

DOI: 10.11779/CJGE20230332

# 基于间接热力学方法的变换应力方法推导

姚仰平<sup>1</sup>, 何 冠<sup>2</sup>, 崔文杰<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学交通科学与工程学院, 北京 100191; 2. 中国五冶集团, 四川 成都 610063)

**摘要:** 金属等没有剪胀性的连续材料在根据试验结果建立屈服函数后, 可以由 Drucker 公设及其相关联流动法则推论直接唯一地确定出与屈服函数一致的塑性势函数。但大量试验结果与理论分析都表明 Drucker 公设对于土材料这种有剪胀性的颗粒材料并不适用, 所以更具普适性的热力学成了正确描述土材料塑性流动方向的必要条件。然而塑性流动方向无法只由热力学这一描述材料特性的必要条件唯一地确定, 因此便出现了先由试验确定屈服面与塑性流动方向再对其进行热力学验证的间接热力学方法。此外, 由于土材料在三维应力空间中不同洛德角对应于子午面上的应力应变规律并不一致, 因此一般会通过三轴化方法来描述土材料在三维应力空间中的力学特性。三轴化方法会使得不同子午面上的屈服面及塑性流动方向与三轴压缩状态下所建立的本构模型有所不同, 导致三轴化后的本构模型是否符合热力学原理成为新的问题。所以本文利用间接热力学方法推导了符合热力学原理的三轴化方法, 并通过构建变换应力空间将其整理为更有实用性的变换应力方法。

**关键词:** 塑性流动; 剪胀性; 间接热力学方法; 三轴化; 变换应力方法

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2024)07-1368-10

作者简介: 姚仰平(1960—), 男, 博士, 教授, 主要从事土体本构理论方面的教学和科研工作。E-mail: yaoyp@buaa.edu.cn。

## Derivation of transformed stress method based on indirect thermodynamic method

YAO Yangping<sup>1</sup>, HE Guan<sup>2</sup>, CUI Wenjie<sup>1</sup>

(1. School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. China MCC5 Group Corp. Ltd., Chengdu 610063, China)

**Abstract:** The unique plastic potential function consistent with the yield function can be directly determined by the Drucker's postulate and its associated flow law deduction after the yield function is established for the continuous materials without dilatancy, such as metals. However, a large number of test results and theoretical analyses show that the Drucker's postulate is not applicable to soils, which is a type of granular material with dilatancy, then the more universal thermodynamics is selected as a new necessary condition for correctly describing the plastic flow direction of soils. Nevertheless, the plastic flow direction cannot be determined solely by thermodynamics, which is only a necessary condition to describe the properties of materials. Therefore, the indirect thermodynamic method is developed in which the yield surface and the plastic flow direction are firstly determined with tests and then verified by thermodynamics. In addition, since the stress-strain relationships on the meridional planes corresponding to different Lode angles in the three-dimensional stress space of soils are not consistent to each other, the generalized methods are generally used to describe such mechanical characteristics of soils. Meanwhile, the generalized yield surface and plastic flow direction on different meridional planes will be different from those in the constitutive models established under triaxial compression state, so whether the generalized constitutive model conforms to the thermodynamics becomes a new problem. Therefore, the indirect thermodynamic method is used to derive a generalized method conforming to the principles of thermodynamics, which is then organized into a more practical transformed stress method by constructing the transformation stress space.

**Key words:** plastic flow; dilatancy; indirect thermodynamic method; generalization; transformed stress method

## 0 引言

弹塑性材料中塑性应变的发展比较复杂, 其与应力、应变状态等多种因素相关。一般用塑性流动方向表示其不同方向塑性应变增量的比例关系, 并通常以

塑性势面来描述塑性流动方向在应力空间中的分布, 塑性流动方向与塑性势面处处垂直。

金属等连续材料一般通过 Drucker 公设来简单地确定塑性流动方向。Drucker<sup>[1]</sup>在 1952 年提出了 Drucker 公设, 并在其基础上推导出了屈服面的外凸性以及相关联流动法则。虽然 Drucker 公设只是描述材料特性的一个必要条件, 但是当通过试验确定屈服函数之后, 就能够根据相关联流动法则唯一地确定出与屈服函数一致的塑性势函数, 塑性流动方向也就被唯一地确定了。

由颗粒构成的非连续土材料一开始也借用了连续材料的本构建模方法, 并基于 Drucker 公设及相关联流动法则也发展出了相应的岩土本构模型, 如剑桥模型<sup>[2-3]</sup>、一些边界面模型<sup>[4-5]</sup>、下加载面模型<sup>[6]</sup>、统一硬化模型<sup>[7-11]</sup>等。但是土材料与金属材料不同, 具有剪胀性, 即颗粒材料在剪切变形过程中会出现体积变化<sup>[12-18]</sup>。土材料的剪胀性会明显影响其塑性体积应变的发展, 许多学者基于试验结果对 Drucker 公设对于土材料的适用性提出了质疑<sup>[19-22]</sup>。Yao 等<sup>[23]</sup>也通过严谨的理论分析进一步证明其不适用于土材料。

因此, 具有普适性的热力学基本原理被选为了正确描述土材料塑性流动方向的新必要条件。Collins 等<sup>[24-25]</sup>建立的土材料临界状态本构模型框架是由热力学原理构建本构关系的典型代表。但是热力学原理也只是描述材料特性需要满足的一个必要条件, 直接根据热力学建立的本构框架只能为土材料塑性流动方向提供合理的范围, 而不能唯一地确定出塑性流动方向。所以 Yao 等<sup>[23]</sup>又在此基础上将试验规律与热力学相结合, 提出了新的间接热力学方法来合理确定出唯一的塑性流动方向。

此外, 通常在应力空间中三轴压缩子午面上构造的本构模型最终是要应用于三维空间中材料应力应变规律的计算, 而通过三维化方法将三轴压缩状态对应于子午面上的本构模型应用到其他子午面上的应力应变计算时, 本构模型的实际特征会发生改变, 因此在对本构关系三维化的过程中能否保证其仍然符合热力学基本原理也是一个需要解决的问题。所以本文利用间接热力学方法来推导了符合热力学原理的三维化方法。

## 1 确定剪胀性材料塑性流动方向的直接热力学方法

Ziegler 等<sup>[26]</sup>提出了使用自由能与耗散能构建弹性应力应变规律的一般性理论, 从而直接由能量分析确定塑性流动方向。该理论被应用到了土力学中<sup>[27-29]</sup>, 并被 Collins 等<sup>[24-25]</sup>与临界状态理论相结合, 发展出了基于热力学的岩土本构模型框架, 用于建立能够自动

满足热力学第二定律的本构模型。

Collins 等<sup>[24-25]</sup>根据热力学第一和第二定律将土材料等温变形过程中的能量方程表示为

$$dW = d\Psi_1 + d\Psi_2 + \Phi \quad . \quad (1)$$

式中:  $dW = \text{tr}(\sigma d\epsilon)$ , 是材料中有效应力做功的增量; 函数  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  分别为与弹性应变、塑性应变相关的自由能,  $\Psi_2$  为被储存起来而并没有被耗散的塑性功; 函数  $\Phi$  为能量耗散的增量。

基于耗散能与塑性应变的相关性, 可分别定义与塑性体应变  $\epsilon_v^p$ 、塑性剪应变  $\epsilon_d^p$  相对应的耗散应力不变量  $\pi$ ,  $\tau$ , 由此可将耗散能增量表示为

$$\Phi = \pi d\epsilon_v^p + \tau d\epsilon_d^p \quad . \quad (2)$$

式中:  $\pi$  为耗散正应力;  $\tau$  为耗散剪应力。根据能量耗散不可逆的原理可知耗散能增量  $\Phi$  必定非负, 那么在  $\pi$ ,  $\tau$  所构建的耗散应力空间中根据该条件就可推导出塑性流动方向在各象限内的合理分布范围如图 1 所示。

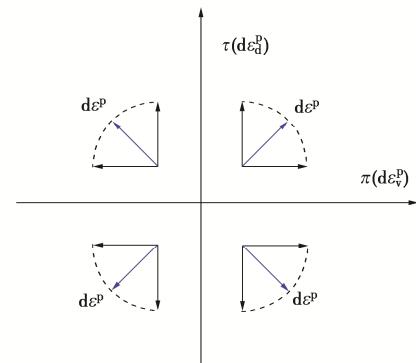


图 1 耗散应力空间中的塑性流动方向分布范围

Fig. 1 Distribution ranges of plastic flow direction in dissipative stress space

根据图 1 所示塑性流动方向的分布范围, 可以发现能够用于描述该分布范围最简单、光滑连续的塑性势面形状就是椭圆, 如图 2 所示。

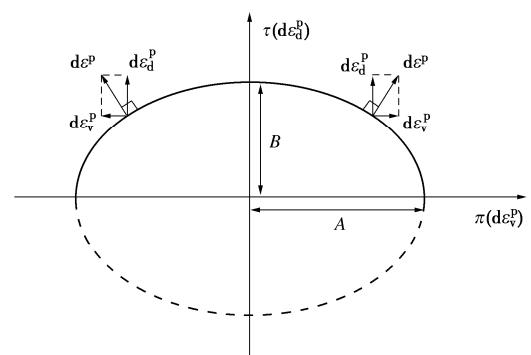


图 2 耗散应力空间中的椭圆塑性势面

Fig. 2 Elliptical plastic potential surface in dissipative stress space  
该耗散应力空间中的椭圆塑性势面表达式写为

$$\frac{\pi^2}{A^2} + \frac{\tau^2}{B^2} = 1 \quad . \quad (3)$$

式中:  $A$ ,  $B$  为与应力相关的系数函数。耗散应力空间中的塑性流动方向可以通过式(3)得到

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = \frac{\pi}{\tau} \frac{B^2}{A^2} \quad . \quad (4)$$

由热力学可得系数函数  $A$  和  $B$  都是真应力状态量的一次齐次函数。

由于耗散能增量函数是通过耗散应力进行定义, 所以直接推导出的塑性势函数是在耗散应力空间, 而不是在真应力空间中。所以在应用该方法描述材料应力应变关系时, 还需要建立真实应力与耗散应力的对应关系; 同时塑性势函数中  $A$  和  $B$  的具体表达形式也需要进一步明确。

这表示只基于热力学基本原理这一描述材料应力应变关系的必要条件无法直接求解出唯一的塑性流动方向。因此 Collins 等<sup>[24]</sup>直接在该框架下构造函数来得到耗散应力与真实应力的对应关系以及  $A$  和  $B$  的具体表达形式, 从而凑出真实应力空间中的屈服函数以及塑性流动方向。为了与后文中的新方法进行区分, 这个将构造函数与热力学相结合来描述弹塑性应力应变关系的流程被称为直接热力学方法。

但是该方法中的构造函数  $A$ 、 $B$  具有一定的随意性, 同时由于构造函数与真实应力空间中的屈服函数、塑性流动方向之间的复杂耦合关系, 该方法在构造函数时难以兼顾材料真实的屈服规律以及塑性流动方向。

## 2 确定剪胀性材料塑性流动方向的间接热力学方法

由于具有剪胀性的土材料不能再通过 Drucker 公设和相关联流动法则直接确定出与屈服函数相一致的塑性势函数, 同时直接热力学方法也缺乏唯一性, 难以准确地反映材料真实的屈服规律以及塑性流动方向分布规律。因此, Yao 等<sup>[23]</sup>又进一步提出了先分别建立符合试验规律的屈服函数及塑性势函数再利用热力学的本构模型框架对其进行验证的间接热力学方法来合理确定土材料的塑性流动方向。这里以一个屈服面为水滴形的非关联本构模型为例对间接热力学方法进行简单演示。

### 2.1 屈服函数

以常用的塑性体积应变作为硬化参量对土材料试验结果进行整理能够得到水滴形的屈服面。由于不同土材料的水滴形屈服面的形状并不完全相同, 本文便通过在椭圆形屈服函数的基础上增加一项  $\chi q^2$ , 为不

同土材料的屈服面构造出具有一般性的表达式:

$$f = \ln \frac{p}{p_x} + \ln \left( \frac{M^2 p^2 + q^2}{M^2 p^2 - \chi q^2} \right) = 0 \quad . \quad (5)$$

式中:  $\chi$  为形状参数, 其取值范围为  $0 \leq \chi < 1$ , 当  $\chi = 0$  时屈服面为椭圆;  $M$  为临界状态应力比。将不同  $\chi$  值的屈服面绘制在应力平面中如图 3 所示。

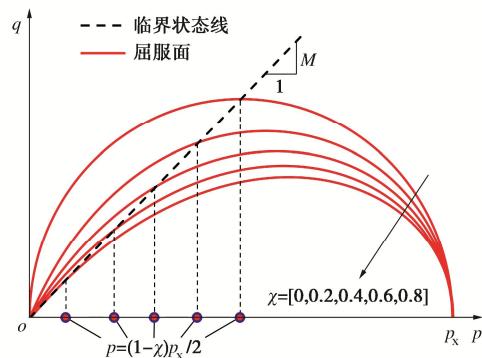


图 3 水滴形屈服面

Fig. 3 Drop-shaped yield surfaces

### 2.2 塑性势函数

土材料的塑性流动方向也通过试验规律来确定。塑性体应变与塑性剪应变增量比值的变化规律通常用与应力比  $\eta$  相关的函数式  $\Gamma$  来描述<sup>[14]</sup>:

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = \Gamma(\eta) \quad . \quad (6)$$

不同学者根据土材料剪切试验结果整理得到了不同的函数  $\Gamma$  表达式<sup>[3, 15-18, 30-33]</sup>。其中 Roscoe 等<sup>[3]</sup>提出的式(7)所示函数  $\Gamma$  因为用简单的公式抓住了特征点的塑性流动规律, 在土材料的本构建模中得到了广泛的运用<sup>[2, 3, 6-8, 34-35]</sup>, 因此其被选为函数  $\Gamma$  的一个例子来描述土材料的塑性流动方向。

$$\Gamma(\eta) = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad . \quad (7)$$

根据式(7)可构造并求解微分方程得到椭圆形塑性势面的表达式为

$$\left[ p - \frac{p_y}{2} \right]^2 + \frac{q^2}{\left( \frac{p_y}{2} \right)^2} + \frac{q^2}{\left( M \frac{p_y}{2} \right)^2} = 1 \quad . \quad (8)$$

式中:  $p_y$  为该椭圆塑性势面在  $p$  轴上的截距。在应力空间中绘出某一应力状态点所对应的椭圆塑性势面与水滴形屈服面如图 4 所示。

从图 4 中能够看出屈服面上的任一应力状态点都能够找到唯一对应的塑性势面并确定塑性流动方向, 表明该塑性势面与屈服面相容。由此两者相结合实现了对土材料非关联塑性流动的描述。

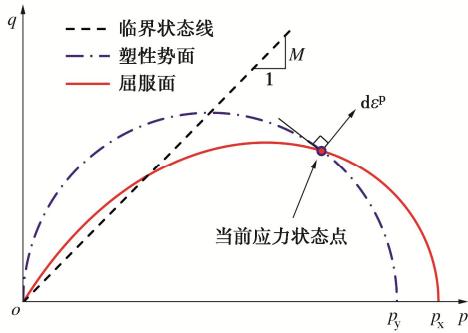


图 4 水滴形屈服面与椭圆塑性势面

Fig. 4 Drop-shaped yield surface and elliptical plastic potential surface

上述屈服函数与塑性势函数都是根据试验结果构建而来, 但是所构建函数对试验规律的描述相对于试验结果都存在一定的误差。当误差没有大到使得最终所建立的本构关系违背基本的热力学原理通常都是可以接受的, 反之所构建的函数就需要进行调整。因此通过试验构造的屈服函数与塑性势函数还需要进一步的验证。

### 2.3 热力学验证

该验证的原理是将构造的本构方程引入热力学框架中来求解不同应力空间的映射关系以及系数函数  $A$ 、 $B$  的具体表达式。求解出唯一且合理的函数  $A$ 、 $B$  可以表明构造的本构关系可以满足热力学中耗散能增量不小于 0 的要求, 因此该本构关系也符合热力学的基本原理。

按这个思路对前文根据试验所构建的屈服函数与塑性势函数进行验证。首先确定耗散应力空间与真实应力空间中应力状态的对应关系。Collins 等<sup>[36]</sup>根据土材料的硬化特征所提出的真实应力与耗散应力之间的转换形式为

$$p = \rho + \pi, \quad q = \tau \quad . \quad (9)$$

式中:  $\rho$  为真实正应力  $p$  与耗散正应力  $\pi$  的差值, 与塑性自由能相关。由上文所构建非关联塑性流动的描述方法可以得到, 如图 3 所示水滴形屈服面在临界状态所对应的  $p$  值为  $(1-\chi)p_x/2$ 。而临界状态特征点的塑性流动方向应表示无塑性体应变产生, 塑性剪应变无限发展。该特征刚好对应于图 2 中塑性势面最高点 ( $\pi=0$ ), 将该对应关系代入式 (9) 能够得到

$$\rho = (1-\chi)\frac{p_x}{2} \quad . \quad (10)$$

因此真实应力与耗散应力的完整转换关系为

$$\pi = p - (1-\chi)\frac{p_x}{2}, \quad \tau = q \quad . \quad (11)$$

根据真实应力与耗散应力的转换关系, 可在同一平面中将真实应力空间与耗散应力空间同时展示出来, 如图 5 所示。

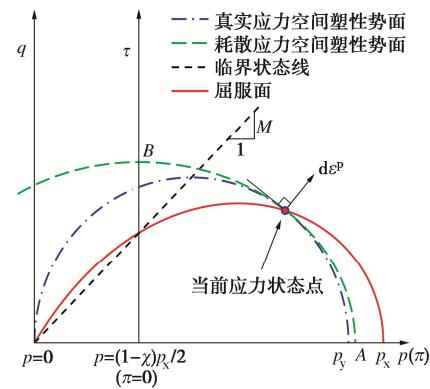


图 5 屈服面与两个应力空间中的塑性势面

Fig. 5 Plastic potential surfaces in two stress spaces and yield surface

其中, 耗散应力空间与真实应力空间中的塑性势面在当前应力状态点相切, 这是因为在不同应力空间中所表示的塑性流动方向应一致。根据这一特征能够联立分别根据真实应力与耗散应力描述塑性流动方向的公式 (4), (11), (6), (7), 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} &= \frac{p - (1-\chi)\frac{p_x}{2}}{q} \frac{B^2}{A^2}, \\ \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} &= \frac{M^2 p^2 - q^2}{2pq}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由式 (12) 可简化得到

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{M^2 p^2 - q^2}{p[2p - (1-\chi)p_x]} \quad . \quad (13)$$

用参量  $\beta$  代替  $B^2/A^2$  以简化表达。将  $\beta$  与应力转换公式 (11) 代入塑性势面公式 (3) 中可以将塑性势面表示为

$$\frac{\left[p - (1-\chi)\frac{p_x}{2}\right]^2}{A^2} + \frac{q^2}{\beta A^2} = 1 \quad . \quad (14)$$

结合式 (13), (14) 可以求得函数  $A$ 、 $B$  的表达式为

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\left[p - (1-\chi)\frac{p_x}{2}\right]^2 + \frac{q^2}{\beta}}, \\ B &= \sqrt{\beta \left[p - (1-\chi)\frac{p_x}{2}\right]^2 + q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中:  $\beta$  与  $p_x$  均为应力  $p$ 、 $q$  的函数, 可得所求系数函数  $A$ 、 $B$  的表达式均为应力的一次齐次函数, 满足热力学方法的要求。同时所得结果也表示图 5 中屈服面上任意一点的塑性流动方向都能够找到相对应的椭圆塑性势面。因此推导结果表明, 唯一且合理的系数函数  $A$ 、 $B$  能够由上文所构建简单非关联模型解出, 该模型符合热力学基本原理。

间接热力学方法与直接热力学方法在基本理论方面是一致的，但是前者的具体操作方法更加合理。间接热力学方法能够方便地结合热力学原理与试验规律，唯一且合理地确定出土材料的塑性流动方向。而且间接热力学方法还可以用来验证其他已有的本构模型是否符合热力学基本原理。

### 3 间接热力学方法在三维化方法中的应用

通常在对土材料的应力应变特性进行描述时，都是在三轴压缩的应力平面内构建本构关系，如前述  $p-q$  平面中的本构模型。但是所建立的本构关系最终是要用于描述土材料在一般应力空间中的力学特性，而且土材料的应力应变规律不仅与其所受荷载有关，还与其当前的应力应变状态有关，这样复杂的力学规律并不能在简单的二维应力平面上得到完整描述。所以对于构建在  $p-q$  平面中的本构模型一般会再借助三维化方法扩展到三维应力空间中。本构模型的三维化方法本质上就是在三轴压缩与三轴伸长等应力条件所对应子午面上的应力应变关系之间进行插值，从而构造出不同应力洛德角下的本构关系。但由此所构造而来的其他子午面上的本构关系与原本三轴压缩平面中的本构关系会有所不同，因此除了对原本三轴压缩平面中描述土材料应力应变关系的表达式进行验证，也有必要再保证由三维化方法发展而来的三维应力空间中各子午面上土材料应力应变规律的合理性。因此本文基于间接热力学方法的思路来进行本构模型三维化方法的构造。

为了使过程更简单清晰，本文选用屈服面与塑性势面均为椭圆形的修正剑桥模型作为三维化对象。

#### 3.1 三维应力空间中的屈服面

修正剑桥模型在  $p-q$  平面上构建的椭圆形屈服面的表达式为

$$f = \ln \frac{p}{p_x} + \ln \left( \frac{M^2 p^2 + q^2}{M^2 p^2} \right) = 0 \quad (16)$$

该模型没有考虑在三维应力空间中不同应力洛德角条件下屈服特性的不同，因此本文结合广泛使用的 SMP 强度准则对其进行三维化。三维化的原理是在  $\pi$  平面上对等效偏应力  $q$  进行修正，使得  $\pi$  平面上屈服面符合 SMP 强度准则的条件。由此可整理得到三维应力空间中满足 SMP 强度准则的新屈服面公式为

$$\tilde{f} = \ln \frac{p}{p_x} + \ln \left( \frac{M^2 p^2 + q_c^2}{M^2 p^2} \right) = 0 \quad , \quad (17)$$

其中， $q_c$  为构造参量，可表示为

$$q_c = \frac{6pq}{\sqrt{\cos(3\theta)q^3 - 108p^3 + 9pq^2} - q} \quad . \quad (18)$$

式中， $\theta$  为应力洛德角。

三维化后的屈服面在  $\pi$  平面上的形状如图 6 所示。

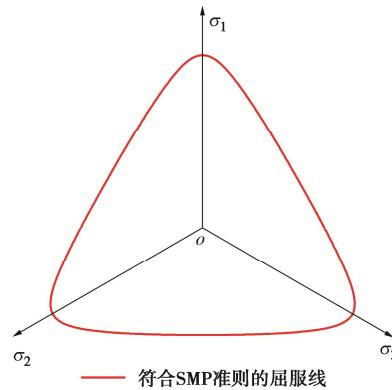


图 6  $\pi$  平面上三维化后的屈服线

Fig. 6 Generalized yield envelope on  $\pi$  plane

三维化后的屈服面在  $p-q$  平面上的形状也发生了改变，将三轴压缩与三轴伸长应力状态分别对应  $p-q$  平面上的屈服面截面画在同一平面上如图 7 所示。

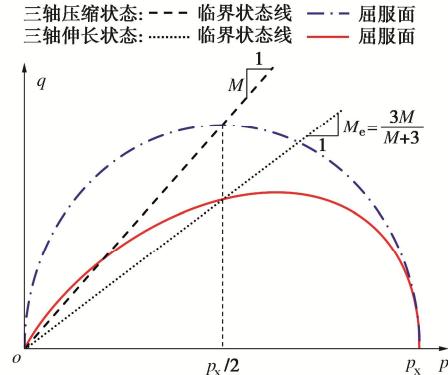


图 7 三轴压缩与三轴伸长应力状态下的屈服面

Fig. 7 Yield surfaces under triaxial compression and triaxial extension stress states

#### 3.2 三维应力空间中的塑性流动方向

三维化前的修正剑桥模型使用的是相关联流动法则，也就是屈服面与描述塑性流动方向的塑性势面完全重合。塑性势函数由式 (16) 得到为

$$g = \ln \frac{p}{p_x} + \ln \left( \frac{M^2 p^2 + q^2}{M^2 p^2} \right) = 0 \quad . \quad (19)$$

而从图 7 中可以明显看出，三轴伸长应力状态的屈服面在  $p-q$  平面上的最高点与临界状态 ( $M_e$ ) 并不对应。那么此时如果在三维应力空间中仍直接使用相关联流动法则来确定塑性流动方向，在临界状态处

所得到的塑性流动方向就不竖直, 表示还有塑性体应变产生, 这与临界状态的特性明显不符。

因此, 本文对本构模型中塑性流动方向的描述单独进行三维化来解决三维化后本构模型在临界状态处的塑性流动方向问题。修正剑桥模型原本的塑性流动方向可以用剪胀方程直接表示为

$$\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} = \frac{M^2 p^2 - q^2}{2pq} \quad (20)$$

为了使三维化的模型能够在不同洛德角下均能表现出正确的临界状态特性, 式(20)所示塑性流动方向通过三维化被修正为

$$\frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} = \frac{M^2 p^2 - q_c^2}{2pq_c} \quad (21)$$

其中,  $q_c$  如式(18)所示。由此可将三维化的屈服面与塑性流动方向表示出来, 如图8所示。

这里直接用塑性剪应变增量与塑性体应变增量的比例式来表示塑性流动方向, 而没有给出塑性势面。这是因为三维化的塑性流动方向分布规律较为复杂, 不能用一个简单的塑性势面来进行表示。但这一点并不影响应力应变关系的计算。

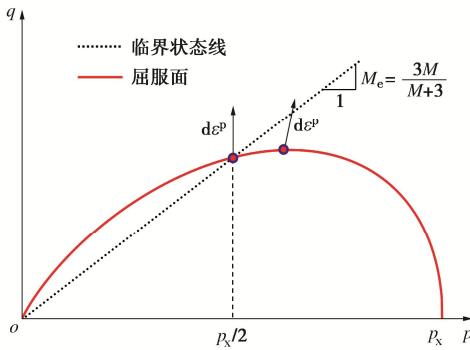


图8 三维化的屈服面与塑性流动方向

Fig. 8 Yield surfaces and plastic flow direction after generalization

### 3.3 三维化本构模型的热力学验证

在确定修正剑桥模型三维化的屈服函数与塑性势函数之后, 便可将其代入间接热力学方法中求解耗散应力与真实应力的对应关系以及系数函数  $A$ 、 $B$  的具体表达式。Yao 等<sup>[23]</sup>已经对  $p-q$  平面上的修正剑桥模型进行了验证, 因此如果用变换应力方法三维化的修正剑桥模型也能够通过间接热力学方法的验证, 那么也就表明了该三维化方法的合理性。

根据图8能够直接得到临界状态所对应的横坐标为  $p = p_x/2$ 。因为临界状态的塑性流动方向应与图2中耗散应力空间中椭圆塑性势面最高点 ( $\pi = 0$ ) 相对应, 所以结合真实应力与耗散应力的转换公式(9)便可求出转换压力  $\rho = p_x/2$ 。那么此时真实应力与耗散应力的完整转换关系可写为

$$\pi = p - p_x/2, \quad \tau = q \quad (22)$$

根据真实应力空间与耗散应力空间之间的应力转换关系, 可以将不同应力空间中的屈服面与塑性势面表示在同一平面中, 如图9所示。

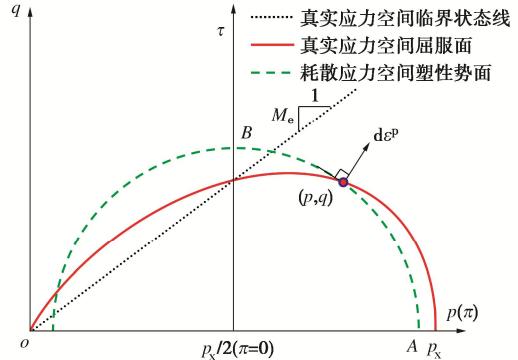


图9 三轴伸长应力状态下不同应力空间中的屈服面与塑性势面

Fig. 9 Yield surfaces and plastic potential surface in different stress spaces under triaxial extension stress state

图9中真实应力空间中的塑性流动方向是由式(21)直接确定。根据耗散应力空间与真实应力空间中的塑性势函数式(3)与(21), 可以分别用耗散应力与真实应力将塑性流动方向分别表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} &= \frac{\pi}{\tau} \frac{B^2}{A^2}, \\ \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_d^p} &= \frac{M^2 p^2 - q_c^2}{2pq_c}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

再根据塑性流动方向的唯一性, 结合式(22)可以得到

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{q(M^2 p^2 - q_c^2)}{pq_c(2p - p_x)} \quad (24)$$

仍然用参量  $\beta$  代替  $B^2/A^2$  以简化表达。将  $\beta$  与式(22)代入耗散应力空间塑性函数式(3)中可得

$$\frac{\left(p - \frac{p_x}{2}\right)^2}{A^2} + \frac{q^2}{\beta A^2} = 1 \quad (25)$$

结合式(24)即可求解出系数函数  $A$ 、 $B$  表达式为

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\left(p - \frac{p_x}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{\beta}}, \\ B &= \sqrt{\beta \left(p - \frac{p_x}{2}\right)^2 + q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中,  $\beta$ 、 $p_x$  与  $q_c$  均为应力  $p$ 、 $q$  的函数 (洛德角  $\theta$  在特定应力子午面上为常数), 因此所求系数函数  $A$ 、 $B$  的表达式均为应力的一次齐次函数。同时它们也能够在不同应力条件下得到合理的值, 从而确保了该三

维化后的本构模型在耗散应力空间中总是能够找到相应的塑性势面，确定出合理的塑性流动方向。也就是说，该三维化的修正剑桥模型满足热力学方法的要求，同时把修正剑桥模型从  $p-q$  平面扩展到三维应力空间中的三维化方法也符合热力学基本原理。

## 4 变换应力三维化方法

根据式(17)、(18)与(21)所示的三维应力空间中屈服面与塑性势面，就能在符合热力学的条件下对土材料在三维应力空间中的应力应变特性进行合理描述。但是式(17)、(18)、(21)的形式都比较复杂，同时塑性流动方向只能用一个数学公式表示，也不能像塑性势面一样直观地看出塑性流动方向的分布。因此，本文在此描述方法的基础上，通过构造一个新的应力空间来实现对屈服面与塑性势面简单且直观的描述。

### 4.1 变换应力空间的构造

分析式(17)可以发现，如果以平均正应力  $\bar{p}$  与变量  $q_c$  来构建新的应力平面，那么在这个新应力平面中的屈服面形状也为椭圆形，且不受应力洛德角的影响，能够更简单地描述土材料的屈服特性。将新应力空间中的平均正应力与等效剪应力分别记为  $\tilde{p}$  与  $\tilde{q}$ ，那么就有

$$\begin{cases} \tilde{p} = p \\ \tilde{q} = q_c \end{cases} \quad (27)$$

由该应力变换公式得到的新应力空间就被称为变换应力空间。那么变换应力空间中的屈服面就可写为

$$\tilde{f} = \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_x} + \ln \left( \frac{M^2 \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2}{M^2 \tilde{p}^2} \right) = 0 \quad (28)$$

由此可绘制出不同应力空间中的屈服面如图 10 所示。

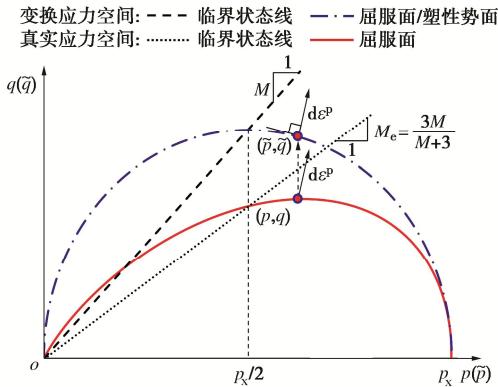


图 10 三轴伸长应力状态下变换应力空间与真实应力空间中的屈服面

Fig. 10 Yield surfaces in transformed stress space and true stress space under triaxial extension stress state

从图 10 中可以直观地看到在变换应力空间中的屈服面总是椭圆形，所以不同洛德角对应于子午面上的应力应变关系都与三轴压缩应力状态子午面上的相同，那么在变换应力空间中就能够更简单地对不同洛德角的应力应变关系进行描述。

此外，从图 10 中能够看出屈服面最高点与变换应力空间中的临界状态点重合，那么在变换应力空间中直接使用相关联流动法则来描述塑性流动方向也并不会出现问题。因此由式(28)将其对应的塑性势函数写为

$$\tilde{g} = \ln \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_x} + \ln \left( \frac{M^2 \tilde{p}^2 + \tilde{q}^2}{M^2 \tilde{p}^2} \right) = 0 \quad (29)$$

分析式(29)可以发现，该塑性势面所求出的外法线方向正好与前文中构造的塑性流动方向式(21)相同。那么再结合前文中对三维化方法的验证可知，这样的描述方式也是符合热力学原理的。

因此，通过构造变换应力空间，能够直接在变换应力空间中使用三维化前的屈服函数与塑性势函数形式，从而实现对三维应力空间中土材料屈服与塑性流动规律更简单且直观的描述。

### 4.2 变换应力与真实应力的映射关系

由于式(27)所示的应力变换关系只是在  $p-q$  与  $\tilde{p}-\tilde{q}$  平面间，而没有给出变换应力空间与真实应力空间中应力洛德角之间的对应变换关系，因此也无法由该关系直接推导出真实应力空间的应力分量  $\sigma_{ij}$  与变换应力空间中的应力分量  $\tilde{\sigma}_{ij}$  的对应关系。因此，在式(27)的基础上再另外增加不同应力空间洛德角的简单转换关系  $\tilde{\theta} = \theta$ ，从而得到两个应力空间中应力的完整变换关系。那么此时两个应力空间间的应力映射可绘制在  $\pi$  平面上如图 11 所示。

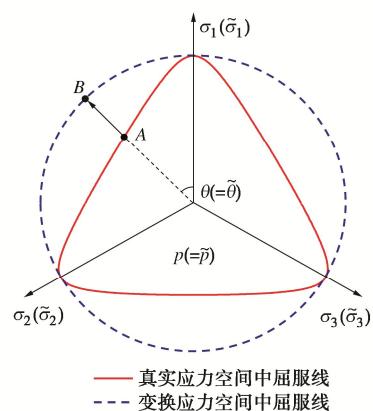


图 11 变换应力方法示意图

Fig. 11 Schematic diagram of transformed stress method

根据变换应力空间与真实应力空间中应力的映射关系，还可进一步得到两个应力空间中应力分量  $\sigma_{ij}$  与

$\tilde{\sigma}_{ij}$  的对应关系为

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \begin{cases} p\delta_{ij} + \frac{q_c}{q}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}), & (q \neq 0) \\ \sigma_{ij}, & (q = 0) \end{cases} \quad (30)$$

式中:  $\delta_{ij}$  为克罗内克函数;  $q_c$  为当前应力点所在屈服面在三轴压缩状态对应洛德角上的等效剪应力  $q$  值, 如式 (18) 所示。

通过这样的变换应力空间来描述土材料在三维应力空间中应力应变关系的方法就被称为变换应力方法<sup>[37-39]</sup>, 该方法凭借简单的公式与广泛的适用性已经得到了大量应用<sup>[40-47]</sup>。

值得注意的是,  $q_c$  的具体表达形式与三维化过程中采用的屈服准则相关, 其中式 (18) 所示  $q_c$  表达式为根据 SMP 准则所求得的表达式。另外还可根据其他屈服准则得到不同的  $q_c$  表达式, 从而实现将本构模型与不同的屈服准则相结合, 具有更多的自由度。

## 5 结 论

由于 Drucker 公设不适用于具有剪胀性的土材料, 因此具有普适性的热力学原理成为了确定土材料塑性流动方向的必要条件。Yao 等<sup>[23]</sup>针对原有直接热力学方法在塑性流动方向唯一性以及反映材料真实特性上所存在的问题, 为土材料本构建模提出了新的间接热力学方法。本文基于间接热力学方法对岩土材料在三维应力空间中的力学特性进行了描述, 并得到了符合热力学原理的变换应力三维化方法。

(1) 直接热力学方法无法根据热力学基本原理直接地确定出唯一的塑性流动方向, 因而只能使用具有随意性的构造函数来凑出真实应力空间中的应力应变关系, 难以兼顾真实的屈服规律与塑性流动方向。

(2) 间接热力学方法通过总结试验规律直接确定出土材料的屈服面与塑性势面, 并进行热力学验证。其在保证结果唯一性的同时, 所确定的屈服规律与塑性流动方向也更合理。

(3) 通过使用间接热力学方法构造出了土材料三维力学特性的描述方法, 并通过引入变换应力空间得到了符合热力学原理的变换应力三维化方法。

## 参考文献:

- [1] DRUCKER D C, PRAGER W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1952, **10**(2): 157-165.
- [2] ROSCOE K H, SCHOFIELD A N. Mechanical behaviour of an idealized 'wet' clay[C]// Proceedings of the Proc European Conf on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Wiesbaden, 1963.
- [3] ROSCOE K, BURLAND J. On the Generalized Stress-Strain Behaviour of Wet Clay[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.
- [4] DAFALIAS Y F. Bounding surface plasticity: I mathematical foundation and hypoplasticity[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, **112**(9): 966-987.
- [5] DAFALIAS Y F, HERRMANN L R. Bounding surface plasticity: II application to isotropic cohesive soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, **112**(12): 1263-1291.
- [6] HASHIGUCHI K. Plastic constitutive equations of granular materials[C]// Proceedings of the Proc US-Japan Seminar Continuum Mech Stast Appr Mech Granular Materials, Tokyo, 1978.
- [7] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. Géotechnique, 2009, **59**(5): 451-469.
- [8] YAO Y P, GAO Z W, ZHAO J D, et al. Modified UH model: constitutive modeling of overconsolidated clays based on a parabolic hvorslev envelope[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2012, **138**(7): 860-868.
- [9] FENG X, YAO Y P, LI R N, et al. Loading-unloading judgement for advanced plastic UH model[J]. Acta Mechanica Sinica, 2020, **36**(4): 827-839.
- [10] YAO Y P, QU S, YIN Z Y, et al. SSUH model: a small-strain extension of the unified hardening model[J]. Science China Technological Sciences, 2016, **59**(2): 225-240.
- [11] LUO T, CHEN D, YAO Y P, et al. An advanced UH model for unsaturated soils[J]. Acta Geotechnica, 2020, **15**(1): 145-164.
- [12] NEDDERMAN R M. Statics and Kinematics of Granular Materials[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [13] ANDREOTTI B, FORTERRE Y, POULIQUEN O. Granular Media: between Fluid and Solid[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [14] ROWE P W. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences, 1962, **269**: 500-527.
- [15] CHANG C S, YIN Z Y. Modeling stress-dilatancy for sand under compression and extension loading conditions[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2010, **136**(6): 777-786.
- [16] YIN Z Y, CHANG C S. Stress-dilatancy behavior for sand under loading and unloading conditions[J]. International

- Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(8): 855-870.
- [17] WANG L Z, YIN Z Y. Stress dilatancy of natural soft clay under an undrained creep condition[J]. International Journal of Geomechanics, 2015, **15**(5): 1-5.
- [18] GAO Z W, ZHAO J D, YIN Z Y. Dilatancy relation for overconsolidated clay[J]. International Journal of Geomechanics, 2017, **17**(5): 1-20.
- [19] RICHMOND O, SPITZIG W. Pressure dependence and dilatancy of plastic flow [J]. Theoretical and applied mechanics, 1980, 377-386.
- [20] POOROOSHAB H B, HOLUBEC I, SHERBOURNE A N. Yielding and flow of sand in triaxial compression: part I[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1966, **3**(4): 179-190.
- [21] FRYDMAN S, ZEITLEN J G, ALPAN I. The yielding behavior of particulate media[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1973, **10**(3): 341-362.
- [22] LADE P V, PRADEL D. Instability and plastic flow of soils: I experimental observations[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1990, **116**(11): 2532-2550.
- [23] YAO Y P, HE G, LUO T. Study on determining the plastic flow direction of soils with dilatancy[J]. Acta Geotechnica, 2023, **18**(5): 2411-2425.
- [24] COLLINS I F, KELLY P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models[J]. Géotechnique, 2002, **52**(7): 507-518.
- [25] COLLINS I F. A systematic procedure for constructing critical state models in three dimensions[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, **40**(17): 4379-4397.
- [26] ZIEGLER H, WEHRLI C. The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function[M]//Advances in Applied Mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1987: 183-238.
- [27] TINMOUTH H G. A Study of Plasticity Theories and Their Applicability to Soils[D]. Cambridge, East of England, UK: University of Cambridge, 1981.
- [28] HOULSBY G. A derivation of the small-strain incremental theory of plasticity from thermodynamics[C]// Proceedings of the Proc IUTAM Conf Deformation and Failure of Granular Materials, Delft, 1982.
- [29] HOULSBY G T. Interpretation of dilation as a kinematic constraint[M]//Modern Approaches to Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1993: 19-38.
- [30] MANZARI M T, DAFALIAS Y F. A critical state two-surface plasticity model for sands[J]. Géotechnique, 1997, **47**(2): 255-272.
- [31] CUBRINOVSKI M, ISHIHARA K. Modelling of sand behaviour based on state concept[J]. Soils and Foundations, 1998, **38**(3): 115-127.
- [32] GAJO A, WOOD M. Severn-Trent sand: a kinematic-hardening constitutive model: the  $q-p$  formulation[J]. Géotechnique, 1999, **49**(5): 595-614.
- [33] LI J, YIN Z Y, CUI Y J, et al. Work input analysis for soils with double porosity and application to the hydromechanical modeling of unsaturated expansive clays[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2017, **54**(2): 173-187.
- [34] YAO Y P, ZHOU A N. Non-isothermal unified hardening model: a thermo-elasto-plastic model for clays[J]. Géotechnique, 2013, **63**(15): 1328-1345.
- [35] YAO Y P, KONG L M, ZHOU A N, et al. Time-dependent unified hardening model: three-dimensional elastoviscoplastic constitutive model for clays[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2015, **141**(6): 1-18.
- [36] COLLINS I F, HILDER T. A theoretical framework for constructing elastic/plastic constitutive models of triaxial tests[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, **26**(13): 1313-1347.
- [37] YAO Y P, LU D C, ZHOU A N, et al. Generalized non-linear strength theory and transformed stress space[J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2004, **47**(6): 691-709.
- [38] YAO Y P, ZHOU A N, LU D C. Extended transformed stress space for geomaterials and its application[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, **133**(10): 1115-1123.
- [39] YAO Y P, WANG N D. Transformed stress method for generalizing soil constitutive models[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2014, **140**(3): 614-629.
- [40] 张坤勇, 文德宝, 马奇豪. 椭圆抛物双屈服面弹塑性模型三维各向异性修正及其试验验证[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **32**(8): 1692-1700. (ZHANG Kunyong, WEN Debao, MA Qihao. Three-dimensional anisotropic revision and experimental verification of elliptic parabolic double yield surface elastoplastic model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(8): 1692-1700. (in Chinese))
- [41] ZHOU A N. Modelling hydro-mechanical behavior for unsaturated soils[J]. Japanese Geotechnical Society Special Publication, 2017, **5**(2): 79-94.

- [42] 杨杰, 尹振宇, 黄宏伟, 等. 基于扰动状态概念硬化参数的结构性黏土边界面模型[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(3): 554-561. (YANG Jie, YIN Zhenyu, HUANG Hongwei, et al. Bounding surface plasticity model for structured clays using disturbed state concept-based hardening variables[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(3): 554-561. (in Chinese))
- [43] HUANG J Q, ZHAO M, DU X L, et al. An elasto-plastic damage model for rocks based on a new nonlinear strength criterion[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2018, 51(5): 1413-1429.
- [44] ZHANG S, YE G L, WANG J H. Elastoplastic model for overconsolidated clays with focus on volume change under general loading conditions[J]. International Journal of Geomechanics, 2020, 20(3): 1-14.
- [45] 万征, 孟达. 基于  $t$  准则的各向异性强度准则及变换应力法[J]. 力学学报, 2020, 52(5): 1519-1537. (WAN Zheng, MENG Da. Anisotropic strength criterion based on  $t$  criterion and the transformation stress method[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(5): 1519-1537. (in Chinese))
- [46] FANG J J, FENG Y X. Elastoplastic model and three-dimensional method for unsaturated soils[J]. Shock and Vibration, 2020(3): 8592628.
- [47] WANG Z N, WANG G A closest point projection method for stress integration of 3D sand models generalised by transformed stress method[J]. Geomechanics and Geoengineering, 2024, 19(1): 27-39.

### 第五届国际环境岩土工程学会论坛（第2号通知）

由国际环境岩土工程学会（ISEG）主办，南京大学承办的“第五届国际环境岩土工程学会论坛”将于 2024 年 11 月 15-17 日在南京召开。“论坛”是 ISEG 大会之间的学术活动，首届于 1999 年举行。本次论坛的主题是“气候变化与环境岩土工程”。我们将邀请知名学者发表主题演讲，分享环境岩土工程方面的最新成果。诚邀各位同仁参加！

国际环境岩土工程学会（ISEG）旨在促进各国际环境岩土工程学会国、组织和个人在环境岩土问题上的广泛合作，以推动全球可持续发展。本次论坛主题是“气候变化与环境岩土工程”。将邀请知名学者发表主题演讲，分享环境岩土工程方面的最新成果。

**主办单位：**国际环境岩土工程协会（ISEG）

**承办单位：**南京大学

**论坛议题：**①气候变化对岩土工程的影响；②极端气候灾

害与地质环境效应；③地质碳捕集、利用与封存；④矿山场地、土壤和地下水的污染与修复；⑤大气-植物-土体相互作用；⑥可持续能源利用；⑦废弃物处置与利用；⑧可持续基础设施建设；⑨高效、可持续地质灾害防治；⑩跨学科和新兴技术发展；⑪地质环境保护；⑫青年学者论坛。

**重要日期：**开放注册/摘要提交日期：2024 年 6 月 20 日；早鸟注册截止日期：2024 年 10 月 15 日；摘要提交截止日期：2024 年 10 月 15 日；论坛日期：2024 年 11 月 15 日～11 月 17 日。

**大会注册链接：**<https://wenjuan.nju.edu.cn/vm/wKsqFLP.aspx>

**联系方式：**ISEG 官网：[www.iseg.info](http://www.iseg.info)，唐朝生邮箱：[iseg@nju.edu.cn](mailto:iseg@nju.edu.cn)，沈征涛邮箱：[ztshen@nju.edu.cn](mailto:ztshen@nju.edu.cn)。

（大会组委会 供稿）