

DOI: 10.11779/CJGE20221452

基于塑性元件微元化的重塑黄土黏弹性本构模型

骆亚生, 赵程斌, 孙哲, 范全, 牛雨欣, 李斌

(西北农林科技大学水利与建筑工程学院, 陕西杨凌 712100)

摘要: 基于塑性元件微元化和无穷级数的思想, 通过加、卸载条件的三轴蠕变试验建模并通过动力三轴试验验证, 建立了重塑黄土的黏弹性本构模型, 并获得了相应的参数指标。研究表明, 该模型可以很好地描述重塑黄土的蠕变、静力和动力特性, 且能更加合理地解释卸载条件下回弹曲线的变化特征。塑性元件微元化的处理方法弥补了以往黏弹性本构模型中塑性变形不易描述的缺点, 相比其他的黏弹性本构模型, 该模型应用更加简单且适用范围更广。

关键词: 重塑黄土; 本构模型; 塑性元件微元化; 蠕变特性; 静力特性; 动力特性

中图分类号: TU444 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2024)03-0624-08

作者简介: 骆亚生(1967—), 男, 博士, 教授, 主要从事黄土力学与工程方面的生产与科研工作。E-mail: lyas1967@nwauaf.edu.cn。

Visco-elastoplastic constitutive model for remolded loess based on infinitesimalization of plastic elements

LUO Yasheng, ZHAO Chengbin, SUN Zhe, FAN Quan, NIU Yuxin, LI Bin

(College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling 712100, China)

Abstract: Based on the theory of infinitesimalization of plastic elements and infinite series, the visco-elastoplastic constitutive model for remolded loess is established through the triaxial creep tests under loading and unloading conditions and verified by the dynamic triaxial test, and the corresponding parameter indexes are obtained. The research shows that the constitutive model can well describes the creep, static and dynamic characteristics of the remolded loess and it more reasonably explain the variation characteristics of rebound curve under unloading conditions. In addition, the processing method for the infinitesimalization of plastic elements makes up for the shortcomings that plastic deformation is not easy to describe in the previous visco-elastoplastic constitutive model. Compared with other visco-elastoplastic constitutive models, the proposed model is simpler and more widely used.

Key words: remolded loess; constitutive model; infinitesimalization of plastic element; creep characteristic; static characteristic; dynamic characteristic

0 引言

黄土是一种多孔隙、弱胶结的第四纪沉积物, 具有特殊的工程性质。近年来, 伴随着工程标准的日益提高, 机场、高铁等大型工程建设往往需要对地基进行回填、夯实等处理, 重塑黄土的本构模型越来越受到重视。针对土的本构模型, 学者们主要考虑蠕变特性、静力特性、动力特性几个方面, 主要为了分别探究不同参数条件下土的应变-时间、应力-应变、动应力-动应变关系, 以实现对相关工程实践的有效指导。

多年以来, 国内外众多学者不懈研究, 提出了许多土的本构理论。蠕变本构方面, Toshihisa等^[1]通过不同软土的三轴蠕变试验得到了土体变形与偏应力大小的关系; 胡再强等^[2]研究了糯米浆掺入量对人工制备遗址土三轴蠕变特性的影响, 并得出了相应的非线

性蠕变本构模型; 邓会元等^[3]通过对杭州湾淤泥质粉质黏土进行研究, 得到了不同偏应力下的蠕变规律, 并采用Merchant模型与Burgers模型对土样的蠕变行为进行预测分析。静力本构方面, 徐辉等^[4]利用细观力学分析中的自洽理论建立了在固结排水条件下的砂土弹塑性本构模型; 姚仰平等^[5-6]、何冠等^[7]基于变换应力法和统一硬化参数建立了土的统一硬化模型; 路德春等^[8]基于砂土的力学特性, 建立了非正交弹塑性本构模型; Kavvadas等^[9]基于临界状态概念和增量塑性理论建立了一个结构性土的本构模型。动力本构方面, 谢定义总结了国内外诸多成果, 其中沈珠江的等效黏弹性模型、Iwan的等效弹塑性模型与Martin-Finn-

Seed的等效黏弹性模型均产生了很大的影响^[10]。近年来, 国内外学者也针对砂土、黄土和其他特殊性土展开研究, 极大的丰富了土的动力本构模型^[11-16]。除此以外, 黄文熙^[17]系统总结了力学各类元件的特性为构建本构模型奠定了基础。

尽管在国内外学者的共同努力下, 土的本构模型研究已经得到了很多成果, 但当前仍然有一些问题需要解决:

(1) 对于任何土体, 都应该同时具备蠕变特性、静力特性和动力特性, 但当前的重塑黄土本构模型往往只针对重塑黄土的蠕变、静力和动力的某一特性进行研究, 模型的适用范围较小。

(2) 静力特性作为重塑黄土的基本特性之一, 在构建本构模型时需要同时考虑加、卸载条件才能清晰地区分弹、塑性变形。而蠕变特性又必须考虑时间因素, 因此要同时探究静力与蠕变特性, 必须采用加、卸载条件下的三轴蠕变试验。

(3) 考虑动荷载条件时, 本构模型较为复杂, 这时传统的蠕变和静力本构模型很难适用于动力特性。

(4) 当前针对蠕变特性, 国内外学者已经提出了许多模型来描述它的特性, 但是当考虑加、卸载条件时, 这些模型不能很好地描述土的蠕变特性。

为了解决这些问题, 通过引入塑性元件微元化并结合无穷级数的思想, 基于加、卸载条件下的三轴蠕变试验建立了满足蠕变、静力特性的重塑黄土本构模型, 并以此为出发点结合动力三轴试验进行验证, 得到了一个同时适用于重塑黄土蠕变、静力、动力特性的本构模型。

1 传统元件的缺陷与塑性元件微元化

1.1 传统元件的缺陷

近年来学者们在弹、黏、塑性元件的基础上发展了许多新的具有力学特征的元件, 其中包括 Maxwell 体、Bingham 体、Kelvin 体和村山体, 都能在不同程度上描述重塑黄土的力学特性。

重塑黄土作为一种特殊性土, 其力学特性十分复杂, 重塑黄土在应力作用下会产生弹性变形、塑性变形和黏性变形, 其中弹性元件和 Kelvin 元件可以很好地描述弹性变形和黏性变形, 但至今为止, 重塑黄土的塑性变形仍没能通过各类力学元件来很好地描述, 原因如下:

(1) 在不发生破坏的状态下, 重塑黄土的塑性变形不能一直增大, 这与塑性元件和 Maxwell 体的力学特征相违背。

(2) 重塑黄土的塑性变形是不可恢复变形, 这与

Kelvin 体的力学特征相违背。

(3) 重塑黄土的塑性变形与应力密切相关, 但村山体卸载后只能维持一个特定的稳定状态, 因此村山体不能反映塑性变形受应力影响的变化特征。除此之外, 村山体的本构方程过于复杂, 不太方便。

1.2 塑性元件微元化

为了解决 1.1 节的问题, 仍从塑性元件入手, 塑性元件在应力达到一定值时, 应变不断增大, 这显然与重塑黄土的塑性变形特征不符, 因此首先要约束塑性元件的应变。可以取一个欧几里德刚体与塑性元件并联, 得到一个组合元件 ψ 如图 1 所示 (Θ 表示塑性体的起始摩阻力)。

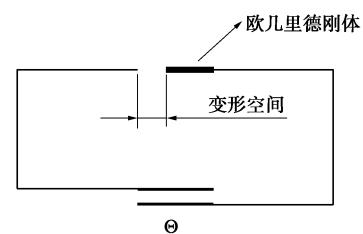


图 1 组合元件 ψ 示意图

Fig. 1 Diagram of combined elements ψ

此时组合元件 ψ 的应力-应变关系为

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & (\sigma \leq \Theta) \\ S & (\Theta < \sigma) \end{cases}, \quad (1)$$

式中: S 为图 1 所示的变形空间 (下同)。

此时组合元件 ψ 的最大塑性变形受到了约束, 但黄土的塑性变形会随着应力的增大而增大, 因此还需要对该元件进一步优化, 取 m 个组合元件 ψ , 定义为 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$, 并将此 m 个元件 Θ 串联如图 2 所示, 并设定此 m 个元件 ψ 的参数满足式 (2) (将该串联体定义为组合元件 Π , 简称元件 Π):

$$\Theta_1 < \Theta_2 < \dots < \Theta_m. \quad (2)$$

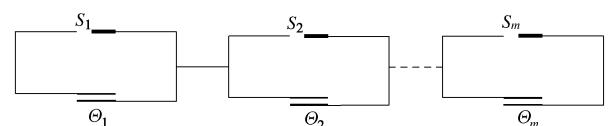


图 2 元件 Π 示意图

Fig. 2 Diagram of element Π

该串联体的应力-应变关系为

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & (\sigma \leq \Theta_1) \\ S_1 & (\Theta_1 < \sigma \leq \Theta_2) \\ S_1 + S_2 & (\Theta_2 < \sigma \leq \Theta_3) \\ \dots \\ S_1 + S_2 + \dots + S_m & (\Theta_m \leq \sigma) \end{cases}. \quad (3)$$

此时 $S_1 \sim S_m$ 表示应变的累积状态, 随着应力的增

大, 应变 ε 也在增长, 但此时的增长是间断的, 为了更好地满足重塑黄土的力学特点, 应变的增长也应为连续增长, 因此可以借助微元化的思想将元件 ψ 设想为微元体, 此时 S 为一个很小的量, 当分割的元件越多(即 $m \rightarrow +\infty$), 应变的变化就越紧密, 当 $m \rightarrow +\infty$, 元件 Π 的应力-应变关系就成为连续型, 此时元件 Π 应力-应变关系变化如图 3 所示。

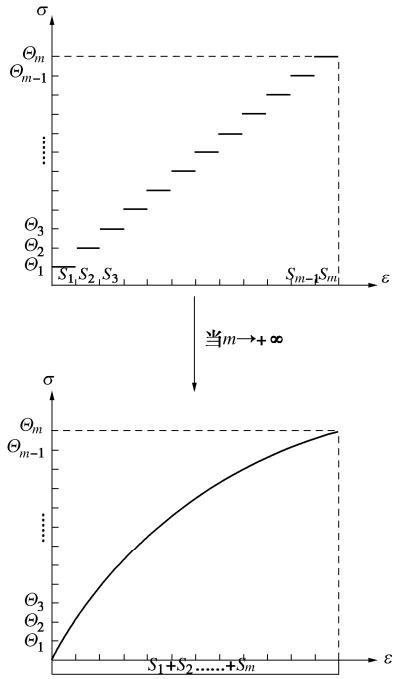


图 3 $m \rightarrow +\infty$ 时, 元件 Π 应力-应变关系曲线

Fig. 3 Stress-strain curve of element Π when $m \rightarrow +\infty$

此时观察组合元件 Π 可以看出: ①应力处于持续增大的状态时, 应变也随之增大。此时元件力学表现类似于弹性元件。②当应力不变或减小时, 应变不发生变化。此时类似于塑性元件(重塑黄土结构抗拉能力较弱, 故不考虑反向增大情况)。③塑性体的起始摩阻力 Θ 和变形空间 S 决定了组合元件 Π 的应力-应变关系 f (f 为增函数), 且当起始摩阻力 Θ 均匀增大, 变形空间 S 取定值时, 该应变关系 f 退化为线性关系。

综上所述, 可以总结出组合元件 Θ 微元化后, 其力学函数解析如下所示:

$$\varepsilon = \begin{cases} f(\sigma_{t_b})(t_a \leq t_b, \sigma_{t_b} > \sigma_{t_a}) \\ f(\sigma_{t_a})(t_a \leq t_b, \sigma_{t_b} < \sigma_{t_a}) \end{cases} \quad (4)$$

式中: t_a , t_b 为时间点; σ_{t_a} , σ_{t_b} 为相应时间点的应力。

2 土样性质和试验方案

2.1 土样性质

本次试验土样取自陕西省咸阳市礼泉县大范镇某工程基坑, 取土深度 4 m, 其土粒相对质量密度 G_s 为 2.70, 液限 w_L 为 35.9%, 塑限 w_p 为 21.7%, 最优含水

率为 19.1%, 最大干密度为 1.65 g/cm^3 , 其他具体物理指标见表 1。

表 1 黄土物理性质指标

Table 1 Physical property indexes of loess

天然含水率/%	天然干密度/ $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$	粒径分析		
		>0.075 mm	0.075~0.005 mm	<0.005 mm
11.4	1.32	0.88	69.86	29.26

2.2 试验方案

采用 SR-6 型三联式三轴蠕变仪进行加、卸载条件下的三轴蠕变试验, 试验过程中保持试样排水状态。试样为重塑黄土样, 干密度控制为 1.57 g/cm^3 , 尺寸为 $\Phi 61.8 \text{ mm} \times 125 \text{ mm}$ 。利用砝码施加法向应力, 以 12.5 kPa 预压稳定后逐级加载, 试验前期以每分钟为时间节点, 后期稳定后以每小时为时间节点, 并以百分表记录每一时间点试样变形数据。

试验主要控制 3 个变量, 含水率 w 、围压 σ_3 、偏应力 $q = \sigma_1 - \sigma_3$, 其中含水率取 10%, 15%, 20%, 25%, 30%, 先自制含水率为 10% 的目标试样再配水得到其他试样, 在保湿缸中静置 48 h 待水分在试样中分布均匀后备用。围压分别取 50, 100, 150 kPa, 偏应力分别取 50, 100, 150, 200, 250 kPa。共计 75 个试样。

试验每组试样在指定含水率、围压条件下, 施加第一级偏应力记录指定时间节点下的百分表数据, 观察蠕变现象, 加载时间为 1440 min。该阶段完成后撤去第一级偏应力, 观察卸载条件下的应变恢复现象, 卸载时间同样为 1440 min, 卸载完成后重新施加第一级偏应力观察再次加载的蠕变现象, 再加载时间仍为 1440 min, 此时加载完毕。对其他试样采取相同处理方式。

3 试验结果分析

3.1 第一次加载过程中的蠕变与静力特性

观察多组试样第一次加载的过程发现, 初始加载时试样短时间内即产生应变, 且应变增长的速率随着时间的增长逐渐减小最终趋近于 0。除此之外, 含水率、围压、偏应力均对蠕变变形的应变速率有影响。其中含水率、偏应力与应变增长速率正相关, 围压与应变增长速率负相关。以含水率 10%、围压 50 kPa 为例得到蠕变随时间变化特性曲线见图 4。

3.2 第一次卸载过程中的蠕变与静力特性

观察多组试样第一次卸载的过程发现, 第一次卸载时试样短时间内出现应变瞬时回弹, 但回弹量有限(远远小于一次加载阶段的应变量), 后期应变继续恢复, 且恢复的速率随着时间的增长逐渐减小最终趋近于 0。除此之外, 含水率、围压、偏应力均对恢复速率有影响。其中含水率、偏应力与应变恢复速率正相

关。围压与应变恢复速率负相关。以含水率 15%, 围压 100 kPa 为例得到蠕变随时间变化特性曲线见图 5。

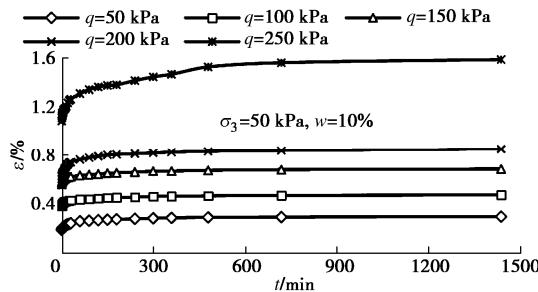


图 4 第一次加载过程蠕变、静力特性曲线

Fig. 4 Creep and static characteristic curves during first loading process

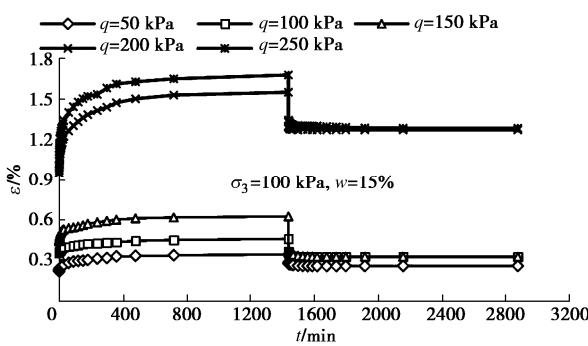


图 5 第一次卸载过程蠕变、静力特性曲线

Fig. 5 Creep and static characteristic curves during first unloading process

3.3 第二次加载过程中的蠕变与静力特性

观察多组试样第二次加载的过程发现, 第二次加载时试样短时间内出现应变瞬时增长, 但增长量有限(远远小于一次加载阶段的应变量), 后期应变继续增长但增长的速率随着时间的增长逐渐减小最终趋近于0, 其最终增长量略大于第一次卸载过程的恢复量。除此之外, 含水率、围压、偏应力均对蠕变变形的应变速率有影响。其中含水率、偏应力与应变增长速率正相关。围压与应变增长速率负相关。以含水率 20%、围压 150 kPa 为例得到蠕变随时间变化特性曲线如图 6。

4 重塑黄土黏弹塑性本构模型的建立

4.1 重塑黄土黏弹塑性本构模型的构建方法

基于以下 5 点基本假设, 建立本构方程:

(1) 每个元件都有自己的特性, 并且彼此之间可以相互组合。

(2) 不同元件串联时应力对每个元件的作用效果相同, 总应变可以通过各个元件应变的累加得到, 即

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n \quad (5)$$

(3) 不同元件并联时可以呈现异于原元件的特性, Kelvin 体就是主要代表。

(4) 同种元件并联或串联, 具有相同的元件特性, 仅元件参数发生变化。

(5) 结合 1.1 节, 共得到了 8 个力学元件, 分别为弹性元件、塑性元件、黏性元件、Maxwell 体、Bingham 体、Kelvin 体、村山体和组合元件 II。

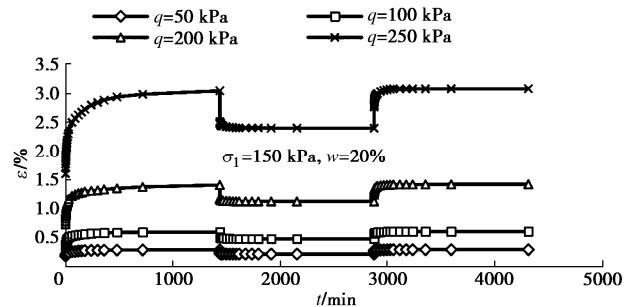


图 6 第二次加载过程蠕变、静力特性曲线

Fig. 6 Creep and static characteristic curves during second loading process

此时类比无穷级数, 把黄土试样视为无穷个串联元件(这里参考假设(2)), 这些串联元件是由假设(5)中所述的 8 个元件经过复合串并联所构成的。将此 8 个元件简写为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$ 。在此引入函数 f_i 来描述每个元件对应的应力-应变关系:

$$\varepsilon_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8) \quad (6)$$

结合无穷级数的思想, 则最终应变可以表示为

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n f_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8) \quad (7)$$

至此可以把最终的应变通过一个类似于无穷级数的形式表达(n 为基于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$ 8 个元件的经过复合串、并联得到的元件的总和)。若确定了 f_i 的组合形式就可以结合微分方程建立本构模型。本文中 f_i 的具体形式可以结合重塑黄土的性质和试验情况进行推定。

在 1.1 节已经分析得到 Maxwell 体、Bingham 体、Kelvin 体、村山体均不能很好地描述重塑黄土的塑性变形, 但组合元件 II 很好地解决了这个问题, 因此结合第 3 节试验结果可以通过以下几种元件来建立重塑黄土的本构模型: ①元件一: 弹性元件; ②元件二: 组合元件 II, 本次研究假定起始摩阻力 Θ 均匀增大, 变形空间 S 取定值, 即函数 f 退化为线性函数, 此时当应力增大时元件符合弹性元件特性, 弹性模量表示为 k ; ③元件三: Kelvin 元件; ④元件四: 组合元件 II 与黏性元件并联。

4.2 黏弹塑性本构模型建立

通过 4.1 节 4 个元件可以很好地描述整个试验过

程中的情况，即：元件一加载时产生弹性应变 ε_1 ，卸荷后恢复为 0；元件二加载时产生瞬时应变 ε_2 ，其值与应力大小正相关，卸荷后不再恢复；元件三加载后应变 ε_3 缓慢增加，卸载后缓慢恢复；元件四加载后应变 ε_4 缓慢增加，卸载后不再恢复。

然而是否本构模型的建立仅有这 4 种元件？

此时基于式(7)， n 是个不确定的值， n 越大，本构模型就越接近于重塑黄土试样的真实特性，目前基于这 4 个元件已经能够很好地描述黄土的蠕变过程，因此没有必要再研究其他的复合串并联情况。基于以上讨论建立的黄土本构模型见图 7（图中 k_2 , k_4 表示两个组合元件 II 的参数， k_1 , k_3 表示两个弹性元件的参数， η_1 , η_2 表示两个黏性元件参数）。

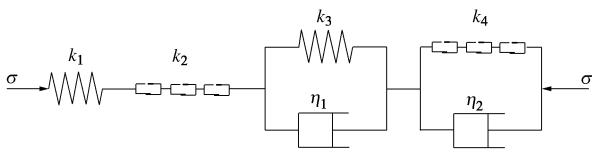


图 7 重塑黄土黏弹塑性本构模型

Fig. 7 Visco-elastoplastic constitutive model for remolded loess

基于该模型可以得到本构方程如下：

$$\sigma = k_1 \varepsilon_1 , \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= k_2 \varepsilon_2 \quad (\sigma = \sigma_{\max}) , \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_{\max}}{k_2} \quad (\sigma \neq \sigma_{\max}) , \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\sigma = k_3 \varepsilon_3 + \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial t} , \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= k_4 \varepsilon_4 + \eta_2 \frac{\partial \varepsilon_4}{\partial t} \quad (\sigma = \sigma_{\max}) , \\ \varepsilon_4 &= A \quad (\sigma \neq \sigma_{\max}) , \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 . \quad (12)$$

该方程中 σ_{\max} 表示模型 $0 \sim t$ 时间段 (t 为当前时间) 内的最大应力， A 为常数 (表示 σ_{\max} 时对应 ε_4 的解)，其中式(8), (9) 可直接求解，式(10), (11) 需要提供初值条件 (初值条件的变形用 ε_{ab} 表示，其中下标 a 代表元件标号，下标 b 代表时间点)。

第一次加载阶段 t_0 (0 min) $\sim t_1$ (1440 min)：此时应力为 σ ，元件一~四同时发挥作用。

元件三初值条件：

$$t_0 = 0, \quad \varepsilon_{30} = 0 . \quad (13)$$

元件四初值条件：

$$t_0 = 0, \quad \varepsilon_{40} = 0 . \quad (14)$$

代入初值条件求解得

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_1} + \frac{\sigma}{k_2} + \frac{\sigma}{k_3} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{\eta_1} t} \right) + \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} t} \right) . \quad (15)$$

第一次卸载阶段 t_1 (1440 min) $\sim t_2$ (2880 min)：

此时应力为 0，元件一、三发挥作用，元件二、四应变保持不变。此时元件四应变 ε_4 为

$$\varepsilon_4 = \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} t_1} \right) . \quad (16)$$

元件三初值条件：

$$t_1 = 1440, \quad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma}{k_3} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{\eta_1} t_1} \right) . \quad (17)$$

代入初值条件求解得

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma}{k_3} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{\eta_1} t_1} \right) e^{\frac{k_3}{\eta_1} (t_1 - t)} . \quad (18)$$

蠕变方程：

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_2} + \frac{\sigma}{k_3} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{\eta_1} t_1} \right) e^{\frac{k_3}{\eta_1} (t_1 - t)} + \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} t_1} \right) . \quad (19)$$

第二次加载阶段 t_2 (2880 min) $\sim t_3$ (4320 min)：此时应力为 σ ，元件一~四同时发挥作用。

元件三初值条件：

$$t_2 = 1620, \quad \varepsilon_{32} = \frac{\sigma}{k_3} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{\eta_1} t_1} \right) e^{\frac{k_3}{\eta_1} (t_1 - t_2)} . \quad (20)$$

元件四初值条件：

$$t_2 = 1620, \quad \varepsilon_{42} = \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} t_1} \right) . \quad (21)$$

代入初值条件求解得

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma}{k_3} + \left(\varepsilon_{31} - \frac{\sigma}{k_3} \right) e^{\frac{k_3}{\eta_1} (t_2 - t)} , \quad (22)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} (t_1 - t_2 + t)} \right) . \quad (23)$$

蠕变方程：

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_1} + \frac{\sigma}{k_2} + \frac{\sigma}{k_3} + \left(\varepsilon_{31} - \frac{\sigma}{k_3} \right) e^{\frac{k_3}{\eta_1} (t_2 - t)} + \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} (t_1 - t_2 + t)} \right) . \quad (24)$$

综上所述，蠕变随时间变化函数。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_1} + \frac{\sigma}{k_2} + \frac{\sigma}{k_3} \left(1 - e^{-\frac{k_3}{\eta_1} t} \right) + \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} t} \right) \quad (t_0 < t < t_1) , \quad (25a)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_2} + \varepsilon_{31} e^{\frac{k_3}{\eta_1} (t_1 - t)} + \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} t_1} \right) \quad (t_1 < t < t_2) , \quad (25b)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_1} + \frac{\sigma}{k_2} + \frac{\sigma}{k_3} + \left(\varepsilon_{31} - \frac{\sigma}{k_3} \right) e^{\frac{k_3}{\eta_1} (t_2 - t)} + \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{-\frac{k_4}{\eta_2} (t_1 - t_2 + t)} \right) \quad (t_2 < t) . \quad (25c)$$

4.3 参数确定

结合 4.2 节本构模型进行研究，则对于每一个试样都可以用唯一确定的 k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , η_1 , η_2

个参数来描述它的特性, 可以结合试验结果和公式推导得到这些参数。基于 4.2 节得到的蠕变效应时间函数进行讨论。

在第一次加载阶段, 4 个元件同时发挥作用, 因此无法从式(25a)得到 6 个参数的关系, 但是观察式(25b)可以知道, 此时元件二、四维持第一次加载阶段末的应变效果, 元件一恢复初始状态, 元件三缓慢恢复初始状态, 此时使用式(25a), (25b)得到

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \frac{\sigma}{k_1} + \varepsilon_{31} \left(1 - e^{\frac{k_3(t_1-t)}{\eta_1}}\right) \quad (26)$$

式(26)中的 ε_{31} 是一个仅受元件三影响的应变值, 且当 $t \rightarrow +\infty$, $\varepsilon_{31} = \frac{\sigma}{k_3}$ 。因此可优先分析卸载阶段即可得到式(26)的 3 个参数 k_1 , k_3 , η_1 。将 k_1 , k_3 , η_1 代入式(25a)进而求得 k_2 , k_4 , η_2 , 参考公式如下:

$$\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{\sigma}{k_2} + \frac{\sigma}{k_4} \left(1 - e^{\frac{-k_4 t}{\eta_2}}\right) \quad (27)$$

在整个求解参数过程中式(25c)并未使用, 观察式(25c)发现, 该式是描述蠕变继续发生的过程, 此时元件一、三和四重新发挥作用, 应变相比第一阶段的增量主要表现为元件四的继续蠕变, 该阶段可以反向验证本构方程的准确性。

本文通过不同的含水率、围压与偏应力的多组试验得到了本构模型的参数。试验发现, 随着含水率、围压与偏应力的变化, 其参数指标也会相应发生变化。为了提高模型的适用性, 对各参数进行归一化处理。结果表明, 随着偏应力增大, 其应变值呈正指数函数递增; 随着围压增大, 应变值呈负指数函数递减; 随着含水率增大, 应变值呈二次函数递增。归一化处理后, 可通过一组本构模型参数得到任意一组本构模型参数。

选取相应参数代回本文模型中与试验数据进行对比, 发现本文模型能够合理描述试验结果。为了进一步展现本文模型的优点, 选取了经典的 Merchant 模型、Burgers 模型与本文模型进行对比。结果表明, 在加载阶段本文模型相比较 Merchant 模型、Burgers 模型与试验结果更接近。在卸载阶段, 本文模型能很好地描述卸载特性, 但 Merchant 模型与 Burgers 模型却不能描述。因此认为本文模型是优于 Merchant 模型与 Burgers 模型。取含水率 20%、围压 50 kPa 条件下的本文模型、Merchant 模型与试验数据进行对比, 结果如图 8 所示 (Burgers 模型与 Merchant 模型相比仅多了一个塑性元件, 该元件会导致加载时应变持续增大, 这与蠕变特性不符, 未在图 8 展示其效果)。

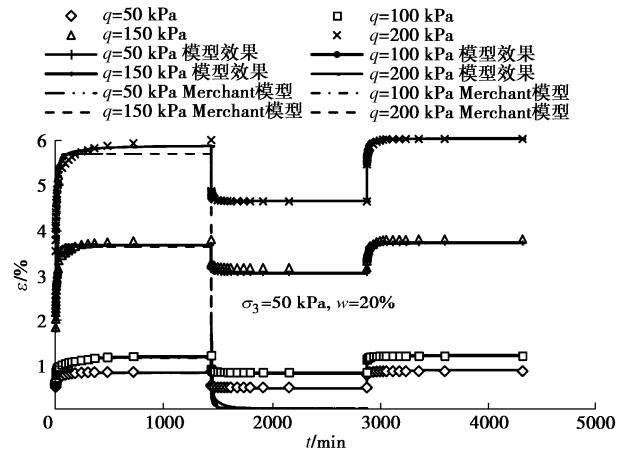


图 8 模型与试验数据对比效果

Fig. 8 Comparison between model and experimental data

5 重塑黄土本构模型的动力特性验证

本节基于第 4 节的内容进一步探究本构模型的动力特性适用性。

5.1 重塑黄土的动本构特性

谢定义^[10]针对土的动力特性进行了阐述。研究表明, 在周期荷载作用下重塑黄土的动应力-动应变有 3 个基本特点: 非线性、滞后性和应变累积性。原则上一个合适的动本构模型应该满足这 3 个基本特点。

5.2 重塑黄土本构模型的动力特性验证

为了验证模型的准确性, 基于已经构建的本构模型对其施加周期性循环荷载:

$$\sigma = \sigma_m \sin \omega t \quad (\sigma_m > 0) \quad (28)$$

式中: ω 为动荷载的角速度。

代入 4.3 节本构方程式(8)~(12)。

元件一、二非微分方程不考虑初值条件。

元件三初值条件:

$$t_0 = 0, \varepsilon_{30} = 0 \quad (29)$$

元件四初值条件:

$$t_0 = 0, \varepsilon_{40} = 0 \quad (30)$$

元件三、四微分方程的通解为

$$\varepsilon_3 = A_3 e^{-\frac{k_3 t}{\eta_1}} + \frac{\sigma_m}{\sqrt{k_3^2 + (\eta_1 \omega)^2}} \sin \left(\omega t - \arctan \frac{\eta_1 \omega}{k_3} \right), \quad (31)$$

$$\varepsilon_4 = A_4 e^{-\frac{k_4 t}{\eta_2}} + \frac{\sigma_m}{\sqrt{k_4^2 + (\eta_2 \omega)^2}} \sin \left(\omega t - \arctan \frac{\eta_2 \omega}{k_4} \right). \quad (32)$$

代入初值条件

$$A_3 = \frac{\sigma_m}{\sqrt{k_3^2 + (\eta_1 \omega)^2}} \sin \left(\arctan \frac{\eta_1 \omega}{k_3} \right), \quad (33)$$

$$A_4 = \frac{\sigma_m}{\sqrt{k_4^2 + (\eta_2 \omega)^2}} \sin\left(\arctan \frac{\eta_2 \omega}{k_4}\right)。 \quad (34)$$

通过观察微分方程解的形式可以发现,对于 Kelvin 应变随时间的关系不是等时的,而是存在明显的滞后性,因此为了满足初始应变为 0 的条件,应变的函数解有一个不为 0 的通解,随着时间的流逝,这一部分将无限接近于 0。最终的应变解析式表现为一个完全的滞回圈。但对于引入的元件四并非如此,当 $\omega t - \arctan \frac{\eta_1 \omega}{k_3} < \frac{\pi}{2}$ 时,元件三、四解形式相同,当

$\frac{\pi}{2} < \omega t - \arctan \frac{\eta_1 \omega}{k_3} < 2\pi$ 时,元件三继续发挥作用,而元件四不再产生应变(直到下一个周期开始)。此时的变形是上一阶段的应变遗留,这个应变会一直累积下去。

为了计算每个周期的应变遗留,需要研究元件四的应变解析式,考虑到元件不可回弹,此时元件四应变由式(32)前后两部分之和组成。前半部分变成了累加状态,而后半部分的循环状态停留在了峰值,因此当 $\frac{\pi}{2} < \omega t - \arctan \frac{\eta_1 \omega}{k_3}$,元件四应变表达式 ε_4 变化为

$$\varepsilon_4 = A_4 \sum_{i=1}^n e^{-\frac{\pi k_4}{\omega \eta_2} i} + \frac{\sigma_m}{\sqrt{k_4^2 + (\eta_2 \omega)^2}}。 \quad (35)$$

式(35)为一个无穷级数,求其解析式得

$$\varepsilon_4 = A_4 e^{-\frac{\pi k_4}{\omega \eta_2}} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\pi k_4}{\omega \eta_2} n}}{1 - e^{-\frac{\pi k_4}{\omega \eta_2}}} \right) + \frac{\sigma_m}{\sqrt{k_4^2 + (\eta_2 \omega)^2}}。 \quad (36)$$

总应变时间表达式参考 $\omega t - \arctan \frac{\eta_1 \omega}{k_3}$ 的取值表达式分为 3 部分,为了方便表示分别以 Γ_1 , Γ_2 和 H 来代替式(31), (32) 和式(36)的内容。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma_m \sin \omega t}{k_1} + \frac{\sigma_m \sin \omega t}{k_2} + \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad \left(\omega t \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_m \sin \omega t}{k_1} + \frac{\sigma_m}{k_2} + \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\eta_1 \omega}{k_3} \right), \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_m \sin \omega t}{k_1} + \frac{\sigma_m}{k_2} + \Gamma_1 + H \quad \left(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\eta_1 \omega}{k_3} \leq \omega t \right). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

H 中正整数 n 用 $\left[\frac{\omega t}{2\pi} \right]$ 来表示, $\left[\frac{\omega t}{2\pi} \right]$ 是取整函数。

为了验证该公式的准确性,本文在相应参数条件下,进行了动三轴试验,取试验结果与预测结果进行对比。经验证该模型很好地解释了重塑黄土在动荷载作用下的非线性、滞后性和应变累积性特点,因此认为该模型适用于对重塑黄土动力特性的描述。本次动

三轴对比试验共进行 10 组,取 10%含水率、二级荷载、围压 100 kPa、频率 1 Hz 为例绘制动应力-动应变对比图如图 9 所示。

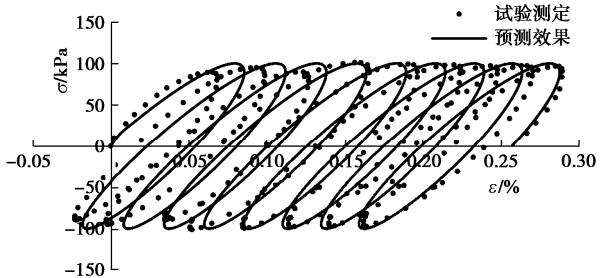


图 9 本构模型动应力-动应变特性的验证

Fig. 9 Verification of dynamic stress-strain characteristics of constitutive model

6 结 论

本文选取陕西省咸阳市礼泉县大范镇某工程基坑黄土为研究对象,通过引入塑性元件微元化并结合无穷级数的思想建立了一种重塑黄土黏弹性本构模型,主要得到以下 3 点结论。

(1) 基于塑性元件微元化得到了组合元件 II,结合三轴蠕变试验和动三轴试验,得到了一个同时适用于重塑黄土的蠕变、静力和动力特性的黏弹性本构模型,且该模型兼顾了加、卸荷条件下的重塑黄土变形特性。

(2) 结合无穷级数的思想,建立了一种构建理论模型的方法,并结合试验结果构建重塑黄土本构模型,增强了模型的可靠性。

(3) 组合元件 II 兼顾了弹性和塑性的特点,将其引入黏弹性本构模型中克服了以往本构模型中应力卸载时稳定状态单一等诸多缺陷,并大大简化了本构方程的复杂程度。

参 考 文 献:

- [1] TOSHIHISA A, FUSAO O, MASASHI K. An Elasto-viscoplastic constitutive model with strain-softening for soft sedimentary rocks[J]. Soils and Foundations, 2005, 45(2): 125-133
- [2] 胡再强, 王凯, 李宏儒, 等. 人工制备遗址土非线性蠕变本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(增刊 1):13-18.
(HU Zaiqiang, WANG Kai, LI Hongru, et al. Nonlinear creep constitutive model for artificially prepared site soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, 43(S1): 13-18(in Chinese))
- [3] 邓会元, 戴国亮, 邱国阳, 等. 杭州湾淤泥质粉质黏土排水蠕变试验及元件蠕变模型[J]. 东南大学学报(自然科学版),

- 2021, **51**(2): 318-324. (DENG Huiyuan, DAI Guoliang, QIU Guoyang, et al. Drained creep test and component creep model of soft silty clay in Hangzhou Bay[J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2021, **51**(2): 318-324. (in Chinese))
- [4] 徐 辉, 王靖涛, 张光永. 基于细观力学分析的砂土弹塑性本构模型[J]. 固体力学学报, 2006, **27**(3): 249-254. (XU Hui, WANG Jingtao, ZHANG Guangyong. An elastic-plastic constitutive model for sand based on micromechanics method[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2006, **27**(3): 249-254. (in Chinese))
- [5] 姚仰平, 余亚妮. 基于统一硬化参数的砂土临界状态本构模型[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(12): 1827-1832. (YAO Yangping, YU Yani. Extended critical state constitutive model for sand based on unified hardening parameter[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(12): 1827-1832. (in Chinese))
- [6] 姚仰平, 侯 伟, 罗 汀. 土的统一硬化模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(10): 2135-2151. (YAO Yangping, HOU Wei, LUO Ting. Unified hardening model for soils[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(10): 2135-2151. (in Chinese))
- [7] 何 冠, 姚仰平. 统一硬化模型与下加载面模型的理论关系[J]. 岩土力学, 2022, **43**(增刊 2): 11-22. (HE Guan, YAO Yangping. Theoretical relation between unified hardening model and sub-loading surface model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, **43**(S2): 11-22. (in Chinese))
- [8] 路德春, 金辰逸, 梁靖宇, 等. 考虑状态相关的砂土非正交弹塑性本构模型[J]. 岩土工程学报, 2023, **45**(2): 221-231. (LU Dechun, JIN Chenyi, LIANG Jingyu, et al. State-dependent non-orthogonal elastoplastic constitutive model for sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2023, **45**(2): 221-231. (in Chinese))
- [9] AMOROSI A, KAVVADAS M. A. constitutive model for structured soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(3): 263-273.
- [10] 谢定义. 土动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2004. (XIE Dingyi. Soil Dynamics[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2004. (in Chinese))
- [11] 穆 锐, 黄质宏, 浦少云, 等. 循环荷载下原状红黏土的累积变形特征及动本构关系研究[J]. 岩土力学, 2020, **41**(增刊 2): 1-10. (MU Rui, HUANG Zihong, PU Shaoyun, et al. Accumulated deformation characteristics of undisturbed red clay under cyclic loading and dynamic constitutive relationship[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(S2): 1-10. (in Chinese))
- [12] 崔 凯, 李永奎. 川西崩坡积混合土循环荷载下非饱和动本构模型[J]. 岩土力学, 2017, **38**(8): 2157-2166. (CUI Kai, LI Yongkui. Study on constitutive model of unsaturated Chuanxi talus mixed soil under cyclic loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, **38**(8): 2157-2166. (in Chinese))
- [13] 魏 尧, 杨更社, 申艳军, 等. 白垩系饱和冻结砂岩蠕变试验及本构模型研究 [J]. 岩土力学, 2020, **41**(8): 2636-2646. (WEI Yao, YANG Gengshe, SHEN Yanjun, et al. Creep test and constitutive model of Cretaceous saturated frozen sandstone[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(8): 2636-2646. (in Chinese))
- [14] LIAN B Q, WANG X G, ZHAN H B, et al. Creep mechanical and microstructural insights into the failure mechanism of loess landslides induced by dry-wet cycles in the Heifangtai platform, China[J]. Engineering Geology, 2022, **300**: 106589.
- [15] MANUELA C S, CRISTELO N, ROUAINIA M, et al. Constitutive behaviour of a clay stabilised with alkali-activated cement based on blast furnace slag[J]. Sustainability, 2022, **14**(21): 13736-13757
- [16] LI Z X, WANG J D, YANG S, et al. Characteristics of microstructural changes of malan loess in Yan'an area during creep test[J]. Water, 2022, **14**(3): 438-460
- [17] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京: 水利电力出版社, 1983. (HUANG Wenxi. Engineering Properties of Soil[M]. Beijing: Water Resources and Hydropower Press, 1983. (in Chinese))