

DOI: 10.11779/CJGE20221051

# 非对称破坏模式下临坡地基的 Meyerhof 承载力新解

晏青<sup>1,2</sup>, 赵均海<sup>1</sup>, 张常光<sup>\*1</sup>

(1. 长安大学建筑工程学院, 陕西 西安 710061; 2. 山东理工大学建筑工程学院, 山东 淄博 255000)

**摘要:** 利用统一强度理论的平面应变强度方程, 综合考虑中间主应力、基础至坡肩的水平距离、边坡高度和基底粗糙情况等因素, 提出临坡地基坡面非对称破坏模式和坡底非对称破坏模式, 继而建立条形基础下临坡地基新的 Meyerhof 承载力解答, 给出具体应用步骤并开展理论退化分析与对比验证。研究表明: 考虑坡后土体强度贡献所提出的非对称破坏模式更符合临坡地基的实际破坏形态; 所得临坡地基 Meyerhof 承载力解答与文献模型试验和数值模拟均吻合良好; 中间主应力可明显提高临坡地基的承载力; 临坡地基承载力随边坡高度增加先减小后恒定。研究结果合理反映了土体强度的中间主应力效应、破坏模式的非对称性以及基础旁侧土体强度等工程实际情况, 对临坡地基优化设计具有一定的理论指导意义。

**关键词:** 临坡地基; 地基承载力; 非对称破坏模式; Meyerhof 理论; 统一强度理论

**中图分类号:** TU470 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2024)05-1077-08

**作者简介:** 晏青(1992—), 女, 河南信阳人, 博士, 讲师, 从事岩土工程强度理论与应用研究。E-mail: yanqing1210@126.com。

## New solutions of Meyerhof's bearing capacity for foundations near slopes under asymmetric failure modes

YAN Qing<sup>1,2</sup>, ZHAO Junhai<sup>1</sup>, ZHANG Changguang<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China; 2. School of Civil Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255000, China)

**Abstract:** The asymmetric failure modes involving the slope face failure and the below-toe failure are proposed, and then new solutions of Meyerhof's bearing capacity for strip foundations near slopes are presented by adopting the shear strength equation of unified strength theory under plane strain conditions. The combined effects of the intermediate principal stress, the horizontal distance of foundation from the slope shoulder, the slope height and the base roughness are taken into account. The specific application steps of the obtained solutions are provided, and theoretical degradation analysis and comparison verifications are conducted. It is found herein that the proposed asymmetrical failure mode considering the contribution of soil strength behind the slope is more consistent with the actual failure behavior of foundations near slopes. The obtained solutions of Meyerhof's bearing capacity for foundations near slopes are in good agreement with those of the model tests and numerical simulations in the literature. The intermediate principal stress has a marked improvement effect on the bearing capacity of foundations near slopes. The bearing capacity of foundations near slopes first decreases and then remains unchanged with the increase of the slope height. This study accounts for practical engineering conditions, such as the intermediate principal stress effect of soil strength, the asymmetry of failure modes and soil strength at foundation lateral side, which is of theoretical guiding significance to the optimal design of foundations near slopes.

**Key words:** foundation near slope; bearing capacity of foundation; asymmetric failure mode; Meyerhof theory; unified strength theory

## 0 引言

在交通、水利和建筑等工程建设中, 基础常被布置于边坡或基坑附近, 使得临坡地基的承载力有所减小。现有临坡地基承载力解答大多借助均布超载描述基础埋深内土体自重的贡献, 不计基础旁侧的土体强

度。Meyerhof 理论通过“等代自由面”上的等代应力反映基础旁侧土体强度的影响, 更符合地基的实际破

**基金项目:** 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室开放基金项目 (SKLGP2020K022); 陕西省自然科学基金项目 (2021GM-170)

**收稿日期:** 2022-08-24

**\*通信作者(E-mail: zcg1016@163.com)**

坏形态<sup>[1]</sup>。胡卫东等<sup>[2]</sup>假定地基破坏时基础下三角形弹性区是对称的,基于 Meyerhof 理论推导了临坡地基承载力公式。然而,临坡基础下土体应力不均匀引起了地基破坏模式的非对称性,基础下弹性破坏区为非对称的三角形楔体<sup>[3]</sup>。另外,郑刚等<sup>[4]</sup>的数值模拟表明条形基础下临坡地基可能发生坡面、坡脚、坡底或水平对称等破坏模式,Chen 等<sup>[5]</sup>获得了坡面破坏和坡底破坏下临坡地基的非对称破坏模式以及承载力上限法解答。

上述临坡地基承载力计算均采用 Mohr-Coulomb 强度准则,忽略了中间主应力对地基土体强度的提高作用,所得结果常偏于保守。统一强度理论合理解释了岩土类材料强度的中间主应力效应<sup>[6-7]</sup>,已广泛应用于水平地基承载力分析。因此,本文基于统一强度理论,考虑滑动区域内滑块的不对称性与基础旁侧土体的强度,提出临坡地基坡面破坏和坡底破坏下侧非对称破坏模式,构建虚拟滑动面以反映坡后土体的强度贡献,进而建立临坡地基新的 Meyerhof 承载力解答,给出具体应用步骤并开展理论退化分析,最后结合文献[8, 9]的模型试验和文献[4]的数值模拟进行正确性验证。

## 1 非对称破坏模式

本文在坡角  $\eta \leq 45^\circ$ 、边坡高度  $H \leq 8$  m 的范围内,开展条形基础下临坡地基承载力的公式推导,以避免边坡发生失稳。

图 1 为某临坡条形基础,宽度为  $B$ 、埋深为  $D$ ,基础至坡肩的水平距离为  $L=aB$ , $a$  为距离系数;地基发生极限平衡状态下整体剪切破坏而达到承载力  $q_u$ ,破坏模式为图 1(a) 中的坡面破坏或图 1(b) 中的坡底破坏(将坡脚破坏视为坡底破坏的特例)。鉴于临坡基础下土体应力不均匀诱发地基非对称性破坏,设定虚拟滑动面  $CIJ$ ,将滑动区域分块并做如下假定:

(1) 地基滑动面与坡面或其延长线交点至地表的垂直距离为  $H_s$ ,图 1(a) 中滑动面相交坡面  $GM$  于  $E$  点,此时  $H_s < H$ ,地基发生坡面破坏;图 1(b) 中滑动面相交坡底于  $N$  点、相交坡面  $GM$  的延长线于  $E$  点,此时  $H_s \geq H$ ,地基发生坡底破坏。

(2) 土体抗剪强度  $\tau_f$  采用基于统一强度理论的平面应变强度方程,其表达式为<sup>[6-7]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= c_t + \sigma \tan \varphi_t, \\ \sin \varphi_t &= \frac{2(1+b)\sin \varphi}{2+b(1+\sin \varphi)}, \\ c_t &= \frac{2(1+b)c \cos \varphi}{2+b(1+\sin \varphi)} \frac{1}{\cos \varphi_t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中:  $\sigma$  为沿滑动面法向的正应力,并以压应力为正;  $c$  为黏聚力,  $\varphi$  为内摩擦角;  $c_t$  为统一黏聚力,  $\varphi_t$  为统一内摩擦角;  $b$  为统一强度理论参数,且  $0 \leq b \leq 1$ 。参数  $b$  的取值反映了土体强度中间主应力效应的强弱,同时也代表选取不同的强度准则。当  $b=0$  时,式(1)退化为基于经典 Mohr-Coulomb 强度准则的平面应变强度方程,  $b=1$  时退化为基于双剪应力强度准则的平面应变强度方程,  $0 < b < 1$  时为一系列新的平面应变强度方程。

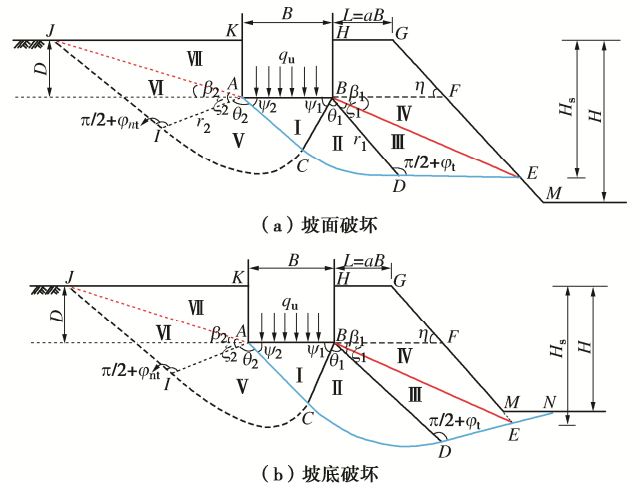


图 1 非对称破坏模式下的临坡地基

Fig. 1 Foundations near slopes under asymmetric failure modes

(3) 坡后土体强度发挥不充分,引入发挥系数  $n$  ( $0 < n \leq 1$ ) 以表征坡后土体强度参数(即虚拟黏聚力  $c_{nt}$  和虚拟内摩擦角  $\varphi_{nt}$ ),则坡后土体抗剪强度  $\tau_{nt}$  为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{nt} &= nc_t + n\sigma \tan \varphi_t = c_{nt} + \sigma \tan \varphi_{nt}, \\ c_{nt} &= nc_t, \\ \tan \varphi_{nt} &= n \tan \varphi_t. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(4) 在非对称的三角形弹性楔体即区域 I 中,  $BC$  面、 $AC$  面与水平面的夹角分别为  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ , 其大小为  $\psi_1 = \varphi_t$ ,  $\psi_2 = \varphi_{nt}$  (基底完全粗糙),  $\psi_1 = \pi/4 + \varphi_t/2$ ,  $\psi_2 = \pi/4 + \varphi_{nt}/2$  (基底完全光滑)。区域 II 和 V 为剪切过渡区,  $CD$  面、 $CI$  面分别是辐射区顶角为  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的对数螺旋线。

(5) 区域 III 和 VI 为被动破坏区,分别沿对数螺旋线  $CD$  和  $CI$  的切线方向滑动,则  $BD$  面与  $DE$  面的夹角为  $\pi/2 + \varphi_t$ ,  $AI$  面与  $IJ$  面的夹角为  $\pi/2 + \varphi_{nt}$ 。区域 IV, VII 为松动区,需对应借助  $BE$  面和  $AJ$  面上的等代应力反映基础旁侧土体的强度贡献。

## 2 公式推导

基于 Meyerhof 理论,将临坡地基承载力  $q_u$  近似视为以下两部分之和:由土体黏聚力  $c$  和基础旁侧荷载引起的承载力  $q_{u1}$ ,由土体自重  $\gamma$  引起的承载力  $q_{u2}$ 。

## 2.1 坡面破坏

图 1(a) 为临坡地基的坡面破坏, 满足  $H_s < H$ 。

(1) 承载力  $q_{ul}$

设静止土压力系数为  $K_0$ , 则平均作用于图 1(a) 中基础侧面  $BH$  和  $AK$  上的法向应力  $\sigma_a$  和切应力  $\tau_a$  为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= 0.5K_0\gamma D, \\ \tau_a &= \sigma_a \tan \delta = 0.5K_0\gamma D \tan \delta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中:  $\delta$  为基础侧面的外摩擦角 (埋深  $D > 0$ )。

图 2 为隔离体 IV ( $BEGH$ ) 的受力分析, 图 2 中  $W_4 = \gamma S_4$  为隔离体 IV 的自重,  $S_4$  为四边形  $BEGH$  的面积,  $\beta_1$  为  $BE$  面与水平面的夹角。

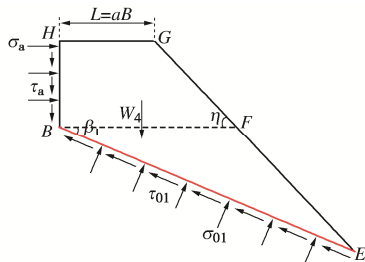


图 2 分析隔离体 IV 的受力

Fig. 2 Force analysis of isolator IV

由  $BE$  面法线方向和切线方向的力平衡得法向应力  $\sigma_{01}$  和切应力  $\tau_{01}$  为

$$\sigma_{01} = \frac{\gamma S_4 \cos \beta_1 + 0.5K_0\gamma D^2 (\cos \beta_1 \tan \delta - \sin \beta_1)}{\overline{BE}}, \quad (4a)$$

$$\tau_{01} = \frac{\gamma S_4 \sin \beta_1 + 0.5K_0\gamma D^2 (\sin \beta_1 \tan \delta + \cos \beta_1)}{\overline{BE}}. \quad (4b)$$

式中:  $\overline{BE} = \frac{\overline{BF} \sin \eta}{\sin(\eta - \beta_1)} = \frac{aB \sin \eta + D \cos \eta}{\sin(\eta - \beta_1)}$ ;

$$S_4 = aBD + \frac{D^2}{2 \tan \eta} + \frac{1}{2} \left( aB + \frac{D}{\tan \eta} \right) \frac{aB \sin \eta + D \cos \eta}{\sin(\eta - \beta_1)} \sin \beta_1.$$

根据上述  $\sigma_{01}$ ,  $\tau_{01}$  先在图 3 中定位出点  $f_1$ , 继而通过  $f_1$  点画出莫尔圆并与强度包线相切于  $e_1$  点, 则  $e_1$  点坐标即为  $BD$  面上的法向应力  $\sigma_{b1}$  和切应力  $\tau_{b1}$ ; 接着过  $f_1$  点作一条与水平面夹角为  $\beta_1$  的直线交莫尔圆于  $g_1$  点, 最后连接  $e_1$  点、 $g_1$  点, 则图 1(a) 中的  $\angle DBE = \angle e_1 g_1 f_1 = \zeta_1$ , 因圆周角是相应圆心角的一半, 故  $\angle e_1 d_1 f_1 = 2\zeta_1$ 。

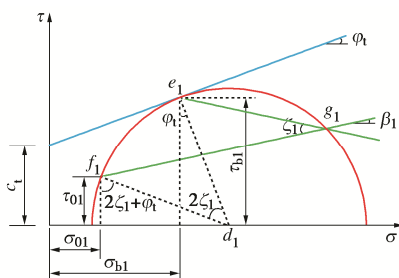


图 3 莫尔圆-BD 面极限状态

Fig. 3 Mohr circle for limit state of plane BD

由图 1(a) 中三角形  $BDE$  的正弦定理, 得边长  $\overline{BD}$  与边长  $\overline{BE}$  的关系为

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\pi/2 - \varphi_t - \zeta_1)} = \frac{\overline{BE}}{\sin(\pi/2 + \varphi_t)}. \quad (5)$$

由图 1(a) 中三角形  $ABC$  的几何关系得边长  $\overline{BC}$  为

$$\overline{BC} = \frac{B \sin \psi_2}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}. \quad (6)$$

假定对数螺旋线  $CD$  的矢径  $r_1 = \overline{BC} \exp(\theta_1 \tan \varphi_t)$ , 则边长  $\overline{BD}$  为

$$\overline{BD} = \overline{BC} e^{\theta_1 \tan \varphi_t} = \frac{B \sin \psi_2 e^{\theta_1 \tan \varphi_t}}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}. \quad (7)$$

由图 1(a) 中的角度关系得

$$\theta_1 = \pi - \psi_1 - \beta_1 - \zeta_1. \quad (8)$$

将式 (7), (8) 和边长  $\overline{BE}$  代入式 (5) 得

$$\sin(\eta - \beta_1) = \frac{\sin(\psi_1 + \psi_2) \cos(\varphi_t + \zeta_1) (aB \sin \eta + D \cos \eta)}{B \sin \psi_2 \sin(\pi/2 + \varphi_t) e^{\theta_1 \tan \varphi_t}}. \quad (9)$$

采用试算法确定角  $\beta_1$ , 先假定一个角  $\beta_1$ , 由式 (4) 计算  $\sigma_{01}$ ,  $\tau_{01}$ ; 再利用图 3 中的几何关系求得角  $\zeta_1$ , 代入式 (9) 得到计算角  $\beta_1$ . 迭代直至假定和计算的角  $\beta_1$  相差满足精度  $\Delta = 0.01^\circ$  的要求。

由图 3 中的几何关系得

$$\begin{aligned} \sigma_{b1} &= \sigma_{01} + \overline{d_1 f_1} \sin(2\zeta_1 + \varphi_t) - \overline{d_1 e_1} \sin \varphi_t \\ &= \sigma_{01} + \frac{\tau_{b1}}{\cos \varphi_t} [\sin(2\zeta_1 + \varphi_t) - \sin \varphi_t]. \end{aligned} \quad (10)$$

将  $\tau_{b1} = c_t + \sigma_{b1} \tan \varphi_t$  代入式 (10) 得

$$\sigma_{b1} = \frac{\sigma_{01} \cos^2 \varphi_t + c_t \cos \varphi_t [\sin(2\zeta_1 + \varphi_t) - \sin \varphi_t]}{\cos^2 \varphi_t - \sin \varphi_t [\sin(2\zeta_1 + \varphi_t) - \sin \varphi_t]}. \quad (11)$$

图 4 为仅考虑土体黏聚力和基础旁侧荷载时隔离体 II ( $BCD$ ) 的受力分析, 由  $B$  点的力矩平衡得法向应力  $\sigma_{c1}$  和切应力  $\tau_{c1}$  为

$$\sigma_{c1} = [(c_t + \sigma_{b1} \tan \varphi_t) e^{2\theta_1 \tan \varphi_t} - c_t] \cot \varphi_t, \quad (12a)$$

$$\tau_{c1} = c_t + \sigma_{c1} \tan \varphi_t = (c_t + \sigma_{b1} \tan \varphi_t) e^{2\theta_1 \tan \varphi_t}. \quad (12b)$$

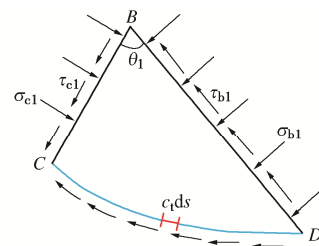


图 4 考虑土体黏聚力和基础旁侧荷载的隔离体 II 受力分析

Fig. 4 Force analysis of isolator II considering soil cohesion and lateral load of foundation

图 5 为隔离体 VII (AJK) 的受力分析, 同理得法向应力  $\sigma_{02}$  和切应力  $\tau_{02}$  为

$$\sigma_{02} = \frac{1}{2} \gamma D \left( K_0 \sin^2 \beta_2 + \frac{1}{2} K_0 \tan \delta \sin 2\beta_2 + \cos^2 \beta_2 \right), \quad (13a)$$

$$\tau_{02} = \frac{1}{2} \gamma D \left[ \frac{1}{2} (1 - K_0) \sin 2\beta_2 + K_0 \tan \delta \sin^2 \beta_2 \right]. \quad (13b)$$

式中:  $\beta_2$  为 AJ 面与水平面的夹角。

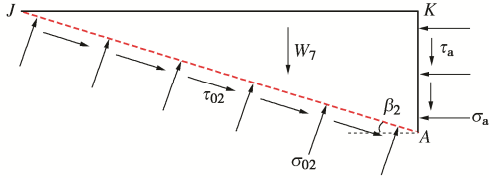


图 5 分析隔离体 VII 的受力

Fig. 5 Force analysis of isolator VII

类比如图 3, 画出图 6 中 AI 面极限状态对应的莫尔圆, 此时  $\angle IAJ = \angle e_2 g_2 f_2 = \zeta_2$ , 圆心角  $\angle e_2 d_2 f_2 = 2\zeta_2$ 。

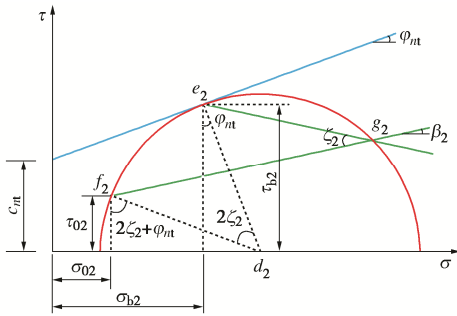


图 6 莫尔圆-AI 面极限状态

Fig. 6 Mohr circle for limit state of plane AI

由图 1 (a) 中三角形 AIJ 的正弦定理, 得边长  $\overline{AJ}$  与边长  $\overline{AI}$  的关系为

$$\frac{\overline{AJ}}{\sin(\pi/2 + \varphi_{nt})} = \frac{\overline{AI}}{\sin(\pi/2 - \varphi_{nt} - \zeta_2)}. \quad (14)$$

由图 1 (a) 中三角形 ABC 的几何关系得边长  $\overline{AC}$  为

$$\overline{AC} = \frac{B \sin \psi_1}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}. \quad (15)$$

假定对数螺旋线 CI 的矢径  $r_2 = \overline{AC} \exp(\theta_2 \tan \varphi_{nt})$ , 进而边长  $\overline{AI}$  为

$$\overline{AI} = \overline{AC} e^{\theta_2 \tan \varphi_{nt}} = \frac{B \sin \psi_1 e^{\theta_2 \tan \varphi_{nt}}}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}. \quad (16)$$

由图 1 (a) 中的角度关系得

$$\theta_2 = \pi + \beta_2 - \psi_2 - \zeta_2. \quad (17)$$

将式 (16), (17) 和边长  $\overline{AJ} = D/\sin \beta_2$  代入式 (14)

得

$$\sin \beta_2 = \frac{D \sin(\psi_1 + \psi_2) \cos(\varphi_{nt} + \zeta_2)}{B \sin \psi_1 \cos \varphi_{nt} e^{\theta_2 \tan \varphi_{nt}}}. \quad (18)$$

角  $\beta_2$  同样根据试算法确定, 迭代直至假定和由式 (18) 计算的角  $\beta_2$  相差满足精度  $\Delta = 0.01^\circ$  的要求。

由图 6 中的几何关系得

$$\begin{aligned} \sigma_{b2} &= \sigma_{02} + \overline{d_2 f_2} \sin(2\zeta_2 + \varphi_{nt}) - \overline{d_2 e_2} \sin \varphi_{nt} \\ &= \sigma_{02} + \frac{\tau_{b2}}{\cos \varphi_{nt}} [\sin(2\zeta_2 + \varphi_{nt}) - \sin \varphi_{nt}]. \end{aligned} \quad (19)$$

将  $\tau_{b2} = c_{nt} + \sigma_{b2} \tan \varphi_{nt}$  代入式 (19) 得

$$\sigma_{b2} = \frac{\sigma_{02} \cos^2 \varphi_{nt} + c_{nt} \cos \varphi_{nt} [\sin(2\zeta_2 + \varphi_{nt}) - \sin \varphi_{nt}]}{\cos^2 \varphi_{nt} - \sin \varphi_{nt} [\sin(2\zeta_2 + \varphi_{nt}) - \sin \varphi_{nt}]} \quad (20)$$

图 7 为仅考虑土体黏聚力和基础旁侧荷载时隔离体 VI (ACI) 的受力分析, 由 A 点的力矩平衡得法向应力  $\sigma_{c2}$  和切应力  $\tau_{c2}$  为

$$\sigma_{c2} = [(c_{nt} + \sigma_{b2} \tan \varphi_{nt}) e^{2\theta_2 \tan \varphi_{nt}} - c_{nt}] \cot \varphi_{nt}, \quad (21a)$$

$$\tau_{c2} = c_{nt} + \sigma_{c2} \tan \varphi_{nt} = (c_{nt} + \sigma_{b2} \tan \varphi_{nt}) e^{2\theta_2 \tan \varphi_{nt}}. \quad (21b)$$

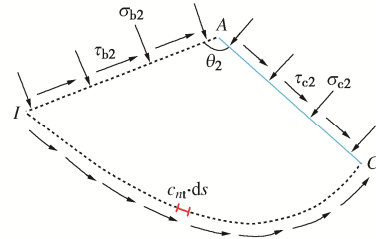


图 7 考虑土体黏聚力和基础旁侧荷载的隔离体 VI 受力分析

Fig. 7 Force analysis of isolator VI considering soil cohesion and lateral load of foundation

图 8 为仅考虑土体黏聚力和基础旁侧荷载时隔离体 I (ABC) 的受力分析, 由其竖直向的力平衡得

$$\begin{aligned} Bq_{u1} - \sigma_{c1} \overline{BC} \cos \psi_1 - \tau_{c1} \overline{BC} \sin \psi_1 \\ = \sigma_{c2} \overline{AC} \cos \psi_2 + \tau_{c2} \overline{AC} \sin \psi_2. \end{aligned} \quad (22)$$

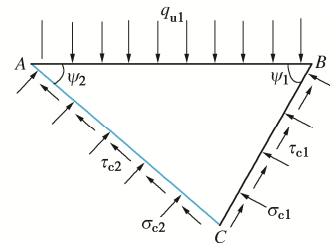


图 8 考虑土体黏聚力和基础旁侧荷载的隔离体 I 受力分析

Fig. 8 Force analysis of isolator I considering soil cohesion and lateral load of foundation

将式 (12), (21) 代入式 (22) 得承载力  $q_{u1}$  为

$$q_{u1} = c_t N_{c1} + c_{nt} N_{c2} + \sigma_{01} N_{q1} + \sigma_{02} N_{q2}. \quad (23)$$

式中:  $N_{c1}$ ,  $N_{c2}$  为黏聚力承载力系数;  $N_{q1}$ ,  $N_{q2}$  为超载承载力系数。

$$N_{c1} = \frac{\cos^2 \varphi_1 \sin \psi_2 (\cot \varphi_1 \cos \psi_1 + \sin \psi_1) e^{2\theta_1 \tan \varphi_1}}{\sin(\psi_1 + \psi_2) [1 - \sin \varphi_1 \sin(2\zeta_1 + \varphi_1)]} - \frac{\cot \varphi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_1}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}, \quad (24a)$$

$$N_{c2} = \frac{\cos^2 \varphi_m \sin \psi_1 (\cot \varphi_m \cos \psi_2 + \sin \psi_2) e^{2\theta_2 \tan \varphi_m}}{\sin(\psi_1 + \psi_2) [1 - \sin \varphi_m \sin(2\zeta_2 + \varphi_m)]} - \frac{\cot \varphi_m \sin \psi_1 \cos \psi_2}{\sin(\psi_1 + \psi_2)}, \quad (24b)$$

$$N_{q1} = \frac{\sin 2\varphi_1 \sin \psi_2 (\cot \varphi_1 \cos \psi_1 + \sin \psi_1) e^{2\theta_1 \tan \varphi_1}}{2 \sin(\psi_1 + \psi_2) [1 - \sin \varphi_1 \sin(2\zeta_1 + \varphi_1)]}, \quad (25a)$$

$$N_{q2} = \frac{\sin 2\varphi_m \sin \psi_1 (\cot \varphi_m \cos \psi_2 + \sin \psi_2) e^{2\theta_2 \tan \varphi_m}}{2 \sin(\psi_1 + \psi_2) [1 - \sin \varphi_m \sin(2\zeta_2 + \varphi_m)]}. \quad (25b)$$

由图 8 中 C 点的力矩平衡得

$$\frac{1}{2} \sigma_{c1} \overline{BC}^2 + q_{u1} B(\overline{AC} \cos \psi_2 - B/2) - \frac{1}{2} \sigma_{c2} \overline{AC}^2 = 0. \quad (26)$$

采用 Excel 规划法求解式 (26) 得到发挥系数  $n$ 。

(2) 承载力  $q_{u2}$

图 9 为隔离体 III ( $BDE$ ) 在仅考虑土体自重时的受力分析, 图 9 中  $\varepsilon_1$  为  $BD$  面与竖直线的夹角;  $E_{p1}$ ,  $E_{p2}$  分别为  $DE$  面和  $BD$  面上合力的反力, 作用点距  $D$  点  $\overline{DE}/3$ 、 $\overline{BD}/3$ , 方向与  $DE$  面和  $BD$  面法线的夹角均为  $\varphi_1$ ;  $S_3$  为三角形  $BDE$  的面积,  $W_3 = \gamma S_3$  为隔离体 III 的自重。

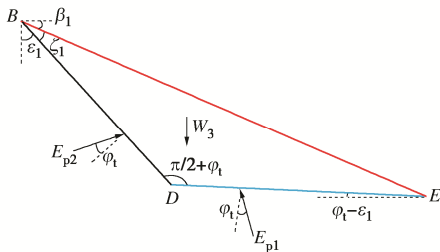


图 9 考虑土体自重的隔离体 III 受力分析

Fig. 9 Force analysis of isolator III considering soil weight

由图 9 中的角度关系得

$$\varepsilon_1 = \pi/2 - \beta_1 - \zeta_1. \quad (27)$$

由隔离体 III 水平向和竖直向的力平衡, 得反力  $E_{p2}$  为

$$E_{p2} = \frac{\gamma S_3 \sin \varepsilon_1}{\cos \varphi_1}. \quad (28)$$

$$\text{式中: } S_3 = \frac{B \sin \psi_2 \sin \zeta_1 (aB \sin \eta + D \cos \eta) e^{\theta_1 \tan \varphi_1}}{2 \sin(\psi_1 + \psi_2) \sin(\eta - \beta_1)}.$$

图 10 为隔离体 II ( $BCD$ ) 在仅考虑土体自重时的受力分析, 图中  $S_2$  为三角形  $BCD$  的面积;  $W_2 = \gamma S_2$  为隔离体 II 的自重, 到  $B$  点的力臂为  $\lambda_1$ ;  $E_{p3}$  为  $BC$  面上反力的合力, 作用点距  $C$  点  $\overline{BC}/3$ , 方向与  $BC$  面法线的夹角为  $\varphi_1$ ;  $F_1$  为  $CD$  面上指向  $B$  点的径向合力。

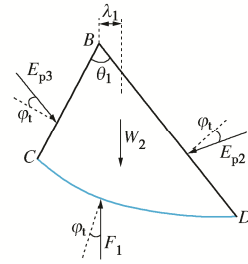


图 10 考虑土体自重的隔离体 II 受力分析

Fig. 10 Force analysis of isolation II considering soil weight

由  $B$  点的力矩平衡得反力  $E_{p3}$  为

$$E_{p3} = E_{p2} e^{\theta_1 \tan \varphi_1} + \frac{3\lambda_1 \gamma S_2}{2BC \cos \varphi_1}. \quad (29)$$

$$\text{式中: } S_2 = \frac{\overline{BC}^2 (e^{2\theta_1 \tan \varphi_1} - 1)}{4 \tan \varphi_1}; \quad \lambda_1 = y_1 \sin \psi_1 - x_1 \cos \psi_1;$$

$$x_1 = \frac{e^{3\theta_1 \tan \varphi_1} (\sin \theta_1 + 3 \tan \varphi_1 \cos \theta_1) - 3 \tan \varphi_1}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi_1) (e^{2\theta_1 \tan \varphi_1} - 1)} \times 4 \tan \varphi_1 \overline{BC};$$

$$y_1 = \frac{4 \tan \varphi_1 [e^{3\theta_1 \tan \varphi_1} (3 \tan \varphi_1 \sin \theta_1 - \cos \theta_1) + 1]}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi_1) (e^{2\theta_1 \tan \varphi_1} - 1)} \overline{BC}.$$

图 11 为隔离体 VI ( $AIJ$ ) 在仅考虑土体自重时的受力分析, 图中  $\varepsilon_2$  为  $AI$  面与竖直线的夹角;  $E_{p4}$ ,  $E_{p5}$  分别为  $IJ$  面和  $AI$  面上合力的反力, 作用点距  $I$  点  $\overline{IJ}/3$ ,  $\overline{AI}/3$ , 方向与  $IJ$  面和  $AI$  面法线的夹角均为  $\varphi_m$ ;  $S_6$  为三角形  $AIJ$  的面积,  $W_6 = \gamma S_6$  为隔离体 VI 的自重。

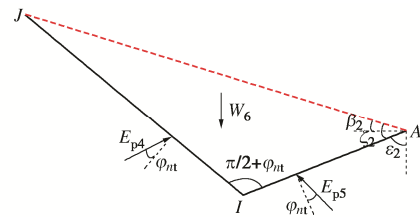


图 11 考虑土体自重的隔离体 VI 受力分析

Fig. 11 Force analysis of isolator VI considering soil weight

由图 11 中的角度关系得

$$\varepsilon_2 = \pi/2 + \beta_2 - \zeta_2. \quad (30)$$

由隔离体 VI 水平向和竖直向的力平衡, 得反力  $E_{p5}$  为

$$E_{p5} = \frac{\gamma S_6 \sin \varepsilon_2}{\cos \varphi_m}. \quad (31)$$

$$\text{式中: } S_6 = \frac{BD \sin \psi_1 \sin \zeta_2 e^{\theta_2 \tan \varphi_m}}{2 \sin \beta_2 \sin(\psi_1 + \psi_2)}.$$

图 12 为隔离体 V ( $ACI$ ) 在仅考虑土体自重时的受力分析, 图 12 中  $S_5$  为三角形  $ACI$  的面积;  $W_5 = \gamma S_5$  为隔离体 V 的自重, 到  $A$  点的力臂为  $\lambda_2$ ;  $E_{p6}$  为  $AC$  面上反力的合力, 作用点距  $C$  点  $\overline{AC}/3$ , 方向与  $AC$  面法线的夹角为  $\varphi_m$ ;  $F_2$  为  $CI$  面上指向  $A$  点的径向合力。



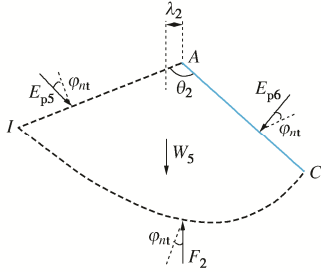


图 12 考虑土体自重的隔离体 V 受力分析

Fig. 12 Force analysis of isolation V considering soil weight

由 A 点的力矩平衡得反力  $E_{p6}$  为

$$E_{p6} = E_{p3} e^{\theta_2 \tan \varphi_{nt}} + \frac{3\lambda_2 W_5}{2AC \cos \varphi_{nt}} \quad (32)$$

式中:  $S_5 = \frac{AC^2 (e^{2\theta_2 \tan \varphi_{nt}} - 1)}{4 \tan \varphi_{nt}}$ ;  $\lambda_2 = y_2 \sin \psi_2 - x_2 \cos \psi_2$ ;

$$x_2 = \frac{e^{3\theta_2 \tan \varphi_{nt}} (\sin \theta_2 + 3 \tan \varphi_{nt} \cos \theta_2) - 3 \tan \varphi_{nt}}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi_{nt})(e^{2\theta_2 \tan \varphi_{nt}} - 1)} \times 4 \tan \varphi_{nt} \overline{AC};$$

$$y_2 = \frac{e^{3\theta_2 \tan \varphi_{nt}} (3 \tan \varphi_{nt} \sin \theta_2 - \cos \theta_2) + 1}{3(1 + 9 \tan^2 \varphi_{nt})(e^{2\theta_2 \tan \varphi_{nt}} - 1)} \times 4 \tan \varphi_{nt} \overline{AC}.$$

图 13 为隔离体 I ( $ABC$ ) 在考虑土体自重时的受力分析, 图中  $S_1$  为三角形  $ABC$  的面积,  $W_1 = \gamma S_1$  为隔离体 I 的自重。由隔离体 I 竖直方向的力平衡得

$$\left. \begin{aligned} q_{u2} B &= E_{p3} \cos(\psi_1 - \varphi_t) - E_{p6} \cos(\psi_2 - \varphi_{nt}) - W_1 \\ S_1 &= \frac{B^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2}{2 \sin(\psi_1 + \psi_2)} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

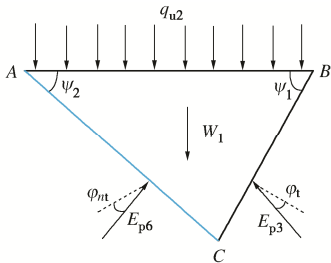


图 13 考虑土体自重的隔离体 I 受力分析

Fig. 13 Force analysis of isolation I considering soil weight

将式 (29), (32) 代入式 (33), 得承载力  $q_{u2}$  为

$$q_{u2} = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (34)$$

式中:  $N_\gamma$  为重度承载力系数,

$$N_\gamma = \frac{4S_3 \sin \varepsilon_1 e^{\theta_1 \tan \varphi_t} \cos(\psi_1 - \varphi_t)}{B^2 \cos \varphi_t} + \frac{12S_2 \lambda_1 \cos \psi_1}{B^3 \cos \varphi_t} + \frac{\cos(\psi_1 - \varphi_t)}{B^3 \cos \varphi_t} + \frac{4S_6 \sin \varepsilon_2 e^{\theta_2 \tan \varphi_{nt}} \cos(\psi_2 - \varphi_{nt})}{B^2 \cos \varphi_{nt}} + \frac{12S_5 \lambda_2 \cos \psi_2 \cos(\psi_2 - \varphi_{nt})}{B^3 \cos \varphi_{nt}} - \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{2 \sin(\psi_1 + \psi_2)} \quad (35)$$

(3) 总承载力  $q_u$

将式 (23), (34) 相加, 得坡面破坏模式下临坡地基的 Meyerhof 承载力  $q_u$  为

$$q_u = c_1 N_{c1} + c_{nt} N_{c2} + \sigma_{01} N_{q1} + \sigma_{02} N_{q2} + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (36)$$

## 2.2 坡底破坏

图 1 (b) 为临坡地基的坡底破坏, 满足  $H_s \geq H$ 。由图 1 中的几何关系得

$$H_s = \frac{D \sin \eta \cos \beta_1 + L \sin \eta \sin \beta_1}{\sin(\eta - \beta_1)} \quad (37)$$

坡底破坏模式下临坡地基承载力公式的推导与 2.1 节类似, 只是区别于如何确定  $BE$  面上的法向应力  $\sigma'_{01}$  和切应力  $\tau'_{01}$ 。图 14 为隔离体 IV ( $BENMGH$ ) 的受力分析, 图中  $S'_4$  为多边形  $BENMGH$  的面积,  $W'_4 = \gamma S'_4$  为隔离体 IV 的自重;  $\sigma_d$ ,  $\tau_d$  为  $EN$  面上的法向应力和切应力。由  $BE$  面法线方向和切线方向的力平衡得法向应力  $\sigma'_{01}$  和切应力  $\tau'_{01}$  为

$$\sigma'_{01} = \frac{W'_4 \cos \beta_1 + 0.5 K_0 \gamma D^2 (\cos \beta_1 \tan \delta - \sin \beta_1)}{\overline{BE}} - \frac{\sigma_d \overline{EN} \sin(\varphi_t + \zeta_1) - \tau_d \overline{EN} \cos(\varphi_t + \zeta_1)}{\overline{BE}} \quad (38a)$$

$$\tau'_{01} = \frac{W'_4 \sin \beta_1 + 0.5 K_0 \gamma D^2 (\sin \beta_1 \tan \delta + \cos \beta_1)}{\overline{BE}} - \frac{\sigma_d \overline{EN} \cos(\varphi_t + \zeta_1) + \tau_d \overline{EN} \sin(\varphi_t + \zeta_1)}{\overline{BE}} \quad (38b)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } \overline{EN} &= \overline{ME} \frac{\sin \eta}{\sin(\pi/2 - \varphi_t - \zeta_1 - \beta_1)}; \\ \overline{ME} &= \frac{(aB \sin \eta + D \cos \eta) \sin \beta_1 - (H - D) \sin(\eta - \beta_1)}{\sin(\eta - \beta_1) \sin \eta}; \\ \overline{MN} &= \overline{ME} \frac{\sin(\pi/2 + \varphi_t + \zeta_1 + \beta_1 - \eta)}{\sin(\pi/2 - \varphi_t - \zeta_1 - \beta_1)}; \\ S'_4 &= aBD + \frac{D^2}{2 \tan \eta} + \frac{1}{2} \left( aB + \frac{D}{\tan \eta} \right) \overline{BE} \sin \beta_1 + \\ &\quad \frac{1}{2} \overline{MEMN} \sin \eta \end{aligned}$$

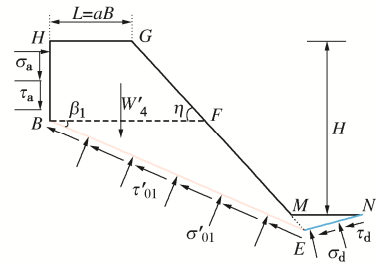


图 14 分析隔离体 BENMGH 的受力

Fig. 14 Force analysis of isolation BENMGH

图 15 为隔离体 III 在仅考虑土体黏聚力和基础旁侧荷载时的受力分析。由  $DE$  面法线方向和切线方向的力平衡得

$$\begin{aligned} \sigma_d \overline{DE} - \sigma'_{01} \overline{BE} \sin(\varphi_t + \zeta_1) - \tau'_{01} \overline{BE} \cos(\varphi_t + \zeta_1) \\ = \tau_{b1} \overline{BD} \cos \varphi_t - \sigma_{b1} \overline{BD} \sin \varphi_t \end{aligned} \quad (39a)$$

$$\tau_d \overline{DE} - \sigma'_{01} \overline{BE} \cos(\varphi_t + \zeta_1) - \tau'_{01} \overline{BE} \sin(\varphi_t + \zeta_1)$$
$$= \tau_{b1} \overline{BD} \sin \varphi_t - \sigma_{b1} \overline{BD} \cos \varphi_t。$$

(39b)

结合式 (38), (39) 迭代计算法向应力  $\sigma'_{01}$ 、切应力  $\tau'_{01}$ , 其余分析过程详见 2.1 节, 同样相加得坡底破坏模式下临坡地基的 Meyerhof 承载力  $q_u$  为

$$q_u = c_t N_{c1} + c_{nt} N_{c2} + \sigma'_{01} N_{q1} + \sigma_{02} N_{q2} + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma。$$

(40)

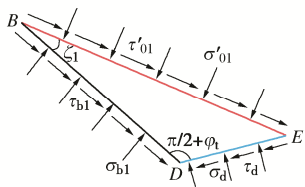


图 15 考虑土体黏聚力和基础旁侧荷载的隔离体 III 受力分析  
Fig. 15 Force analysis of isolator III considering soil cohesion and lateral load of foundation

2.3 应用步骤

- (1) 假定地基发生坡面破坏, 由试算法迭代求出角  $\beta_1$ 。
- (2) 由式 (37) 求出距离  $H_s$ , 以判断临坡地基的破坏模式。
- (3) 当  $H_s < H$  时, 按照坡面破坏模式继续计算, 由试算法迭代求出角  $\beta_2$ , 并得到  $\sigma_{01}$ ,  $\sigma_{02}$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ , 由式 (36) 确定临坡地基承载力。
- (4) 当  $H_s \geq H$  时, 按照坡底破坏模式由试算法迭代重新计算, 由式 (40) 确定临坡地基承载力。

2.4 理论退化

针对临坡地基坡面破坏和坡底破坏两种非对称破坏模式, 采用统一强度理论所建立的临坡地基 Meyerhof 承载力新解即式 (36), (40), 综合考虑了中间主应力(参数  $0 \leq b \leq 1$ )、基础至坡肩的水平距离、边坡高度和基底粗糙情况等因素, 可更好地展现临坡地基的承载性能, 具有重要的理论价值。式 (36), (40) 在参数  $b=0$  时为基于 Mohr-Coulomb 强度准则的临坡地基 Meyerhof 承载力解答, 参数  $b=1$  时为基于双剪应力强度准则的临坡地基 Meyerhof 承载力解答, 在  $0 < b < 1$  时能获得一系列新的临坡地基承载力解答, 以适应临坡地基实际非对称破坏。

3 对比验证

将本文非对称破坏模式下临坡地基 Meyerhof 承载力新解 (即式 (36), (40)) 与文献[8, 9]的模型试验和文献[4]的数值模拟进行比较, 以验证所得临坡地基承载力公式的正确性。

3.1 模型试验

模型试验 I: Keskin 等[8]通过室内模型试验获得

了基底光滑条件下砂性土边坡坡顶条形基础的地基承载力, 试验测得土体的黏聚力  $c=0.1$  kPa, 内摩擦角  $\varphi=41.8^\circ$ , 平均干重度  $=17$  kN/m<sup>3</sup>,  $B=0.07$  m,  $D=0$  m,  $\eta=30^\circ$ ,  $H=0.5$  m, 属于  $H_s < H$  的坡面破坏。

图 16 为文献[8]临坡地基承载力模型试验与本文基底完全光滑下式 (36) 的对比, 可以看出: 式 (36) 与模型试验所得临坡地基承载力  $q_u$  均随基础至坡肩水平距离系数  $a$  的增加明显增大;  $b=0.6$  时式 (36) 与文献[8]的模型试验实测值相差较小, 平均相对误差绝对值为 5.5%, 验证了式 (36) 的有效性; 同时, 不考虑中间主应力 ( $b=0$ ) 时的式 (36) 偏小, 低估了地基的实际承载潜能, 而  $b=1$  时的式 (36) 偏大, 又夸大了土体强度的中间主应力效应。

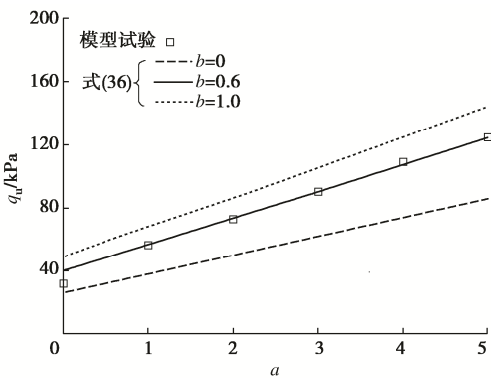


图 16 对比文献[8]的临坡地基模型试验  
Fig. 16 Comparison with model tests for foundations near slopes of Reference [8]

模型试验 II: Castelli 等[9]开展室内模型试验探讨了基础位置对基底光滑条件下砂性土边坡坡顶条形基础的地基承载力。试验测得土体的内摩擦角  $\varphi=38^\circ$ , 最大干重度  $=17.5$  kN/m<sup>3</sup>, 但未给出黏聚力大小, 计算时取  $c=0.1$  kPa,  $\eta=30^\circ$ ,  $H=0.28$  m, 属于  $H_s < H$  的坡面破坏。

表 1 为文献[9]临坡地基模型试验与本文基底完全光滑下式 (36) 的对比, 可以看出:  $b=0.75$  时式 (36) 与文献[9]的模型试验实测值吻合良好, 平均相对误差绝对值为 7.1%, 验证了式 (36) 的正确性; 另外,  $b=0$  时式 (36) 较实测值偏小, 但  $b=1$  时又偏大。

表 1 对比文献[9]的临坡地基模型试验  
Table 1 Comparison with model tests for foundations near slopes of Reference [9]

B/m	D/m	a	$q_{u \text{ 试验}}/\text{kPa}$	$q_{u \text{ 式(36)}}/\text{kPa}$		
				b=0	b=0.75	b=1
0.04	0	3.5	65.67	42.10	66.43	78.43
0.04	0	7.0	79.00	60.12	93.88	108.89
0.06	0	2.2	88.26	50.73	83.00	99.82
0.06	0	4.5	136.37	73.45	129.92	148.55
平均相对误差绝对值/%				61.8	7.1	15.9

### 3.2 数值模拟

郑刚等<sup>[4]</sup>采用不连续布局优化数值法分析了临坡条形基础下地基承载力,土体屈服满足 Mohr-Coulomb 强度准则,参数取值:  $B=2\text{ m}$ ,  $D=0\text{ m}$ ,  $L=0\text{ m}$ ,  $\eta=10^\circ$ ;  $c=40\text{ kPa}$ ,  $\varphi=40^\circ$ ,  $\gamma=20\text{ kN/m}^3$ 。

图 17 为文献[4]临坡地基数值模拟与本文  $b=0$  时式 (36), (40) 的对比,其中破坏模式为本文采用相同数值模拟方法获得的,可以看出:式 (36), (40) 与数值模拟对应的临坡地基承载力  $q_u$  均随边坡高度  $H$  增加先减小后恒定,平均相对误差绝对值为 3.4%,验证了式 (36), (40) 的合理性;由式 (37) 判定的临坡地基破坏模式与补充的数值模拟结果相一致。

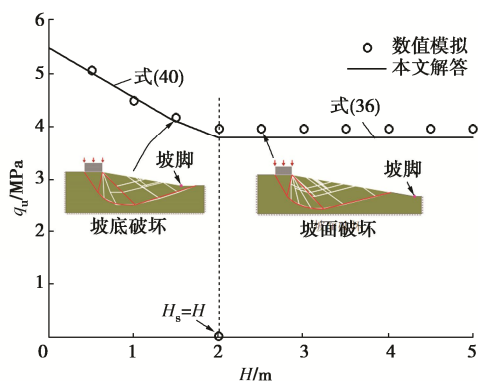


图 17 对比文献[4]的临坡地基数值模拟

Fig. 17 Comparison with numerical simulations for foundations near slopes of Reference [4]

## 4 结 论

(1) 结合滑动面与坡面的相交位置及三角形楔体的非对称, 构建了临坡地基坡面非对称破坏模式和坡底非对称破坏模式, 可合理反映坡后土体的强度贡献, 与临坡地基的真实破坏机制更为符合。

(2) 所得临坡地基新的 Meyerhof 承载力解答综合考虑了中间主应力、基础至坡肩的水平距离、边坡高度和基底粗糙情况等因素, 可退化为 Mohr-Coulomb 强度准则解答、双剪应力强度准则解答以及一系列新解答, 具有重要的理论意义。

(3) 本文解答与文献模型试验和数值模拟均吻合良好, 验证了所得临坡地基 Meyerhof 承载力公式的正确性。临坡地基承载力的中间主应力效应显著且随边坡高度增加先减小后恒定, 未考虑中间主应力的地基承载力偏小。

### 参考文献:

- [1] MEYERHOF G G, HANNA A. Ultimate bearing capacity of foundations on layered soils under inclined load[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1978, **15**(4): 565-572.
- [2] 胡卫东, 曹文贵. 基于 Meyerhof 理论的临坡地基极限承载力简化分析方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2015, **42**(1): 81-89. (HU Weidong, CAO Wengui. A simplified analysis method for the ultimate bearing capacity of ground foundation near slope based on the theory of Meyerhof[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2015, **42**(1): 81-89. (in Chinese))
- [3] JIN L X, FENG Y W, ZHANG H C, et al. The use of improved radial movement optimization to calculate the ultimate bearing capacity of a nonhomogeneous clay foundation adjacent to slopes[J]. Computers and Geotechnics, 2020, **118**: 103338.
- [4] 郑刚, 于晓旋, 杜娟, 等. 临近边坡的条形基础地基极限承载力数值分析[J]. 岩土力学, 2018, **39**(10): 3812-3820, 3829. (ZHENG Gang, YU Xiaoxuan, DU Juan, et al. Numerical analysis of ultimate bearing capacity of strip footings near slopes[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, **39**(10): 3812-3820, 3829. (in Chinese))
- [5] CHEN T J, XIAO S G. An upper bound solution to undrained bearing capacity of rigid strip footings near slopes[J]. International Journal of Civil Engineering, 2020, **18**(4): 475-485.
- [6] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(2): 1-10. (YU Maohong. Unified strength theory for geomaterials and its applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(2): 1-10. (in Chinese))
- [7] 俞茂宏, 武霞霞, 史俊, 等. 确定土体破坏准则的一个新方法[J]. 西安交通大学学报, 2020, **54**(8): 1-10. (YU Maohong, WU Xiaxia, SHI Jun, et al. A new strategy for determining failure criteria of soil[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2020, **54**(8): 1-10. (in Chinese))
- [8] KESKIN M S, LAMAN M. Model studies of bearing capacity of strip footing on sand slope[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2013, **17**(4): 699-711.
- [9] CASTELLI F, LENTINI V. Evaluation of the bearing capacity of footings on slopes[J]. International Journal of Physical Modelling in Geotechnics, 2012, **12**(3): 112-118.