

DOI: 10.11779/CJGE2022S1003

# 结构性土的三维修正剑桥模型研究

李杭州, 张志龙, 廖红建, 宋 丽, 徐建腾

(西安交通大学土木工程系, 陕西 西安 710049)

**摘 要:** 土的结构性和应力状态是影响土力学行为的重要因素, 在临界状态土力学框架内, 考虑中间主应力的作用, 结合统一强度理论, 引入洛德角推导出统一强度参数, 对临界状态线进行修正, 使其能够反映不同应力状态下的临界状态。考虑结构性的影响, 将其引入修正剑桥模型屈服函数中, 采用非相关联流动法则, 确定剪胀应力方程, 建立可以反映中间主应力的结构性本构模型。采用黏性土的真三轴试验对所建立本构方程进行验证, 结果表明所建立的本构模型可以较好的预测三维应力状态下的本构模型, 验证了模型的合理性。

**关键词:** 结构性; 本构模型; 临界状态线; 三维应力状态

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2022)S1-0012-05

**作者简介:** 李杭州(1977—), 男, 江苏丰县人, 副教授, 主要从事岩土本构关系方面的研究。E-mail: lihangzhou77@163.com。

## Three-dimensional modified Cam-clay model for structured soils

LI Hang-zhou, ZHANG Zhi-long, LIAO Hong-jian, SONG Li, XU Jian-teng

(Department of Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** The mechanical behaviors of soils are dependent upon the structure and the stress state. Based on the unified strength theory, the unified strength parameters are proposed by introducing Lode's angle into the unified strength theory. The critical state line is modified by considering the effect of the intermediate principle stress under the framework of the critical state concept. The effects of structure are introduced into the yield function of the modified Cam-clay model. The non-associated flow law is adopted. The equation for dilatancy stress is determined. A structural constitutive model that can reflect the effects of the intermediate principal stress is proposed. The model is verified by true triaxial tests of a clay. The results show that the proposed model can predict the stress-strain relationships well.

**Key words:** structure; constitutive model; critical state line; three-dimensional stress state

## 0 引 言

土的本构模型一直是岩土工程领域研究的热点和焦点问题之一, 是进行工程问题分析和数值模拟的基础, 本构模型建立的准确与否直接关系到分析问题结果的正确与否。在土的本构模型中, 以剑桥模型为代表的弹塑性本构模型参数少, 且易于确定, 能够反映正常固结状态下黏性土的应力应变关系, 而得到广泛的应用; 但该模型是基于正常固结重塑土的常规三轴试验结果而提出的, 有着固有的不足之处。在工程中土体大多是原状土, 原状土相比重塑土具有较强的结构性, 其力学行为特性不仅和应力历史、应力状态等相关, 而且决定于土颗粒之间的胶结等性质; 并且实际工程的复杂性使得土体处于应力状态也十分复杂; 而基于重塑土所提出的剑桥模型无法反映考虑土的结构性和剪胀性等问题, 且该模型的屈服面在偏平面上是一个圆, 无法准确的反映中间主应力的作用。

为了更好的考虑土的复杂力学行为特性, 国内外众多的学者对剑桥模型进行了修正, 姚仰平<sup>[1]</sup>在修正剑桥模型的基础上, 考虑新的硬化参量, 结合考虑不同固结状态的土的力学行为特性, 提出了统一硬化本构模型, 并发展为一系列的 UH 模型。Chai 等<sup>[2]</sup>、Liu 等<sup>[3]</sup>、Suebsuk 等<sup>[4]</sup>、Nguyen 等<sup>[5]</sup>考虑了土的结构性, 在剑桥模型的基础上, 分析土的结构性力学行为特征, 改进了剑桥模型方程。

结构性是 21 世纪土力学的核心问题<sup>[6]</sup>, 由于土的结构性力学行为特性复杂, 研究人员采用不同的理论或方法提出了各种结构性参数并建立土的力学行为模型。沈珠江运用损伤理论, 建立了一系列的本构模型, 尤其是二元介质模型在近几年得到广泛的研究<sup>[7]</sup>; 张玉伟等<sup>[8]</sup>考虑了黄土的结构性和各向异性, 改进了修

基金项目: 陕西省重点研发计划项目 (2021SF-517, 2020SF-394)

收稿日期: 2022-09-28

正剑桥模型。谢定义等<sup>[9]</sup>, 邵生俊等<sup>[10]</sup>系统的研究了土的结构性, 提出了综合结构势参数, 在此基础上建立了本构模型。

由于土的力学性质的复杂性, 结构性参数的确定受多种因素影响, 也很难采用一个模型统一的预测各种土的力学行为特性。Yu 等<sup>[11]</sup>自 1991 年提出统一强度理论后, 并经过了大量的真三轴试验验证表明: 统一强度理论能够反映一系列的屈服准则, 且形式简单, 参数易确定, 而应用多个领域。

因此本文在临界状态土力学框架下, 考虑土的结构性, 结合统一强度理论, 试图建立一个土的结构性本构模型, 使其能准确地预测不同土体在复杂应力状态下的力学行为特性。

## 1 三维临界状态线

### 1.1 复杂应力状态下的强度参数

土的强度参数通常采用常规三轴试验进行确定, 但大量平面应变试验和真三轴试验表明强度参数与应力状态相关。Mohr-Coulomb 强度准则在土力学中应用最为广泛, 但该强度准则没有考虑中间主应力的作用, 考虑俞茂提出的双剪统一强度理论<sup>[1]</sup>通过改变中间主应力系数, 可以表示一系列的强度准则, 从而使得该理论适用更多的土体。根据强度参数的本质含义, 结合统一强度理论的物理意义, 通过采用洛德角表示中间主应力, 可以得到统一内摩擦角  $\varphi_1$ :

当  $\sqrt{3} \tan \theta_\sigma \leq \sin \varphi$  时

$$\sin \varphi_1 = \frac{2(1+b)\sin \varphi}{2+b+b\sin \varphi - \sqrt{3}(1-\sin \varphi)b \tan \theta_\sigma}, \quad (1a)$$

当  $\sqrt{3} \tan \theta_\sigma \geq \sin \varphi$  时

$$\sin \varphi_1 = \frac{2(1+b)\sin \varphi}{2+b-b\sin \varphi + \sqrt{3}(1+\sin \varphi)b \tan \theta_\sigma}, \quad (1b)$$

式中,  $\varphi$  为内摩擦角,  $b$  为中间主应力系数,  $\theta_\sigma$  为洛德角。

从式 (1a) 和式 (1b) 中可以看出, 统一内摩擦角  $\varphi_1$  不同于内摩擦角, 它并非一个固定的常数, 而是洛德角以及中间主应力系数的函数。不同中间主应力系数  $b$  值下, 统一内摩擦角随洛德角的变化如图 1 所示。从图 1 中可以看出: 当  $b=0$  时在不同应力状态下材料的内摩擦角是保持不变的, 当  $0 < b \leq 1$  时, 统一内摩擦角随洛德角的变化具有区间性, 而且从图中还可以看出, 同一应力状态下材料的内摩擦角随中间主应力系数的增大而增大。

### 1.2 临界状态线三维化

在剑桥模型中, 临界状态线的斜率  $M$  通常采用下

面公式进行表示:

$$M = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad (2)$$

从式 (2) 可以看出, 临界状态线的斜率与应力状态无关, 对一给定的材料在任意应力状态下临界状态线的斜率均为一定值, 而忽略了中间主应力的影响。大量的试验已经证明临界状态线的斜率  $M$  的大小和所受的应力状态有关, 殷宗泽等<sup>[12]</sup>试验结果表明复杂应力状态下的临界状态线的斜率低于常规三轴应力状态下的值, 且修正剑桥模型在复杂应力状态下采用上式中的  $M$  值所计算的结果明显高于试验值。

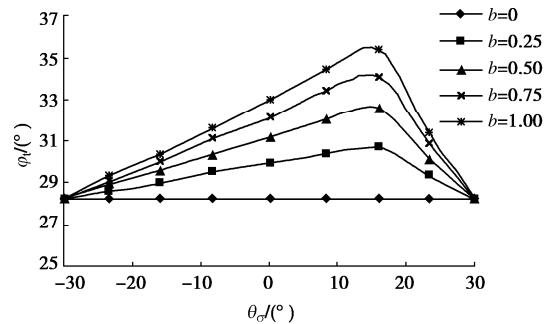


图 1 统一摩擦角随应力状态的变化

Fig. 1 Variation of unified internal friction angle with  $\theta_\sigma$

结合所定义的统一强度参数和临界状态线斜率, 在复杂应力状态下, 临界状态线的斜率可以改写为如下形式:

$$M(\theta_\sigma) = \frac{6(1+b)\sin \varphi}{A \cos \theta_\sigma + B \sin \theta_\sigma}, \quad (3)$$

当  $\sqrt{3} \tan \theta_\sigma \leq \sin \varphi$  时

$$A = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}b(1 + \sin \varphi), \quad (4a)$$

$$B = (5b + 2)\sin \varphi - 3b, \quad (4b)$$

当  $\sqrt{3} \tan \theta_\sigma \geq \sin \varphi$  时

$$A = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}b(1 - \sin \varphi), \quad (4c)$$

$$B = (5b + 2)\sin \varphi + 3b. \quad (4d)$$

从上式可以看出, 临界状态线的斜率  $M(\theta_\sigma)$  不再是一定值, 可以描述不同应力状态下的临界状态。 $M(\theta_\sigma)$  值与洛德角  $\theta_\sigma$  和中间主应力系数  $b$  的关系如图 2 所示, 从图 2 可以看出: 临界状态线的斜率在取不同的中间主应力系数  $b$  值时, 其变化规律是不同的, 即对于不同的屈服准则或不同材料变化规律是不同的。文献[12]试验结果也表明黏土的平面应变下的临界状态线的斜率低于常规三轴试验的结果。

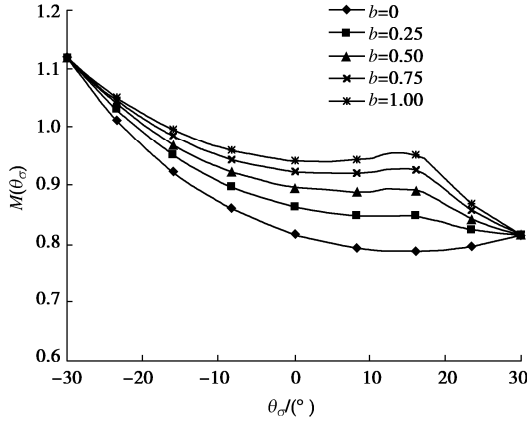


图2 临界状态线斜率变化图

Fig. 2 Variation of slope of critical state line

## 2 本构模型的建立

### 2.1 屈服函数的确定

在建立本构模型之前,必须先要确定土的屈服函数。考虑修正剑桥模型,结合所确定的三维临界状态线对修正剑桥模型进行改进。为了使弹塑性本构模型反映中间主应力的影响,可以采用两种方法:一种是把中间主应力和相应的参数直接放入本构模型中;另一种方法是本构模型本身不改变,仅修正本构模型中所含的强度参数。上述两种方法可以看出,第一种方法从理论上更为合理,虽然计算量加大,但更能够准确的反映岩土材料的真实特性。考虑到上述因素,本文利用统一强度表示的临界状态对修正剑桥模型进行改进,用改进后的  $M(\theta_\sigma)$  值代替原来的  $M$  值,从而修正屈服函数等,进而改进修正剑桥模型。同时修正剑桥模型无法考虑土的结构性,在剑桥模型中引入结构性参数,其屈服函数可以表示为

$$F = q^2 + M(\theta_\sigma)(p + p_s)(p + p_c) = 0 \quad (5)$$

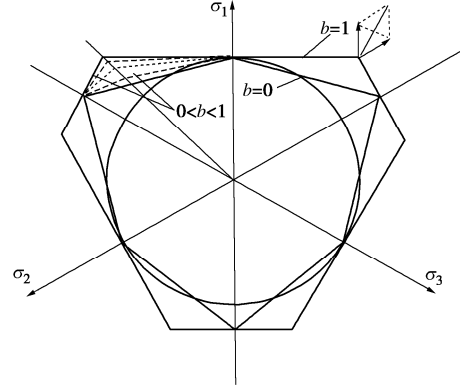
式中,  $p'$  为有效体积应力,  $p' = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ ,  $q$  为偏应力,  $p_s$  为结构强度,  $p_c$  为屈服轨迹与  $p$  轴交点值。

由于考虑了结构强度  $p_s$ , 此时临界状态线为

$$q = M(\theta_\sigma)(p + p_s) \quad (6)$$

根据屈服函数的表达式可以看出,式(5)分别引入了中间主应力以及结构强度。在屈服函数中引入  $M(\theta_\sigma)$  后,意味着考虑了中间主应力的影响。屈服面在  $\pi$  平面上的轨迹如图3所示,从图中可以看出,在屈服函数中引入  $M(\theta_\sigma)$  后,屈服函数在  $\pi$  平面上的屈服轨迹不再是一个圆,而是随强度参数  $b$  而变化的一系列屈服轨迹,从而也达到改进屈服函数的目的。在引入结构强度  $p_s$  后,可以考虑结构性对土力学行为特性的影响和作用。屈服函数的表达式(5)可以看出,

当  $\theta_\sigma=0$  时,且不考虑土的结构性时,原修正剑桥模型屈服函数是改进后屈服函数的一个特例。

图3 在  $\pi$  平面上的屈服面轨迹Fig. 3 Loci of yield function in  $\pi$  plane

### 2.2 流动法则

考虑土的结构性和复杂应力状态的力学行为,参考修正剑桥模型的剪胀应力方程,剪胀应力方程可以表示为

$$D = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{m^2(p + p_s)^2 + q}{2(p + p_s)q} \quad (7)$$

式中,  $m$  为试验常数,在各个应力状态下参数  $m$  的值与该应力状态下  $M(\theta_\sigma)$  的值相同,所不同的是  $m$  不是一个函数,而是一个数值。根据流动法则,对剪胀应力方程(7)进行积分,可以得到塑性势函数。

### 2.3 硬化规律

以塑性体应变为硬化参数:

$$\varepsilon_v = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \ln \frac{p_c}{p_0} \quad (8)$$

式中,  $\lambda$  为压缩指数,  $\kappa$  为膨胀指数,  $e_0$  是初始平均应力  $p_0$  时土的初始孔隙比。

### 2.4 弹塑性刚度矩阵

本构模型可以表示为

$$d\sigma_{ij}^{ep} = D_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (9)$$

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - \frac{\frac{\partial Q}{\partial \sigma'_{rs}} D_{ijrs}^e D_{mnkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{mn}}}{A + \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{mn}} D_{mhrs}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma'_{rs}}} \quad (10)$$

式中,  $D_{ijkl}^e$  为弹性刚度矩阵,  $A$  为硬化函数,  $Q$  为塑性势函数,由式(7)确定。其中:

$$D^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (11a)$$

$$\lambda = \frac{3\nu(1 + e_0)}{(1 + \nu)\kappa} p' \quad (11b)$$

$$G = \frac{3(1 - 2\nu)(1 + e_0)}{2(1 + \nu)\kappa} p' \quad (11c)$$

### 3 模型的验证

#### 3.1 模型参数

所建立的本构模型参数除结构参数  $p_s$  和中间主应力系数  $b$  外, 所有模型参数和修正剑桥本构模型相同, 确定方法也相同。中间主应力系数  $b$  通常作为选择性参数, 通过数据的最佳拟合或最佳预测结果进行确定, 如果有真三轴试验数据, 也可以通过真三轴试验结果进行确定, 或者通过最小二乘法对试验数据进行拟合。

结构参数  $p_s$  体现了土的结构性, 土的结构性是指土颗粒排列组合以及颗粒之间的胶结表现出来的力学特征, 在宏观力学表现上为简化起见, 可以采用黏聚力进行表示, 因此结构参数可以通过黏聚力和内摩擦角确定:

$$p_s = M(\theta_\sigma) c_t \cot \varphi_t \quad (12)$$

#### 3.2 模型预测

为验证所改进模型的正确性, 采用 Grundite 黏土的真三轴试验<sup>[13]</sup>进行验证, 模型所用参数与修正剑桥模型相同, 具体为:  $\lambda/(1+e_0)=0.0846$ ,  $\kappa/(1+e_0)=0.0169$ ,  $\varphi'=28.2^\circ$ ,  $\mu=0.27$ ,  $\sigma_c=147$  kPa,  $c=0$ 。

Grundite 黏土的真三轴试验结果和模型的验证结果如图 4 所示。从图 4 可以看出, 原修正剑桥模型在模拟黏土的试验时, 在洛德角为  $-30^\circ$  时, 即常规三轴试验结果, 理论结果与试验结果较为吻合; 但在模拟真三轴试验时, 其理论结果明显偏高的。而改进的模型在模拟常规三轴试验时和修正剑桥模型模拟结果一致; 在模拟真三轴试验时, 模拟结果与中间主剪应力系数  $b$  有关, 即所选取的屈服函数影响着模型的计算结果。从图 4 可以看出, 对于 Grundite 黏土, 当  $b=1$  时的改进模型的理论计算结果和试验结果较为吻合, 而其中在常规三轴试验中,  $b$  值的变化不影响改进模型对结果的模拟。同时根据改进模型 Grundite 黏土真三轴试验的验证也可以看出, 在改进模型中所包含的洛德角和中间主剪应力系数影响着模型对试验的预测, 从而可以模拟复杂应力状态下不同材料的应力应变关系。

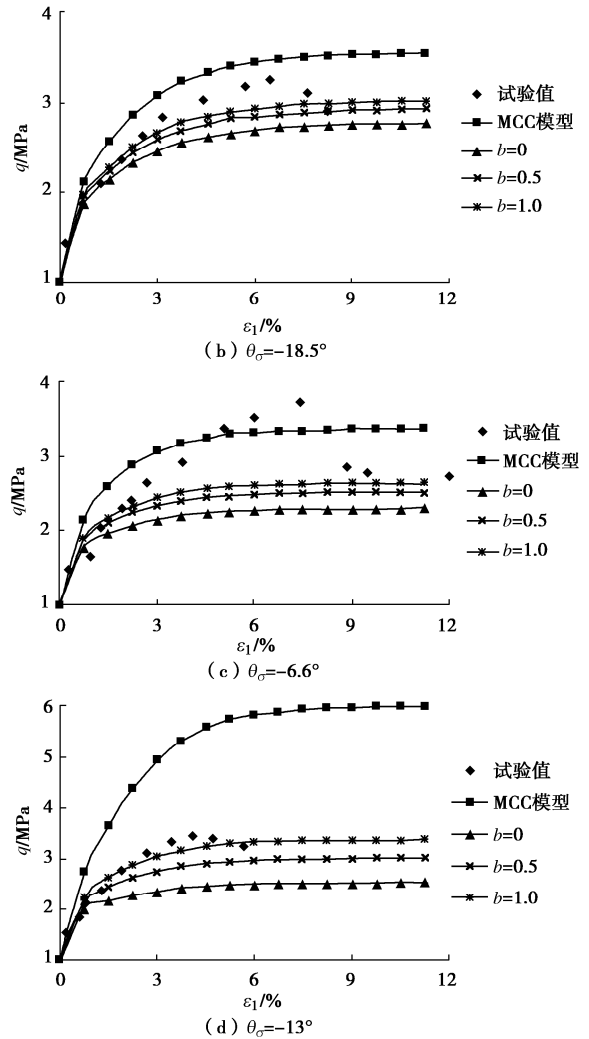
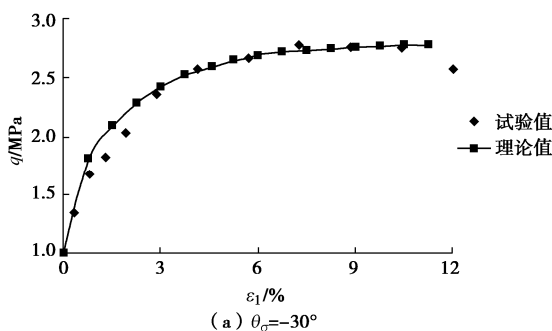


图 4 本构模型的验证

Fig. 4 Validation of proposed constitutive model

### 4 结 论

(1) 考虑土的力学行为特性不仅取决于其所受的复杂应力状态, 而且还决定于土的结构性, 在临界状态土力学框架下, 考虑了中间主应力作用的影响, 引入统一强度理论, 改进了临界状态线的表达。

(2) 在修正剑桥模型的基础上, 考虑土的结构性, 引入土的结构性参数, 同时考虑了结构性对剪胀应力方程的作用, 采用非相关联流动法则, 建立了三维应力状态下结构性本构模型。

(3) 本文模型的参数可以通过采用常规三轴试验进行确定, 确定方法和修正剑桥模型相同, 采用了黏性土的真三轴试验对所建立的模型进行了验证, 结果表明所建立的模型可以较好地预测三维应力状态下土的应力应变关系, 表明该模型是合理可行的。

#### 参考文献:

- [1] 姚仰平. UH 模型系列研究. 岩土工程学报, 2015, 37(2):

- 194 - 216. (Yao Yang-ping. Advanced UH models for soils[J]. Chinese Journal Geotechnical of Engineering, 37(2): 194 - 216. (in Chinese))
- [2] CHAI J C, MIURA N, ZHU H H, et al. Compression and consolidation characteristics of structured natural clay[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2004, 41(6): 1250 - 1258.
- [3] LIU M D, CARTER J P. A structured Cam Clay model[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(6): 1313 - 1332.
- [4] SUEBSUK J, HORPIBULSUK S, LIU M D. Modified Structured Cam Clay: a generalised critical state model for destructured, naturally structured and artificially structured clays[J]. Computers and Geotechnics, 2010, 37(7/8): 956 - 968.
- [5] NGUYEN L, FATAHI B. Behaviour of clay treated with cement & fibre while capturing cementation degradation and fibre failure—C3F Model[J]. International Journal of Plasticity, 2016, 81: 168 - 195.
- [6] 沈珠江. 土体结构性的数学模型: 21 世纪土力学的核心问题 [J]. 岩土工程学报, 1996, 18(1): 95 - 97. (SHEN Zhu-jiang. Mathematical model of soil structure—the core problem of soil mechanics in 21st century[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 18(1): 95 - 97. (in Chinese))
- [7] 沈珠江. 结构性粘土的堆砌体模型[J]. 岩土力学, 2000(1): 1 - 4. (SHEN Zhu-jiang. A masonry model for structured clays[J]. Rock and Soil Mechanics, 2000(1): 1 - 4. (in Chinese))
- [8] 张玉伟, 翁效林, 宋战平, 等. 考虑黄土结构性和各向异性的修正剑桥模型[J]. 岩土力学, 2019, 40(3): 1030 - 1038. (ZHANG Yu-wei, WENG Xiao-lin, SONG Zhan-ping, et al. A modified Cam-clay model for structural and anisotropic loess[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(3): 1030 - 1038. (in Chinese))
- [9] 谢定义, 齐吉琳, 张振中. 考虑土结构性的本构关系[J]. 土木工程学报, 2000, 33(4): 35 - 41. (XIE Ding-yi, QI Ji-lin, ZHANG Zhen-zhong. A constitutive laws considering soil structural properties[J]. China Civil Engineering Journal, 2000, 33(4): 35 - 41. (in Chinese))
- [10] 邵生俊, 周飞飞, 龙吉勇. 原状黄土结构性及其量化参数研究[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(4): 531 - 536. (SHAO Sheng-jun, ZHOU Fei-fei, LONG Ji-yong. Structural properties of loess and its quantitative parameter[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(4): 531 - 536. (in Chinese))
- [11] YU M H, HE L N. A New Model and Theory on Yield and Failure of Materials under the Complex Stress State[M]// Mechanical Behaviour of Materials VI. Amsterdam: Elsevier, 1992: 841 - 846.
- [12] 殷宗泽, 赵航. 中主应力对土体本构关系的影响[J]. 河海大学学报, 1990, 18(5): 54 - 61. (YIN Zong-ze, ZHAO Hang. Effect of middle principal stress on constitutive relationship[J]. Journal of Hohai University (Natural Sciences), 1990, 18(5): 54 - 61. (in Chinese))
- [13] LADE P V, MUSANTE H M. Three-dimensional behavior of remolded clay[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1978, 104(2): 193 - 209.

(编校: 黄贤沙)