

DOI: 10.11779/CJGE20221159

非静水压巷道塑性区半径的复变函数实用解答与应用扩展

张常光^{1,2}, 李宗辉¹, 孟祥忠¹, 王晓轮¹, 李天斌²

(1. 长安大学建筑工程学院, 陕西 西安 710061; 2. 成都理工大学地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室, 四川 成都 610059)

摘要: 针对非静水压力作用下圆形巷道的非圆塑性区边界线求解, 首先通过类比提出围岩弹性区应力的简洁复变函数, 基于理想弹-塑性模型和 Mohr-Coulomb 准则并利用围岩弹塑性交界线处的应力连续条件, 建立了巷道塑性区半径的复变函数实用解答, 其次采用弹-脆-塑性模型和统一强度理论以考虑围岩强度的峰后脆性下降与中间主应力效应, 推导了巷道塑性区半径的复变函数扩展解答, 最后给出所得解答的适用条件, 并与文献理论解答和实测结果进行对比。研究表明: 所得复变函数实用解答具有显式解析表达和易于计算分析等优点, 其正确性与精度得到文献摄动解和高精度复变函数解的充分性验证; 所得扩展解答保留了原实用解答的所有优点, 能合理描述围岩强度的峰后脆性下降与中间主应力效应而工程应用前景广阔, 与深埋巷道实测松动圈吻合良好。

关键词: 非静水压力; 巷道塑性区半径; 复变函数; 峰后脆性; 中间主应力效应

中图分类号: TU452

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)12-2438-07

作者简介: 张常光(1982—), 男, 山东菏泽人, 博士, 教授, 从事非饱和土与地下工程研究。E-mail: zcg1016@163.com。

Practical solutions for complex variable function for radius of tunnel plastic zone under non-hydrostatic pressures and their application extension

ZHANG Changguang^{1,2}, LI Zonghui¹, MENG Xiangzhong¹, WANG Xiaolun¹, LI Tianbin²

(1. School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China; 2. State Key Laboratory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: In order to address the non-circular plastic boundary of rock circular tunnels under non-hydrostatic pressures, a simple complex variable function for the stress in an elastic zone is firstly introduced by using the analogy method. Based on the elastic perfectly-plastic model and the Mohr-Coulomb criterion, a practical solution for complex variable function for the radius of tunnel plastic zone is then derived under the stress continuity at the elastic-plastic boundary of surrounding rocks. Additionally, an extended solutions for complex variable function for the radius of tunnel plastic zone is proposed by adopting the elastic-brittle-plastic model and the unified strength theory to take into consideration both the post-peak brittle decrease and the effect of the intermediate principal stress of rock strength. Finally, the application conditions for the proposed solutions are provided, and they are compared with the available theoretical solutions and the measured data in the literatures. The results show that the practical solution for complex variable function has the advantages of explicitly analytical formulation as well as convenient calculation and analysis, whose validity and accuracy are sufficiently demonstrated by the perturbed solution and high-precision solution for complex variable function in the literatures. The extended solution retains all the advantages of the original practical solution and has good consistency with the measured loosening depth of a deep tunnel. Moreover, the extended solution has a broad application prospect due to the fact that it reasonably accounts for the post-peak brittle decrease and the effect of the intermediate principal stress of rock strength.

Key words: non-hydrostatic pressure; radius of tunnel plastic zone; complex variable function; post-peak brittleness; effect of intermediate principal stress

0 引言

巷道工程在能源开采与运输、核废料储存和国防
工程建设中发挥了重要作用, 设计时常将巷道开挖与

基金项目: 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室开放基金项目 (SKLGP2020K022); 长安大学中央高校基本科研业务费专项资金项目 (300102282206)
收稿日期: 2022-09-19

支护施作简化为平面应变问题。平面应变状态下巷道横断面内两个方向的地应力大小多数不相等, 这种非静水压力使得巷道塑性区边界线不再是静水压力下的圆形。目前, Kastner 法^[1-2]、总荷载不变法^[3-4]、摄动法^[5-6]以及复变函数法^[7-8]已用于理论求解非静水压巷道的非圆塑性区边界线, 然而 4 种方法各有不足之处。

Kastner 法将弹性状态时非静水压圆形巷道的应力公式, 代入围岩屈服准则以构建非圆塑性区的边界线方程, 没有考虑巷道开挖造成围岩塑性部分发展及弹性区内边界的非圆化。总荷载不变法通过力平衡原理确定巷道水平轴和竖向轴处较为准确的塑性区半径, 但随后由几何相似拓展至其他方位角时却略显粗糙。摄动法以逐阶逼近方式可得到高精度的巷道塑性区半径表达式, 而分析过程和求解难度会随摄动阶数提高大幅增加。复变函数法借助保角变换将巷道非圆塑性区映射为圆形塑性区, 解决巷道非圆塑性区范围具有天然优势。吕爱钟等^[7]基于理想弹-塑性模型和 Mohr-Coulomb(MC)准则并运用保角变换、傅里叶级数展开与傅里叶积分, 建立了非静水压圆形巷道非圆塑性区半径的高精度复变函数解答(图解法、非线性优化法)。然而, 有关映射函数系数的庞大非线性方程组计算繁琐与表达隐性, 造成高精度复变函数解答的工程应用存在一定难度。Lü 等^[8]为获得非静水压寒区巷道冻胀力的解析解, 针对巷道未冻结弹性围岩构建了应力复变函数的简洁表达式。

因此, 通过类比提出巷道弹性区应力的简洁复变函数, 继而基于理想弹-塑性模型和 MC 准则, 建立了非静水压圆形巷道塑性区半径的复变函数实用解答, 并对比文献摄动解和高精度复变函数解进行正确性与精度验证。另外, 为扩大所得复变函数实用解答的应用潜力, 采用弹-脆-塑性模型、统一强度理论分别描述围岩强度的峰后脆性下降与中间主应力效应, 推导了非静水压圆形巷道塑性区半径的复变函数扩展解答, 最后对比深埋巷道实测松动圈进行了合理性与实用性验证。

1 问题描述

图 1 为非静水压圆形巷道在物理平面 z 内的平面应变力学模型, 在巷道洞壁处作用均匀支护力 p_i , 巷道开挖形成非圆塑性区边界线 L ; a 为巷道半径, R_p 为塑性区半径, r 为 z 平面内某点到巷道中心的距离; θ 为以逆时针旋转为正的方位角, 起点在水平右半轴; 无穷远处初始的竖向地应力 q 、水平地应力 λq 可转换为^[6]径向荷载 $\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = q - 0.5q(1-\lambda)(1+\cos 2\theta)$ 、切向荷载 $\tau_{r\theta}|_{r \rightarrow \infty} = 0.5q(1-\lambda)\sin 2\theta$, λ 为侧压力系数。

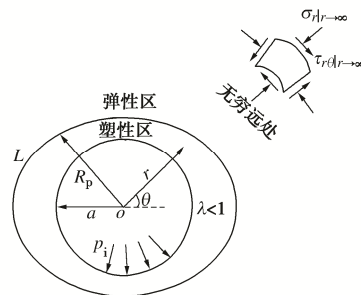


图 1 非静水压巷道的力学模型

Fig. 1 Mechanical model for a non-hydrostatic pressure tunnel

假设围岩为均匀连续各向同性的理想弹-塑性材料, 强度屈服时满足 MC 准则。采用大主应力 σ_1 与小主应力 σ_3 表达以压应力为正的 MC 准则为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= A\sigma_3 + B, \\ A &= \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \\ B &= \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: A , B 为方程系数; c , φ 为围岩的黏聚力和内摩擦角。

由 Mohr 圆得围岩应力分量与主应力的关系为

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad (2a)$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}. \quad (2b)$$

式中: σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ 分别为围岩应力分量中的径向正应力、环向正应力和切应力。

将式 (2) 代入式 (1) 得围岩的强度准则为

$$(1+A)\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} = (A-1)(\sigma_r + \sigma_\theta) + 2B. \quad (3)$$

2 复变函数法

采用复变函数保角变换将图 2(a) 物理平面 z 的非圆塑性区边界线 L 映射为图 2(b) 复平面 ζ 的圆形塑性区边界线 S , 图 2 中 ρ 为复平面 ζ 的半径, 方位角 θ 保持不变且巷道洞壁边界亦不变。

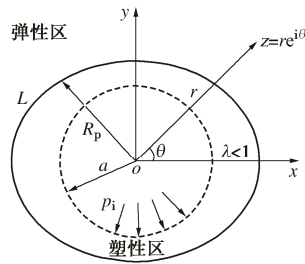
因此, 围岩物理平面 z 的内边界非圆弹性区变换为复平面 ζ 的单位圆外域, 非圆弹塑性边界转化为规则的圆形边界, 使得非圆外域的弹性区应力求解变为圆形外域的弹性区应力求解。

围岩弹性区应力 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ 和复变函数 $g(z)$, $h(z)$ 的关系为

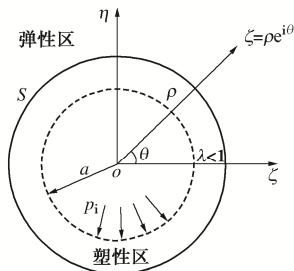
$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[g'(z) + \overline{g'(z)}] = 4\operatorname{Re}[g'(z)], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2[\overline{zg''(z)} + h'(z)] \cdot \\ &(\cos 2\theta + 2i\sin 2\theta). \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $z = re^{i\theta}$, 则 $\bar{z} = re^{-i\theta}$ 。



(a) z平面非圆塑性区



(b) \zeta平面圆塑性区

图2 保角变换

Fig. 2 Conformal transformation

类比 Lü 等^[8]针对非静水压寒区巷道未冻结弹性围岩所提应力复变函数的简洁表达式, 构建图2(a)弹性区应力的复变函数为

$$g(z) = \frac{q}{4} \left[(1+\lambda)z + (1-\lambda)\chi R_p^2 z^{-1} \right], \quad (6)$$

$$h(z) = \frac{q}{2} \left[(1-\lambda)z + (1+\lambda)\alpha R_p^2 z^{-1} + (1-\lambda)\beta R_p^4 z^{-3} \right]. \quad (7)$$

式中: χ, α, β 为复变函数的系数, 且都是实数。

将式(6), (7)代入式(4), (5)得

$$\sigma_r + \sigma_\theta = q \left[(1+\lambda) - (1-\lambda)\chi \frac{R_p^2}{r^2} \cos 2\theta \right], \quad (8a)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = q \left[(1+\lambda)\alpha \frac{R_p^2}{r^2} + (1-\lambda) \left(1 + \chi \frac{R_p^2}{r^2} - 3\beta \frac{R_p^4}{r^4} \right) \cos 2\theta + (1-\lambda) \left(1 - \chi \frac{R_p^2}{r^2} + 3\beta \frac{R_p^4}{r^4} \right) i \sin 2\theta \right]. \quad (8b)$$

由式(8b)两边的虚数 i 系数相等求切应力 $\tau_{r\theta}$, 继而联立式(8a), (8b)求径向正应力 σ_r 、环向正应力 σ_θ , 整理得围岩弹性区应力为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q}{2} (1+\lambda) \left(1 - \alpha \frac{R_p^2}{r^2} \right) - \\ &\quad \frac{q}{2} (1-\lambda) \left(1 + 2\chi \frac{R_p^2}{r^2} - 3\beta \frac{R_p^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \quad (9a) \\ \sigma_\theta &= \frac{q}{2} (1+\lambda) \left(1 + \alpha \frac{R_p^2}{r^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\frac{q}{2} (1-\lambda) \left(1 - 3\beta \frac{R_p^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \quad (9b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{q}{2} (1-\lambda) \left(1 - \chi \frac{R_p^2}{r^2} + 3\beta \frac{R_p^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \quad (9c)$$

经检验知, 式(9)满足图1巷道无穷远处的应力边界条件。

3 推导及验证

3.1 塑性区应力

平衡微分方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad (10b)$$

另外, 塑性区应力满足围岩的强度准则式(3), 且在巷道洞壁处存在应力边界即 $r=a$ 时 $\sigma_r = p_i$, $\tau_{r\theta} = 0$, 如此塑性区3个应力分量恰好对应1个代数方程与2个线性微分方程, 构成一类塑性力学静定边值问题。以巷道洞壁处的应力边界为条件, 联立式(3), (10)求得围岩塑性区应力为^[4, 7]

$$\sigma_r^p = \left(p_i + \frac{B}{A-1} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{A-1} - \frac{B}{A-1}, \quad (11a)$$

$$\sigma_\theta^p = A \left(p_i + \frac{B}{A-1} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{A-1} - \frac{B}{A-1}, \quad (11b)$$

$$\tau_{r\theta}^p = 0. \quad (11c)$$

式中: 上标 p 代表围岩塑性区。

3.2 塑性区半径

对于经典的静水压力圆形巷道问题, 在无穷远处只作用均匀径向荷载 q 而无切向荷载, 围岩的弹性区应力为

$$\sigma_r = q - \frac{q(A-1)+B}{A+1} \cdot \frac{R_p^2}{r^2}, \quad (12a)$$

$$\sigma_\theta = q + \frac{q(A-1)+B}{A+1} \cdot \frac{R_p^2}{r^2}, \quad (12b)$$

$$\tau_{r\theta} = 0. \quad (12c)$$

同时, 将侧压力系数 $\lambda=1$ 代入式(9), 亦得静水压圆形巷道的围岩弹性区应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q - \alpha q \frac{R_p^2}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= q + \alpha q \frac{R_p^2}{r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

故式(12), (13)的应力分量完全相同, 进而得

系数 α 为

$$\alpha = \frac{q(A-1)+B}{q(A+1)} \quad (14)$$

对于侧压力系数 $\lambda \neq 1$ 的非静水压圆形巷道, 依据弹塑性交界线 $r=R_p$ 处的应力连续条件知, 3 个应力分量的弹性值式 (9) 和塑性值式 (11) 要分别相等, 也等同于 2 个应力分量相等再加弹性区一侧的应力满足围岩强度准则。由式 (9a) = 式 (11a) 得式 (15a) 中的径向正应力连续、式 (9c) = 式 (11c) 得式 (15b) 中的切应力连续, 将式 (9) 代入式 (3) 得式 (15c) 中的弹性区一侧应力满足 MC 准则。

$$\frac{q}{2}(1+\lambda)(1-\alpha) - \frac{q}{2}(1-\lambda)(1+2\chi-3\beta) \cdot \cos 2\theta = \left(p_i + \frac{B}{A-1}\right) \left(\frac{R_p}{a}\right)^{A-1} - \frac{B}{A-1}, \quad (15a)$$

$$1 - \chi + 3\beta = 0, \quad (15b)$$

$$q \cos 2\theta (A+1-3\beta A-3\beta+2\chi A) - B = 0. \quad (15c)$$

由式 (15b), (15c) 得系数 χ, β 为

$$\chi = \frac{B}{(A-1)q \cos 2\theta} - \frac{2(A+1)}{A-1}, \quad (16a)$$

$$\beta = \frac{B}{3(A-1)q \cos 2\theta} - \frac{3A+1}{3(A-1)}. \quad (16b)$$

继而将式 (14), (16) 代入式 (15a), 化简得塑性区半径 R_p 为

$$R_p = a \left[\frac{\frac{(1+\lambda)(2q-B)}{A+1} + \frac{(1-\lambda)(4q \cos 2\theta - B) + 2B}{A-1}}{2\left(p_i + \frac{B}{A-1}\right)} \right]^{\frac{1}{A-1}}. \quad (17)$$

式 (17) 即为本节所建立的非静水压圆形巷道塑性区半径的复变函数实用解答, 具有求解过程清晰简明、显式解析表达、易于计算分析等优点, 方便在工程中推广应用。值得注意的是, 式 (17) 仅适用于类椭圆形塑性区完全包围巷道洞周的情况, 要求 $\lambda < 1$ 时塑性区短轴 $R_{p(\theta=90^\circ)} \geq$ 巷道半径 a , $\lambda > 1$ 时塑性区短轴 $R_{p(\theta=0^\circ)} \geq$ 巷道半径 a , 故此节所得解答的适用条件:

当 $\lambda \leq 1$ 时,

$$\left[\frac{\frac{(1+\lambda)(2q-B)}{A+1} + \frac{(1-\lambda)(-4q-B)+2B}{A-1}}{2\left(p_i + \frac{B}{A-1}\right)} \right]^{\frac{1}{A-1}} \geq 1; \quad (18a)$$

当 $\lambda > 1$ 时,

$$\left[\frac{\frac{(1+\lambda)(2q-B)}{A+1} + \frac{(1-\lambda)(4q-B)+2B}{A-1}}{2\left(p_i + \frac{B}{A-1}\right)} \right]^{\frac{1}{A-1}} \geq 1. \quad (18b)$$

3.3 对比验证

魏悦广^[4]基于理想弹-塑性模型和 MC 准则, 建立了非静水压圆形巷道塑性区半径的摄动解答。取文献 [4] 中的巷道算例: ① $c=2.45$ MPa, $\varphi=30^\circ$, $a=1$ m, $q=13.1$ MPa, $p_i=0$ MPa, $\lambda=1.125$; ② $c=2.45$ MPa, $\varphi=30^\circ$, $a=1$ m, $q=24.5$ MPa, $p_i=0$ MPa, $\lambda=1.2$ 。图 3 为两种方法所得巷道塑性区半径的对比, 平均相对误差 (取绝对值) 在 $\lambda=1.125$ 时为 0.84%、在 $\lambda=1.2$ 时为 1.36%, 验证了所得复变函数实用解答的合理性。

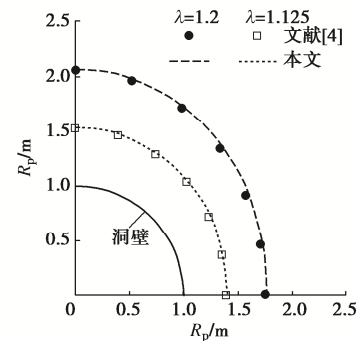


图 3 对比摄动解

Fig. 3 Comparison with perturbed solution

吕爱钟等^[7]基于理想弹-塑性模型和 MC 准则, 将弹塑性交界处的应力连续条件按傅里叶级数展开并进行傅里叶积分, 获得了非静水压圆形巷道塑性区半径的高精度复变函数解答。取文献 [7] 中的巷道算例: $c=1$ MPa, $\varphi=30^\circ$, $a=2$ m, $q=15$ MPa, $p_i=0$ MPa, λ 为 0.7, 0.8, 0.9。图 4 为本文与文献 [7] 的巷道塑性区半径对比, 平均相对误差 (取绝对值) 在 λ 为 0.7, 0.8, 0.9 时分别为 5.75%, 1.19%, 0.54%, 表明了所得复变函数实用解答的正确性与良好精度。

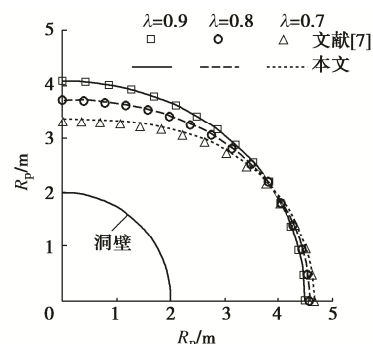


图 4 对比高精度复变函数解

Fig. 4 Comparison with high-precision solution for complex variable function

4 应用扩展

4.1 扩展解答

为更好描述围岩强度的峰后脆性下降和中间主应力效应, 采用图 5 (a) 中的弹-脆-塑性模型、图 5 (b)

中的统一强度理论分别替换 1~2 节中的理想弹-塑性模型、MC 准则, 以扩大上述复变函数实用解答的工程应用范围。弹-脆-塑性围岩存在峰前屈服和峰后屈服, 对应峰前黏聚力 c_i 与峰前内摩擦角 φ_i 、峰后黏聚力 c_r 与峰后内摩擦角 φ_r 。

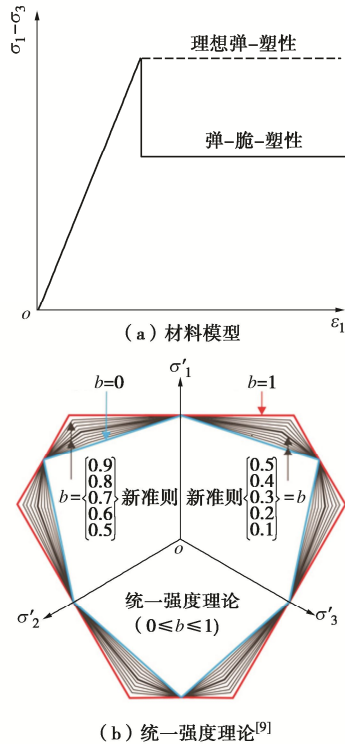


图 5 材料模型和统一强度理论

Fig. 5 Material model and unified strength theory

结合平面应变状态下 $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ 和以压应力为正的统一强度理论, 整理得围岩的峰前/峰后强度准则为^[6, 9]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= A_i \sigma_3 + B_i, \\ A_i &= \frac{2+b+(2+3b)\sin\varphi_i}{(2+b)(1-\sin\varphi_i)}, \\ B_i &= (A_i - 1)c_i \cot\varphi_i, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= A_r \sigma_3 + B_r, \\ A_r &= \frac{2+b+(2+3b)\sin\varphi_r}{(2+b)(1-\sin\varphi_r)}, \\ B_r &= (A_r - 1)c_r \cot\varphi_r. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中: A_i , B_i , A_r , B_r 为方程系数; b 为统一强度理论参数, 代表中间主应力 σ_2 对围岩强度的影响程度, 可参考文献[9]中的方法确定取值, $b=0$ 时为忽略中间主应力的 MC 准则, $0 < b \leq 1$ 时为反映不同中间主应力效应的系列强度准则。

将式 (2) 代入式 (19), (20), 得由应力分量表达的围岩峰前/峰后强度准则为

$$(1 + A_i)\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} = (A_i - 1)(\sigma_r + \sigma_\theta) + 2B_i, \quad (21)$$

$$(1 + A_r)\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} = (A_r - 1)(\sigma_r + \sigma_\theta) + 2B_r. \quad (22)$$

首先, 对于弹-脆-塑性模型下的静水压圆形巷道, 围岩的弹性区应力为

$$\sigma_r = q - \frac{q(A_i - 1) + B_i}{A_i + 1} \cdot \frac{R_p^2}{r^2}, \quad (23a)$$

$$\sigma_\theta = q + \frac{q(A_i - 1) + B_i}{A_i + 1} \cdot \frac{R_p^2}{r^2}, \quad (23b)$$

$$\tau_{r\theta} = 0. \quad (23c)$$

依据式 (13), (23) 具有完全相同的应力分量, 求得系数 α 为

$$\alpha = \frac{q(A_i - 1) + B_i}{q(A_i + 1)}. \quad (24)$$

其次, 通过平衡微分方程式 (10)、围岩峰后强度准则式 (22) 以及巷道洞壁处的应力边界条件, 求得弹-脆-塑性围岩的塑性区应力为

$$\sigma_r^p = \left(p_i + \frac{B_r}{A_r - 1} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{A_r - 1} - \frac{B_r}{A_r - 1}, \quad (25a)$$

$$\sigma_\theta^p = A_r \left(p_i + \frac{B_r}{A_r - 1} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{A_r - 1} - \frac{B_r}{A_r - 1}, \quad (25b)$$

$$\tau_{r\theta}^p = 0. \quad (25c)$$

鉴于弹-脆-塑性围岩在弹塑性交界线处强度的不连续, 弹塑性交界线需区分内侧与外侧。弹塑性交界线的内侧属于满足围岩峰后强度准则的塑性区, 3 个应力分量由式 (25) 中 $r=R_p$ 获得, 而弹塑性交界线的外侧属于满足围岩峰前强度准则的塑性区, 故弹塑性交界线内侧与外侧的法线方向应力连续、切线方向应力不连续, 对应于径向正应力连续、切应力连续而切向正应力发生突变^[6]。

因此, 通过平衡微分方程式 (10)、围岩峰前强度准则式 (21) 以及弹塑性交界线内侧与外侧的径向正应力连续、切应力连续, 求得弹塑性交界线外侧的塑性应力分量为

$$\sigma_r^{\text{op}} = \left(p_i + \frac{B_r}{A_r - 1} \right) \left(\frac{R_p}{a} \right)^{A_r - 1} - \frac{B_r}{A_r - 1}, \quad (26a)$$

$$\sigma_\theta^{\text{op}} = A_i \left(p_i + \frac{B_r}{A_r - 1} \right) \left(\frac{R_p}{a} \right)^{A_r - 1} + B_i - \frac{A_i B_r}{A_r - 1}, \quad (26b)$$

$$\tau_{r\theta}^{\text{op}} = 0, \quad (26c)$$

式中: 上标 op 代表弹塑性交界线的外侧。

最后, 弹塑性交界线的外侧也是弹性区的内侧, 在此处 3 个应力分量均连续, 即其弹性值式 (9) 与塑性值式 (26) 相等, 亦等同于 2 个应力分量相等、塑性区一侧的应力满足围岩峰前强度准则: 由式 (9a)

=式 (26a) 得式 (27a) 中的径向正应力连续、式 (9c) =式 (26c) 得式 (27b) 中的切应力连续, 将式 (9) 代入式 (21) 得式 (27c) 中的弹性区一侧应力满足围岩峰前屈服。

$$\frac{q}{2}(1+\lambda)(1-\alpha)-\frac{q}{2}(1-\lambda)(1+2\chi-3\beta)\cdot$$

$$\cos 2\theta = \left(p_i + \frac{B_r}{A_i - 1} \right) \left(\frac{R_p}{a} \right)^{A_i - 1} - \frac{B_r}{A_i - 1}, \quad (27a)$$

$$1 - \chi + 3\beta = 0, \quad (27b)$$

$$q \cos 2\theta (A_i + 1 - 3\beta A_i - 3\beta + 2\chi A_i) - B_i = 0, \quad (27c)$$

联立式 (27b), (27c) 得系数 χ, β 为

$$\chi = \frac{B_i}{(A_i - 1)q \cos 2\theta} - \frac{2(A_i + 1)}{A_i - 1}, \quad (28a)$$

$$\beta = \frac{B_i}{3(A_i - 1)q \cos 2\theta} - \frac{3A_i + 1}{3(A_i - 1)}. \quad (28b)$$

再将式 (24), (28) 代入式 (27a), 整理得塑性区半径 R_p 为

$$R_p = a \left[\frac{\frac{(1+\lambda)(2q-B_i)}{A_i+1} + \frac{(1-\lambda)(4q \cos 2\theta - B_i)}{A_i-1} + \frac{2B_r}{A_i-1}}{2 \left(p_i + \frac{B_r}{A_i-1} \right)} \right]^{\frac{1}{A_i-1}}. \quad (29)$$

式 (29) 即为本节所建立的非静水压圆形巷道塑性区半径的复变函数扩展解答, 综合考虑了围岩强度的峰后脆性下降 (弹-脆-塑性模型) 和中间主应力效应 (统一强度理论), 但保留了原实用解答的一切优点, 具有一定的理论意义与更广阔的应用潜力。需要说明的是, 式 (17) 为采用理想弹-塑性模型 ($c=c_r=c_i, \varphi=\varphi_r=\varphi_i$) 和 MC 准则 ($b=0$) 时式 (29) 的特例, 式 (29) 还能退化为只表现围岩强度峰后脆性下降 (弹-脆-塑性模型、MC 准则) 或围岩强度中间主应力效应 (理想弹-塑性模型、统一强度理论) 的单因素扩展解答。

同理, 此节所得解答的适用条件如下:

当 $\lambda \leq 1$ 时,

$$\left[\frac{\frac{(1+\lambda)(2q-B_i)}{A_i+1} + \frac{(1-\lambda)(-4q-B_i)}{A_i-1} + \frac{2B_r}{A_i-1}}{2 \left(p_i + \frac{B_r}{A_i-1} \right)} \right]^{\frac{1}{A_i-1}} \geq 1; \quad (30a)$$

当 $\lambda > 1$ 时,

$$\left[\frac{\frac{(1+\lambda)(2q-B_i)}{A_i+1} + \frac{(1-\lambda)(4q-B_i)}{A_i-1} + \frac{2B_r}{A_i-1}}{2 \left(p_i + \frac{B_r}{A_i-1} \right)} \right]^{\frac{1}{A_i-1}} \geq 1. \quad (30b)$$

4.2 实验验证

经纬^[10]现场实测了淮南矿区某深埋巷道的松动圈范围, 围岩帮部、顶部和底板中部的实测松动圈深度依次为 2.80, 2.39, 3.84 m。该深埋巷道的相关参数: $c_i=5.58$ MPa, $c_r=0.72$ MPa, $\varphi_i=\varphi_r=27.83^\circ$, $a=2.95$ m (等效半径), $q=21.86$ MPa, $p_i=0.75$ MPa, $\lambda=0.8$ 。可见, 围岩的黏聚力在峰后存在较大下降, 符合弹-脆-塑性模型。

(1) 应用基于理想弹-塑性模型 ($c=c_r=c_i, \varphi=\varphi_r=\varphi_i$) 和 MC 准则 ($b=0$) 的式 (17), 所得塑性区半径为 3.15~3.53 m, 围岩帮部、顶部和底板中部的计算塑性区深度为 0.99, 0.20, 1.87 m, 相比实测的松动圈深度小些。

(2) 应用仅考虑围岩峰后强度脆性下降的单因素扩展解答 (式 (29)、弹-脆-塑性模型、MC 准则即 $b=0$), 所得塑性区半径为 5.64~6.75 m, 围岩帮部、顶部和底板中部的计算塑性区深度为 4.21, 2.69, 4.71 m, 相比实测的松动圈深度大些。

(3) 应用综合考虑围岩强度的峰后脆性下降 (弹-脆-塑性模型) 和中间主应力效应 (统一强度理论, $b=0.5$) 的式 (29), 所得塑性区半径为 5.25~6.02 m, 围岩帮部、顶部和底板中部的计算塑性区深度为 3.48, 2.30, 3.95 m, 此计算塑性区深度稍大于实测松动圈深度而在其外围, 符合深埋巷道的开挖扰动规律。

(4) 应用综合考虑围岩强度的峰后脆性下降 (弹-脆-塑性模型) 和中间主应力效应 (统一强度理论, $b=1$) 的式 (29), 所得塑性区半径为 4.47~5.22 m, 围岩帮部、顶部和底板中部的计算塑性区深度为 2.68, 1.52, 3.12 m, 略小于实测松动圈深度而不符合深埋巷道的开挖扰动规律。

上述深埋巷道的计算结果与实测数据对比表明, 需采用弹-脆-塑性模型并适当考虑围岩强度的中间主应力效应 ($b=0.5$) 的式 (29) 才能获得较优解答, 而忽略中间主应力效应 ($b=0$) 或夸大中间主应力效应 (如 $b=1$) 的计算都不理想, 验证了所得复变函数扩展解答的正确性和实用性。

5 结 论

(1) 通过类比提出了非静水压圆形巷道弹性区应力的简洁复变函数, 继而结合围岩弹塑性交界线处的应力边界条件, 推导了具有显式解析表达的巷道塑性区半径复变函数实用解答, 大幅度精简了分析过程、降低了求解难度, 并得到文献摄动解和高精度复变函数解的正确性与精度验证。

(2) 采用弹-脆-塑性模型、统一强度理论描述围岩强度的峰后脆性下降与中间主应力效应, 建立了工程应用潜力更广泛的非静水压圆形巷道塑性区半径扩展解答, 保留了原实用解答的所有优点, 可退化为原实用解答、单因素扩展解答, 并与深埋巷道实测吻合良好。

参考文献:

- [1] 曾开华, 李学军, 鹿守山, 等. 两向不等压圆形隧道塑性统一解及其应用[J]. 岩土工程学报, 2022, **44**(10): 1772-1779. (ZENG Kaihua, LI Xuejun, LU Shoushan, et al. Unified plastic solutions to a circular tunnel under two-way unequal pressures and their applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, **44**(10): 1772-1779. (in Chinese))
- [2] HU Z P, AN X X, LI F T, et al. The shape characteristics of circular tunnel surrounding rock plastic zone in the complex stress field[J]. Arabian Journal of Geosciences, 2022, **15**(2): 150.
- [3] 张常光, 李宗辉, 关港辉, 等. 采用总荷载不变法的非静水压隧道摄动拓展解[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2022, **54**(6): 71-82. (ZHANG Changguang, LI Zonghui, GUAN Ganghui, et al. Extended perturbation solutions of a non-hydrostatic pressure tunnel based on total load invariant method[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2022, **54**(6): 71-82. (in Chinese))
- [4] 魏悦广. 两向不等压作用下圆形巷道弹塑性分析摄动解[J]. 岩土工程学报, 1990, **12**(4): 11-20. (WEI Yueguang. Perturbation solutions for elasto-plastic analysis of circular tunnel under unequal compression in two directions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1990, **12**(4): 11-20. (in Chinese))
- [5] SHENG Y M, ZOU J F, DONG Y P, et al. Novel perturbation solutions for deep-buried non-circular tunnels under biaxial in situ stress field based on Mohr-Coulomb criterion[J]. Applied Mathematical Modelling, 2022, **110**: 408-440.
- [6] 张常光, 李宗辉, 关港辉, 等. 基于统一强度理论的非静水压圆形隧道塑性区半径的脆塑性摄动解[J]. 力学学报, 2022, **54**(7): 1994-2007. (ZHANG Changguang, LI Zonghui, GUAN Ganghui, et al. Brittle plastic perturbation solutions of plastic zone radius for circular tunnels under non-hydrostatic pressures based on the unified strength theory[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, **54**(7): 1994-2007. (in Chinese))
- [7] 吕爱钟, 张晓莉, 王少杰. 两向不等压圆形隧洞弹塑性解析分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, **37**(1): 14-22. (LÜ Aizhong, ZHANG Xiaoli, WANG Shaojie. Analytic method for elasto-plastic analysis of circular tunnels under non-axisymmetric stresses[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, **37**(1): 14-22. (in Chinese))
- [8] LÜ Z T, XIA C C, LIU W P. Analytical solution of frost heaving force and stress distribution in cold region tunnels under non-axisymmetric stress and transversely isotropic frost heave of surrounding rock[J]. Cold Regions Science and Technology, 2020, **178**: 103117.
- [9] 俞茂宏, 武霞霞, 史俊, 等. 确定土体破坏准则的一个新方法[J]. 西安交通大学学报, 2020, **54**(8): 1-10. (YU Maohong, WU Xiaxia, SHI Jun, et al. A new strategy for determining failure criteria of soil[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2020, **54**(8): 1-10. (in Chinese))
- [10] 经纬. 圆形巷道围岩变形分区的理论与试验研究[D]. 淮南: 安徽理工大学, 2017. (JING Wei. Theoretical and Experimental Research on Deformation Partition of Circular Roadway[D]. Huainan: Anhui University of Science and Technology, 2017. (in Chinese))