模型能够有效地克服这种病态的网格依赖性问题,得到收敛一致的网格无关解。图 9 给出了竖向应变为 4%时, Cosserat 连续体模型与经典连续体模型在 3 种不同网格尺寸下得到的塑性应变等值线图。不难发现 Cosserat 连续体模型计算得到的

“X”型剪切带宽度基本一致,而经典连续体模型得到的却是双“X”型剪切带,且剪切带宽度随网格尺寸的减小越来越窄,不能得到收敛一致的计算结果。

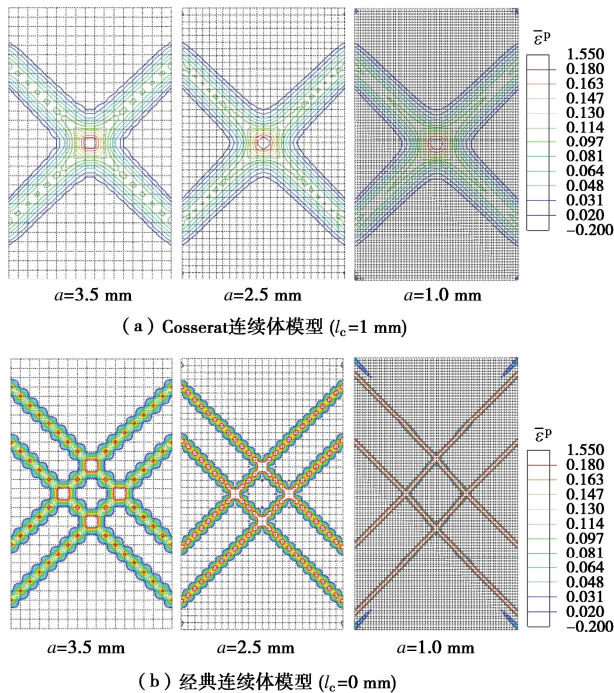


图 9 等效塑性剪应变等值线图  
Fig. 9 Isoline map of equivalent plastic strain ((a) Cosserat model; (b) classical model)

为进一步分析 Cosserat 连续体模型在模拟土体颗粒材料细观特性方面的优势,在网格尺寸 $a=2.5\text{ mm}$ ,  $\omega=0.6$  且  $\eta=6$  的情况下,内部长度参数 $l_c$ 分别取 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 mm 时对上述模型进行了计算分析。图 10 给出了承载力系数-竖向应变关系曲线,图 11, 12 分别给出了当竖向应变为 4%时,不同 $l_c$ 对应的等效塑性应变和转角分布云图。结合图 10~12 进行分析,不难发现, $l_c$  越大,模型的承载力系数越大,得到的剪切带也越宽,同时在剪切带区域材料点有明显的转动,这与颗粒材料相关的试验研究及细观离散元计算结果比较一致<sup>[4, 27]</sup>。

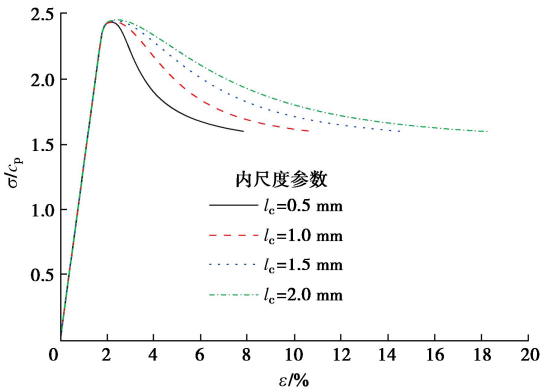


图 10 承载力系数-竖向应变曲线 ( $\omega=0.6$  且  $\eta=6$ )  
Fig. 10 Curves of bearing capacity coefficient versus vertical strain ( $\omega=0.6$  and  $\eta=6$ )



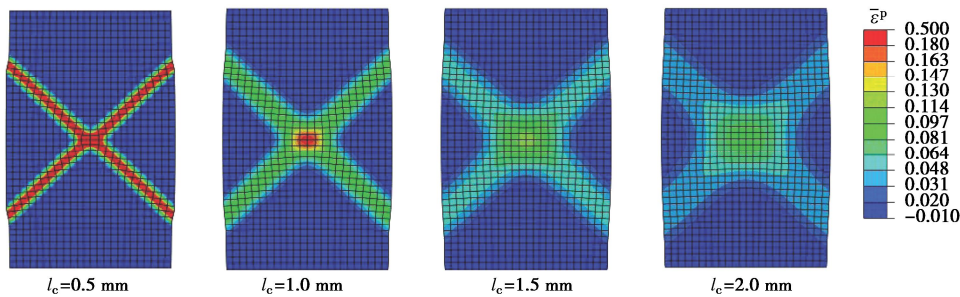


图 11 等效塑性剪应变分布云图 ( $\omega = 0.6$  且  $\eta = 6$ )

Fig. 11 Contours of equivalent plastic strain ( $\omega = 0.6$  and  $\eta = 6$ )

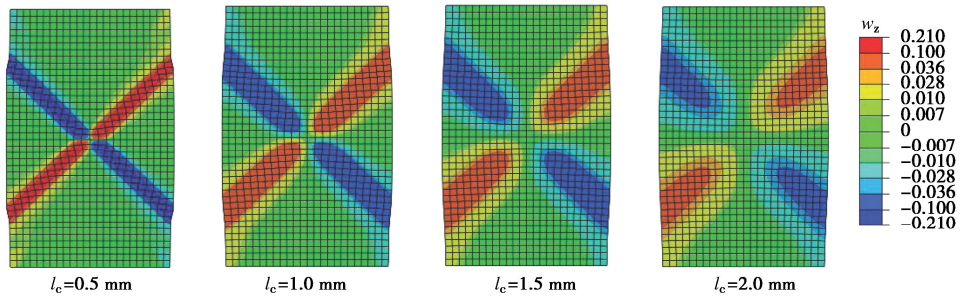


图 12 材料转动位移分布云图 ( $\omega = 0.6$  且  $\eta = 6$ )

Fig. 12 Contours of rotational displacement ( $\omega = 0.6$  and  $\eta = 6$ )

3.2 非线性软化影响分析

为了系统分析非线性软化对计算结果的影响, 将  $l_c$  取 1 mm (与上文试验验证的取值相同), 在  $\omega$  分别取 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0,  $\eta$  分别取 3, 6, 9, 12, 15 的情况下, 进行组合计算。计算得到不同情况下的极限承载力系数如表 2 所示。为了更清晰地发现影响规律, 图 13 给出了极限承载力系数随  $\omega$  和  $\eta$  变化的曲面图, 看以看到,  $\omega$  越小,  $\eta$  越大, 计算得到的极限承载力系数越小。当  $\omega=1.0$  时, 土体的残余强度与峰值强度相同, 即退化为不考虑应变软化的理想弹塑性模型, 所以此时极限承载力系数不再随  $\eta$  的变化而发生改变。

也越小, 当  $\omega=1$  时, 呈现为无应变软化的典型理想弹塑性模型曲线。

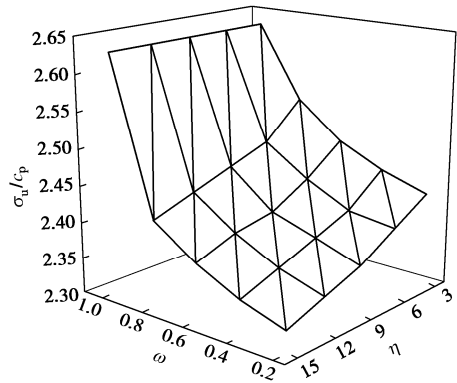


图 13 极限承载力系数随  $\omega$  和  $\eta$  变化的曲面图

Fig. 13 Surface diagram of ultimate bearing capacity coefficient varying with  $\omega$  and  $\eta$

表 2 极限承载力系数表

Table 2 Ultimate bearing capacity coefficients					
$\sigma_u/c_p$	$\omega$				
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\eta=3$	2.43	2.45	2.48	2.53	2.63
$\eta=6$	2.40	2.41	2.44	2.48	2.63
$\eta=9$	2.37	2.39	2.41	2.46	2.63
$\eta=12$	2.35	2.37	2.40	2.44	2.63
$\eta=15$	2.33	2.35	2.38	2.42	2.63

图 14 给出了当  $\omega=0.4$  时, 不同  $\eta$  情况下承载力系数随竖向应变变化曲线。可见, 在  $\omega$  相同的情况下, 不同的  $\eta$  计算得到的残余强度趋于一致, 且  $\eta$  对峰后曲线形态影响明显,  $\eta$  越大, 峰后承载力系数随竖向应变的增加降低的越快。

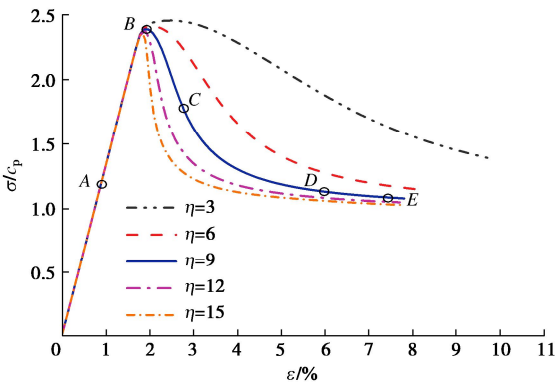


图 14 承载力系数随竖向应变变化曲线 ( $\omega = 0.4$ )

Fig. 14 Curves of bearing capacity coefficient versus vertical strain ( $\omega = 0.4$ )

图 15 给出了当  $\eta=6$  时, 不同  $\omega$  情况下承载力系数随竖向应变的变化曲线。可见,  $\omega$  对峰后承载力系数的变化影响明显,  $\omega$  越小, 得到的峰后承载力系数



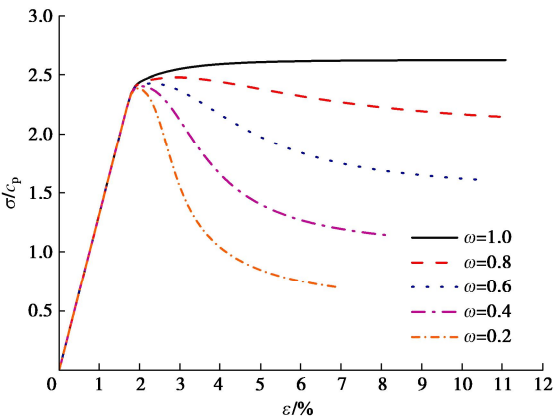


图 15 承载力系数随竖向应变变化曲线 ( $\eta=6$ )

Fig. 15 Curves of bearing capacity coefficient versus vertical strain ( $\eta=6$ )

从图 14, 15 中还可以看到, 对于一条完整的曲线, 承载力系数随竖向应变增加的变化规律是先经过一个线性增加段, 达到峰值后, 然后经过一个陡降段, 最后到达平缓段。为更清晰地揭示这种现象的内在原因, 以图 14 中  $\eta=9$  的曲线为例, 在曲线上选取 5 个点, 点 A 位于线性增加段, 点 B 为峰值点, 点 C 位于陡降段, 点 D 和点 E 位于平缓段, 分别给出了这 5 个点对应的等效塑性剪应变 (后文简称塑性应变) 分布图及

黏聚力和内摩擦角分布图, 如图 16 所示。

从图 16 可以看到: 在 A 点处, 塑性应变为 0, 对应的黏聚力和内摩擦角在整个计算域内均为初始输入的峰值, 没有出现软化, 说明此时整个模型都处于弹性阶段, 所以这个阶段的承载力系数-竖向应变曲线呈现线性增加状态; 在峰值点 B 处, 可以发现, 此时在模型的中心位置已经出现了一定规模的塑性应变区, 并且有进一步形成剪切带的趋势, 同时与之对应的黏聚力和内摩擦角也在相同位置出现软化现象, 这与相关试验研究发现的平面应变条件下应变局部化现象在峰值前就开始出现的结论是一致的<sup>[28]</sup>; 在 C 点处, 可见此时塑性区已经贯通, 并形成了“X”型剪切带, 塑性应变在剪切带内不断累积, 而在带外却接近于 0, 即已出现典型的应变局部化现象, 相应的黏聚力和内摩擦角在剪切带区域软化明显, 在带内也呈现与塑性应变比较相似的剧烈的梯度变化, 说明此时剪切带内的土体强度正处于一个快速降低的状态, 所以这个阶段的曲线呈现为陡降状态; 在点 D 和点 E 处, 剪切带内的塑性应变值较前阶段更大。同时还可以发现, 从 D 点到 E 点, 虽然剪切带内的塑性应变值继续增加, 但对应的黏聚力和内摩擦角在剪切带中心一定宽度范

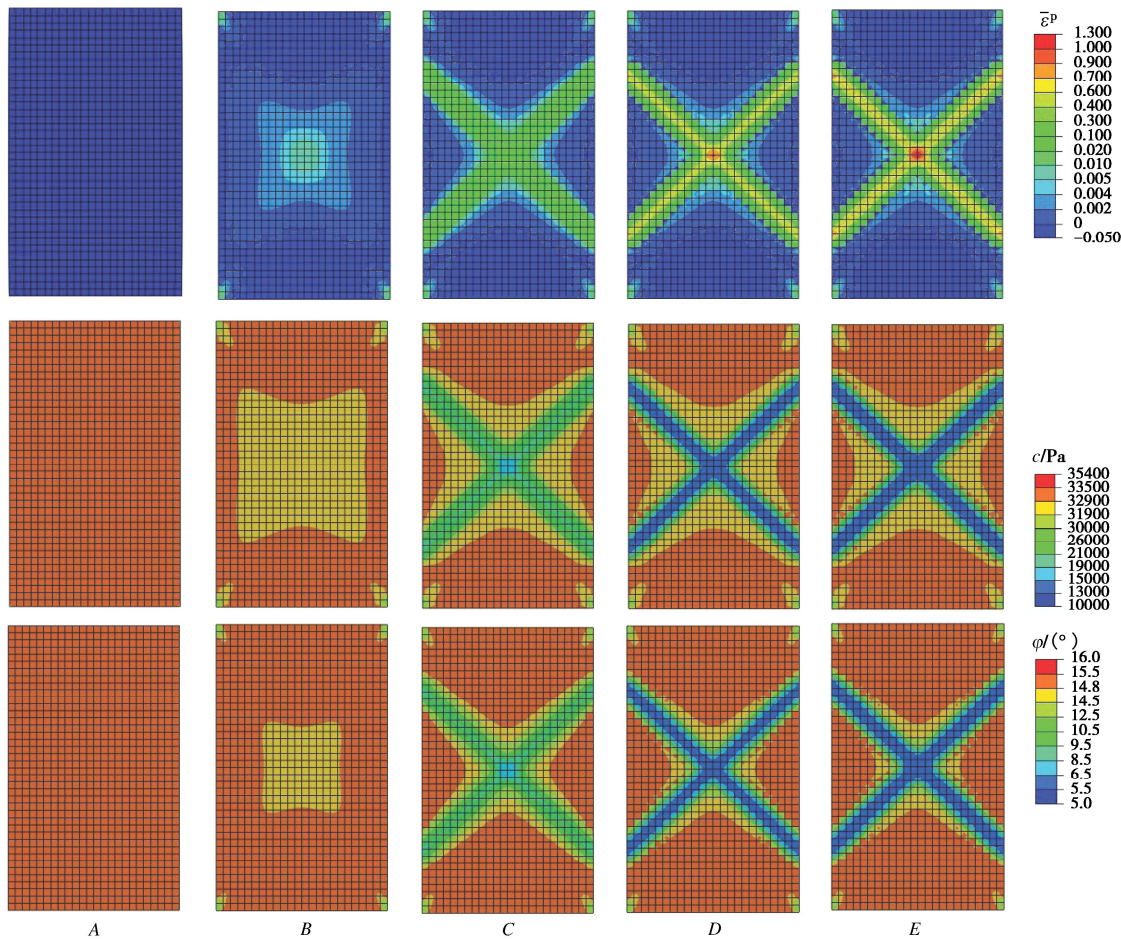


图 16 不同阶段的等效塑性剪应变、黏聚力以及内摩擦角分布图

Fig. 16 Contours of equivalent plastic strain, cohesion and internal friction angle of soils at different stages

围内基本不再变化, 这是由于此时该区域的土体在较大的塑性变形之后已接近于残余强度, 这也是该阶段得到的曲线趋于平缓的主要原因。由此可见, 本文建立的数值模型能够对包括峰后力学行为在内的整个土体受力破坏过程有效地进行模拟和分析。

## 4 结 论

为了更合理地分析土体应变局部化问题, 对 Ma 等<sup>[21]</sup>提出的土体强度非线性应变软化公式进行了完善, 并将其引入 Cosserat 连续体 DP-MC 屈服准则中, 推导了与之对应的本构方程积分的返回映射算法和弹塑性切线模量矩阵, 并利用有限元软件 ABAQUS 提供的用户自定义单元子程序接口 (UEL) 进行了数值实现。利用室内平面应变试验对模型进行了验证, 结果表明该模型较好地模拟了包括土体峰后软化段在内的整个受力破坏过程, 证明了该模型的准确性和有效性。进一步地, 通过对平面应变压缩算例的模拟, 得到 3 点结论。

(1) 当采用经典连续体模型模拟土体由应变软化引起的应变局部化现象时, 计算结果存在严重的网格依赖性, 而本文提出的 Cosserat 连续体模型能够有效地解决这一问题, 得到网格无关的有限元解。

(2) 研究表明, Cosserat 连续体模型具有反应土体的颗粒旋转和尺寸等某些细观效应的优势。计算结果表明材料的内部长度参数  $l_c$  越大, 得到的承载力系数也会越大, 剪切带也越宽。同时在剪切带区域有明显的材料点转动, 这与颗粒材料相关的试验观测结果是一致的。但需要说明的是本文的内部长度参数  $l_c$  的取值仅在经验和定性层面, 如何根据土体的客观物理量或者试验对  $l_c$  进行定量, 在 Cosserat 连续体有限元的应变局部化分析中, 目前还是一个难题。这也将是笔者后续研究的重点之一。

(3) 软化系数  $\omega$  和形状参数  $\eta$  均对土体强度有重要影响。 $\omega$  越小,  $\eta$  越大, 计算得到的极限承载力系数越小。对于峰后软化段,  $\eta$  主要影响土体到达残余强度的速度,  $\eta$  越大, 土体强度降低的越快;  $\omega$  主要影响残余强度的大小,  $\omega$  越小, 残余强度越低, 在  $\eta$  相同的情况下得到的整个软化段的强度也越低。

## 参考文献:

[1] 王 军, 蔡袁强, 潘林有. 双向激振下饱和软黏土应变软化现象试验研究[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(2): 178-185. (WANG Jun, CAI Yuanqiang, PAN Linyou. Degradation of stiffness of soft clay under bidirectional cyclic loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(2): 178-185. (in Chinese))

[2] QIU Z J, ELGAMAL A. Three-dimensional modeling of strain-softening soil response for seismic-loading applications[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2020, **146**(7): 04020053.

[3] 唐洪祥. 基于 Cosserat 连续体模型的应变局部化有限元模拟[D]. 大连: 大连理工大学, 2007. (TANG Hongxiang. Finite Element Simulation of Strain Localization Based on Cosserat Continuum Model[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2007. (in Chinese))

[4] BARDET J P, PROUBET J. A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media[J]. Géotechnique, 1991, **41**(4): 599-613.

[5] GALAVI V, SCHWEIGER H F. Nonlocal multilaminate model for strain softening analysis[J]. International Journal of Geomechanics, 2010, **10**(1): 30-44.

[6] 吕玺琳, 薛大为. 土体软化条件下条形基础地基承载力数值模拟[J]. 岩土工程学报, 2019, **41**(增刊 2): 9-12. (LÜ Xilin, XUE Dawei. Numerical simulation of bearing capacity of strip foundation under the condition of soil softening[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, **41**(S2): 9-12. (in Chinese))

[7] de Borst R. Simulation of strain localization: a reappraisal of the cosserat continuum[J]. Engineering Computations, 1991, **8**(4): 317-332.

[8] LI X K, TANG H X. A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modelling of strain localisation[J]. Computers & Structures, 2005, **83**(1): 1-10.

[9] TANG H X, WEI W C, LIU F, et al. Elastoplastic Cosserat continuum model considering strength anisotropy and its application to the analysis of slope stability[J]. Computers and Geotechnics, 2020, **117**: 103235.

[10] DE BORST R. A generalisation of  $J_2$ -flow theory for polar continua[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, **103**(3): 347-362.

[11] 马 刚, 常晓林, 周 伟, 等. 基于 Cosserat 理论的重力坝深层抗滑稳定分析[J]. 岩土力学, 2012, **33**(5): 1505-1512. (MA Gang, CHANG Xiaolin, ZHOU Wei, et al. Deep anti-sliding stability analysis of gravity dam based on Cosserat continuum theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(5): 1505-1512. (in Chinese))

[12] 唐嘉博, 马 刚, 涂承义, 等. 基于 Cosserat 理论的三维弹塑性模型及其在重力坝抗滑稳定分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2021, **40**(8): 1702-1712. (TANG Jiabo, MA Gang, TU Chengyi, et al. Three-dimensional elastic-plastic model based on Cosserat theory and its

- application in anti-sliding stability analysis of gravity dams[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2021, **40**(8): 1702-1712. (in Chinese))
- [13] 唐洪祥, 李锡夔. 基于 Cosserat 连续体的 CAP 弹塑性模型与应变局部化有限元模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(5): 960-970. (TANG Hongxiang, LI Xikui. Cap elastoplastic cosserat continuum model and finite element simulation of strain localization[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(5): 960-970. (in Chinese))
- [14] 唐洪祥, 韦文成, 林荣烽. 考虑强度各向异性的黏性土应变局部化有限元分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, **38**(7): 1485-1497. (TANG Hongxiang, WEI Wencheng, LIN Rongfeng. Finite element analysis of strain localization of cohesive soils considering strength anisotropy[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, **38**(7): 1485-1497. (in Chinese))
- [15] 唐洪祥, 韦文成. 耦合强度各向异性与应变软化的边坡稳定有限元分析[J]. 岩土力学, 2019, **40**(10): 4092-4100. (TANG Hongxiang, WEI Wencheng. Finite element analysis of slope stability by coupling of strength anisotropy and strain softening of soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, **40**(10): 4092-4100. (in Chinese))
- [16] 唐洪祥, 崔家铭, 张雪, 等. 岩土体大变形分析的 Cosserat-粒子有限元法[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(3): 495-502. (TANG Hongxiang, CUI Jiaming, ZHANG Xue, et al. Cosserat-particle finite element method for large deformation analysis of rock and soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(3): 495-502. (in Chinese))
- [17] CHU X H, YU C, XU Y J. The dilatancy and numerical simulation of failure behavior of granular materials based on Cosserat model[J]. Interaction and Multiscale Mechanics, 2012, **5**(2): 157-168.
- [18] 余村, 楚锡华, 唐洪祥, 等. 基于 Cosserat 连续体的颗粒破碎影响研究[J]. 岩土力学, 2013, **34**(增刊 1): 67-72, 79. (YU Cun, CHU Xihua, TANG Hongxiang, et al. Study on the influence of particle breakage based on cosserat continuum[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, **34**(S1): 67-72, 79. (in Chinese))
- [19] YUAN J Y, ZHANG Q H, LI B, et al. Experimental analysis of shear band formation in plane strain tests on Shanghai silty clay[J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2013, **72**(1): 107-114.
- [20] TANG H X, DU T, ZHANG L J, et al. A plane strain testing apparatus characterized by flexible loading and noncontact deformation measurement and its application to the study of shear band failure of sand[J]. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2018, **14**(9): 155014771879904.
- [21] MA G T, REZANIA M, NEZHAD M M. Stochastic assessment of landslide influence zone by material point method and generalized geotechnical random field theory[J]. International Journal of Geomechanics, 2022, **22**(4): 04022002.
- [22] LIU Y, CHEN X J, HU M. Three-dimensional large deformation modeling of landslides in spatially variable and strain-softening soils subjected to seismic loads[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2023, **60**(4): 426-437.
- [23] 邓楚键, 何国杰, 郑颖人. 基于 M-C 准则的 D-P 系列准则在岩土工程中的应用研究[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(6): 735-739. (DENG Chujian, HE Guojie, ZHENG Yingren. Studies on Drucker-Prager yield criterions based on M-C yield criterion and application in geotechnical engineering[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(6): 735-739. (in Chinese))
- [24] 楚锡华, 徐远杰. 基于形状改变比能对 M-C 准则与 D-P 系列准则匹配关系的研究[J]. 岩土力学, 2009, **30**(10): 2985-2990. (CHU Xihua, XU Yuanjie. Studies on transformation from M-C criterion to Drucker-Prager criterions based on distortion energy density[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, **30**(10): 2985-2990. (in Chinese))
- [25] WEI W C, TANG H X, SONG X Y. Effects of strength anisotropy and strain softening on soil bearing capacity through a cosserat nonlocal finite-element method[J]. International Journal of Geomechanics, 2024, **24**(5): 04024081.
- [26] DUXBURY P, LI X K. Development of elasto-plastic material models in a natural coordinate system[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **135**(3/4): 283-306.
- [27] HALL S A, BORNERT M, DESRUES J, et al. Discrete and continuum analysis of localised deformation in sand using X-ray  $\mu$ CT and volumetric digital image correlation[J]. Géotechnique, 2010, **60**(5): 315-322.
- [28] 孙德安, 陈立文, 甄文战. 不同三维应力路径下超固结黏土变形局部化[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(增刊 1): 46-51. (SUN Dean, CHEN Liwen, ZHEN Wenzhan. Deformation localization of overconsolidated clay under different three-dimensional stress paths[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(S1): 46-51. (in Chinese))