

DOI: 10.11779/CJGE20221022

# 多孔介质弹性问题的单元微分法

胡 凯<sup>1</sup>, 高效伟<sup>\*1</sup>, 徐兵兵<sup>1</sup>, 郑颖人<sup>2</sup>

(1. 大连理工大学航空航天学院工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 陆军勤务学院, 重庆 400041)

**摘要:** 考虑 Biot 固结理论, 建立了求解多孔介质中流体渗透与固体力学耦合问题的数值模型, 并通过新型强形式有限单元法(单元微分法)对该问题进行分析计算。相比于弱形式算法, 单元微分法能够通过直接对控制方程进行离散, 不需要数值积分计算, 因此该算法在对多场耦合问题进行求解时拥有较为简单的离散格式, 且其计算系数矩阵时表现出极高的效率。该数值算法使用的是有限元中的拉格朗日单元, 与强形式的无网格法相比, 能够获得相对更精确且更稳定的计算结果。通过引入单元微分法以及隐式时间迭代格式, 能够快速地计算出多孔介质耦合方程中各时间步的位移及孔压值。选取两个经典的数值模型, 一个是一维 Terzaghi 柱模型, 另一个是二维饱和土带模型。针对这两个问题, 分别通过与解析解和有限元法结果相对比, 验证了该算法的精度和稳定性。

**关键词:** Biot 固结理论; 多孔介质; 单元微分法; 强形式有限元法

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2023)11-2403-08

作者简介: 胡 凯(1997—), 男, 硕士研究生, 主要从事计算力学等科研工作。E-mail: hukai32003150@mail.dlut.edu.cn。

## Element differential method for poroelastic problems

HU Kai<sup>1</sup>, GAO Xiaowei<sup>1</sup>, XU Bingbing<sup>1</sup>, ZHENG Yingren<sup>2</sup>

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. Army Service College, Chongqing 400041, China)

**Abstract:** A numerical model for solving the coupling problem of fluid flow and solid mechanics in porous media is established based on the Biot's consolidation theory, and the numerical analysis and calculation are carried out by using a new strong-form finite element method (element differential method, EDM). By comparing with the weak-form methods, the control equation for poroelastic problems can be discretized directly by the element differential method without any numerical integration calculation. Therefore, the method has a relatively simple discrete format when solving the multi-field coupling problem, and it shows high efficiency when calculating the coefficient matrix. The numerical method uses the Lagrange element in the finite element method, which can obtain relatively accurate and stable results compared with the strong-form meshless method. By introducing the element differential method and the implicit time iteration scheme, the displacement and pore pressure of each time step in the porous media can be calculated directly. Two classical numerical models are selected, one is the one-dimensional Terzaghi column model, and the other is the two-dimensional saturated soil zone model. For these two problems, the accuracy and stability of the proposed are verified by comparing with the results of analytical solution and finite element method.

**Key words:** Biot's consolidation theory; porous medium; element differential method; strong-form finite element method

## 0 引言

饱和多孔介质作为固液两相介质, 其与单相介质最显著的区别在于: 饱和多孔介质中土体等固相的变形与孔隙中水等液相的流动存在耦合现象。这类耦合现象的力学行为表现为固体骨架和孔隙流体的相互作用。为描述该现象的产生机理, Terzaghi<sup>[1]</sup>通过引入有效应力原理, 推导出一维固结问题的模型。基于 Terzaghi 的开创性工作, Biot<sup>[2-3]</sup>进一步推导出较为完善的三维固结理论模型, 并将该理论扩展到各项异性

的多孔介质问题中。Biot 固结理论作为广大学者争相研究的经典理论, 其理论体系具有显著的优势。但由于该理论所得封闭形式的数值解并非总是可取的, 因此, 涌现出多种多样的数值方法求解该理论。到目前为止, 这些数值方法包括有限单元法<sup>[4-6]</sup>、边界单元法<sup>[7]</sup>、无网格法<sup>[8-9]</sup>等。

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12072064)

收稿日期: 2022-08-19

\*通信作者 (E-mail: xwgao@dlut.edu.cn)

基于加权余量法的弱形式算法通常拥有较高的精度和可靠的稳定性，如上面提到的有限单元法(FEM)。然而，在离散饱和多孔介质控制方程时，有限元法中位移和孔压的插值函数必须满足 Babuska-Brezzi 条件或 Zienkiewicz 等提出的分片试验<sup>[10]</sup>。由于存在这样的限制，有限元法在求解该类问题时不能采用简单的单元，并且在算法的编程上也较为复杂。边界单元法(BEM)是只在定义域的边界上划分单元，采用满足于控制方程的函数逼近边界条件的方式求解土体固结问题。该方法所划分的单元数量少，且前期数据的处理较为简单。考虑到多孔介质固结的控制微分方程是由孔压作用的 Navier 方程与孔隙流体的流动方程耦合组成的。因此，在采用 BEM 分析时，完成一个多孔介质变形分析后，需单独求解瞬态孔隙流体的流动方程。由于这类问题的出现，BEM 在求解分析时不仅需要进行常规的曲面积分离散，而且还需对问题域内体积进行离散，这极大的削弱了 BEM 求解的优势。基于配点法的强形式算法具有更为简单的形式以及更高的计算效率，如无网格法中的有限点法<sup>[11]</sup>、自由单元法<sup>[12-13]</sup>等。但是，对于传统的配点法，尤其是基于散点的无网格配点法的精度和稳定性很难保证。为了克服以上配点法的缺陷，发展了大量基于单元的强形式算法，如强形式有限元法<sup>[14-15]</sup>、节点梯度光滑有限元配点法<sup>[16]</sup>等。近些年，高效伟等提出了一种求解二维及三维问题的新型强形式有限单元法-单元微分法(EDM)<sup>[17-18]</sup>。目前，该算法已经应用于求解静力学问题、传热问题<sup>[19-20]</sup>、动力学问题<sup>[21]</sup>、压电问题<sup>[22]</sup>等多种单场及耦合场问题中。单元微分法由于采用了单元进行插值离散，相比于传统的配点法具有较高的稳定性。而与有限元法相比，由于不需要数值积分，EDM 在组集系统方程时的计算效率是十分高效和显著的。关于计算效率的比较可见参考文献[23, 24]，本文不着重考虑算法计算效率的验证。

针对以上提出的单元微分法的优点，本文将详细地描述单元微分法的基本原理，并采用该算法求解一维和二维饱和多孔介质固结问题。最终将所得计算结果与解析解或有限元法进行分析比较，验证该算法的适用性及有效性。

## 1 Biot 多孔介质渗流理论

### 1.1 控制方程

饱和土作为一种典型的两相可变形多孔介质，其结构主要为包含土体的固相，及其孔隙中的水等液体的液相两个部分。当饱和土受到外界载荷作用下，土骨架颗粒与孔隙中的液体会产生一定相互作用。Biot 固结理论便是从宏观的角度对这一相互作用进行模拟。描述多孔介质的常见方程形式有  $u-U-p$ ,  $u-U$ ,  $u-p$

模型等，这里  $u$  为固体土骨架的位移， $U$  为孔隙流体的绝对位移， $p$  为孔压。其中， $u-p$  方程形式简单，自由度较少，因此在本文中选取  $u-p$  方程。

考虑一个二维问题  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ，土体的平衡方程可表示为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad . \quad (1)$$

式中： $\sigma_{ij}$  为总应力张量； $b_i$  为体积力向量。根据 Terzaghi 的有效应力原理<sup>[25]</sup>，外部载荷所引起的总应力张量可表示为

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha \delta_{ij} p \quad . \quad (2)$$

式中： $\sigma'_{ij}$  为 Terzaghi 有效应力张量； $\alpha$  为 Biot 系数； $\delta_{ij}$  为克罗内克符号； $p$  为孔隙压强。有效应力的本构方程由胡克定律定义，在考虑孔隙压力的情况下引入弹性本构关系，式(2)变化为

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \alpha \delta_{ij} p \quad . \quad (3)$$

式中： $D_{ijkl}$  为四阶本构张量，

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad . \quad (4)$$

式中： $\lambda$  和  $\mu$  为拉梅常数。

剪切模量  $G$  与弹性模量  $E$ 、泊松比  $\nu$  的关系为  $\mu = G = E / 2(1+\nu)$ 。

除此之外。式(3)中土体的应变与位移关系有如下形式：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad . \quad (5)$$

式中： $u_i$  为位移向量。

将式(5)代入式(3)，并考虑本构张量  $D_{ijkl}$  的对称性可得

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \alpha \delta_{ij} p \quad . \quad (6)$$

将式(6)代入式(1)，可得强形式的土体的平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) - \alpha \frac{\partial p}{\partial x_i} + b_i = 0 \quad . \quad (7)$$

孔隙流体在多孔介质中的流动遵循 Darcy 定律，这实际上是一个动量方程。对于各向同性问题，若考虑重力项，则 Darcy 定律表示为

$$q_i = -\kappa \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho_f g_i \right) \quad . \quad (8)$$

式中： $\rho_f$  为流体密度； $\kappa$  为定义的迁移率系数，

$$\kappa = \frac{k}{\mu_f} \quad . \quad (9)$$

式中： $k$  为多孔介质的固有渗透率张量，对于各向同性问题，其为一常数； $\mu_f$  为流体动力黏度。

为了准确的模拟渗流现象，需要用到流体的质量

守恒条件, 其形式为<sup>[26]</sup>

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \alpha \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \quad 。 \quad (10)$$

式中:  $M$  为 Biot 模量,

$$M = \frac{1}{\phi c_f + (\alpha - \phi)c_s} \quad 。 \quad (11)$$

式中:  $\phi$  为孔隙率;  $c_f$  为流体体积压缩系数;  $c_s$  为固体颗粒压缩系数。

将式 (8) 代入式 (10) 可得

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa \frac{\partial p}{\partial x_i} - \kappa \rho_f g_i \right) = 0 \quad 。 \quad (12)$$

则式 (7), (12) 为多孔弹性问题的耦合形式的控制方程。除了以上控制方程, 还需要考虑到具体问题的边界条件及初始条件, 从而可对该问题进行求解。

## 1.2 边界条件与初始条件

计算域  $\Omega$  的边界可被描述为  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  和  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ ,  $\Gamma_p \cap \Gamma_q = \emptyset$ 。 $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_t$ ,  $\Gamma_p$  和  $\Gamma_q$  为土骨架位移、总应力、孔隙水压力和通量的边界。在相应的边界上, 其边界条件和初始条件如下:

(1) 位移边界条件

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_i(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, t \in T \quad 。 \quad (13)$$

(2) 压力边界条件

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t, t \in T \quad 。 \quad (14)$$

(3) 水压边界条件

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t), \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p, t \in T \quad 。 \quad (15)$$

(4) 流量边界条件

$$-\kappa \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i = \bar{q}_i, \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q, t \in T \quad 。 \quad (16)$$

(5) 初始条件

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}, 0) = \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}), \\ p_i(\mathbf{x}, 0) = \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $T$  为总计算时间。

## 2 多孔介质问题的单元微分法格式

### 2.1 单元微分法基本原理

单元微分法作为一种强形式的有限元法, 其基本思想与一般强形式无网格法类似, 即通过将形函数对全局坐标的一阶及二阶导数直接代入控制方程与边界条件中构造系统方程组。但和传统强形式的无网格法不同的是, 该算法基于有限元中的拉格朗日单元, 而非散点。因此, 该算法不仅有简单的计算形式, 而且能够兼顾计算的稳定性。

为了通过单元微分法求解以式 (7), (12) 为控制

方程的多孔介质渗流问题, 首先需要将复杂的计算域进行分片离散。与传统基于网格的算法类似, 计算域  $\Omega$  被离散为一系列互不重叠的四边形或六面体有限单元

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{te}} \Omega^e, \Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset, \forall j \neq i \quad 。 \quad (18)$$

并且这些单元可以被映射到参数空间  $\widehat{\Omega}^e = \phi^e(\Omega^e) = [-1, 1]^d$ , 其中  $d$  为需要计算问题的维度,  $n_{te}$  为总的单元数。对于域内的每一个单元, 引入由  $n$  个互不相关的试函数  $N_\beta(x)$  构成的函数空间  $\mathcal{S}^h$ , 在该空间中找到变量  $u(x)$  的近似函数  $\tilde{u}(x)$ , 即

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\beta=1}^n N_\beta(x) u_\beta \quad 。 \quad (19)$$

式中:  $u_\beta$  为未知系数。单元微分法一般采用拉格朗日插值多项式  $L_i(\xi)$  的张量积形式构造基函数(试函数), 其中  $\xi \in [-1, 1]$ 。对于二维问题, 该插值形式可表示为

$$N_\beta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N L_i(\xi) L_j(\eta) \quad 。 \quad (20)$$

式中:  $N$  一般取 3 即可满足计算需要。

式 (20) 中一维拉格朗日插值形式如下所示:

$$L_i(\xi) = \prod_{l=1, l \neq i}^N \frac{\xi - \xi_l}{\xi_i - \xi_l} \quad (i = 1 \sim N, -1 \leq \xi \leq 1) \quad 。 \quad (21)$$

变量  $u(x)$  关于局部坐标的  $p$  阶偏导数可对式(19) 微分得到

$$\frac{\partial^p \tilde{u}}{\partial \xi^p} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial^p N_\beta(\xi)}{\partial \xi^p} u_\beta \quad 。 \quad (22)$$

式中:  $N_\beta$  通常称为单元的形函数;  $n$  为单元  $\Omega^e$  内的节点数量。

由于在实际的问题中, 计算域往往是不规则的。为了能够计算该类问题, 需要用到坐标转换技术, 即建立函数对整体坐标的导数与函数对参数坐标的导数之间的关系。借助坐标转换技术便能够将不规则的计算域映射到规则的参数坐标上。在近似空间  $\mathcal{S}^h$  内, 变量对于全局坐标的一阶偏导数有

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \mathbf{J}_{ik}^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_k} = \mathbf{J}_{ik}^{-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi_k} u_\beta \quad 。 \quad (23)$$

式中:  $\mathbf{J}$  为坐标变换的雅可比矩阵, 其逆矩阵  $\mathbf{J}^{-1}$  可通过下式计算:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{J}^* \quad 。 \quad (24)$$

式中:  $|\mathbf{J}|$  为雅克比矩阵的行列式;  $\mathbf{J}^*$  为雅克比矩阵的伴随矩阵, 对于二维问题, 其形式为

$$\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad 。 \quad (25)$$

在强形式算法中，一般需要用到函数对全局坐标的二阶导数。对式（23）再次微分运算，便可获得近似函数对全局坐标的二阶导数的显式表达式为<sup>[27]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( J_{ik}^{-1} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi_k} \right) u_\beta = \\ &\left[ J_{ik}^{-1} \frac{\partial^2 N_\beta}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \frac{\partial J_{ik}^{-1}}{\partial \xi_l} \frac{\partial N_\beta}{\partial \xi_k} \right] \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} u_\beta \quad . \end{aligned} \quad (26)$$

式（26）中雅可比的逆矩阵关于局部坐标的偏导数为

$$\frac{\partial J^{-1}}{\partial \xi_l} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial J^*}{\partial \xi_l} - \frac{1}{|J|^2} \frac{\partial |J|}{\partial \xi_l} J^* \quad . \quad (27)$$

式中：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^*}{\partial \xi} &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} & -\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \end{array} \right], \\ \frac{\partial J^*}{\partial \eta} &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & -\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \\ -\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \end{array} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial |J|}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi}, \\ \frac{\partial |J|}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \quad . \end{aligned} \quad (29)$$

利用上述的解析表达式，可以计算出形函数对全局坐标的一阶及二阶导数。将这些导数代入控制方程及边界条件中，可直接将其进行离散。利用以上公式，可通过使用单元微分法对多孔介质弹性问题构造系统方程组，从而进行求解计算。

## 2.2 多孔介质问题的单元微分离散格式

在单元微分法中，将模型中的点分为3种类型：①处于单元内部的点，称为内部点，如图1中绿色点所示；②处于单元边界的点，称为外部边界点，如图1中红色点所示；③处于单元界面上的节点，称为界面点，如图1中蓝色点所示。需要注意的是，对于单元的内部点，需要满足控制方程；而对于单元的边界点则需要满足通量平衡条件。下面将对多孔介质渗流问题的内部点和边界点控制方程进行讲述。

### （1）内部点控制方程

对于多孔介质渗流问题，EDM的内部点需要满足控制方程式（7），（12）。对于均质问题，考虑控制方程式（7），在近似空间 $\mathcal{S}^h$ 中引入变量 $u$ 和 $p$ 的近似函数 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{p}$ ，并考虑式（23），（26），有

$$D_{ijkl} \frac{\partial^2 N_\beta}{\partial x_j \partial x_l} u_k^\beta - \alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} p^\beta + b_i = 0 \quad . \quad (30)$$

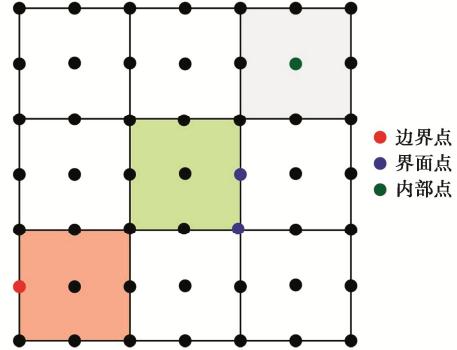


图1 EDM 的节点类型

Fig. 1 Node types of EDM

与此相似，式（12）的离散格式为

$$\frac{1}{M} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} u_i^\beta \right) + \frac{\partial b_i}{\partial x_i} - \kappa \frac{\partial^2 N_\beta}{\partial x_i \partial x_i} p^\beta = 0 \quad . \quad (31)$$

在不考虑重力的前提下，上两式的形式可表示为

$$\left. \begin{aligned} D_{ijkl} \frac{\partial^2 N_\beta}{\partial x_j \partial x_l} u_k^\beta - \alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} p^\beta &= 0, \\ \frac{1}{M} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} u_i^\beta \right) - \kappa \frac{\partial^2 N_\beta}{\partial x_i \partial x_i} p^\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

### （2）边界点控制方程

在EDM的离散规则中，外部边界点需要满足通量平衡边界条件（即式（14），（16））。将应力应变关系式（3）代入式（14）中可得到

$$D_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j - \alpha p n_i = \bar{t}_i \quad . \quad (33)$$

引入变量 $u$ 和 $p$ 的近似函数 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{p}$ ，并考虑式（23）有

$$D_{ijkl} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_l} n_j u_k^\beta - \alpha \tilde{p} n_i = \bar{t}_i \quad . \quad (34)$$

同时，流量通量式（16）的离散格式为

$$-\kappa \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} n_i p^\beta = \bar{q} \quad . \quad (35)$$

而对处于单元界面上的节点，需要满足通量平衡条件，界面平衡方程的形式为

$$\sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^M \left[ D_{ijkl}(\xi) \frac{\partial N_\beta(\xi)}{\partial x_l} n_j^f(\xi) u_k^\beta - \alpha \tilde{p} n_i^f(\xi) \right] = 0, \quad (36)$$

$$-\sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^M \kappa(\xi) \frac{\partial N_\beta(\xi)}{\partial x_i} n_i^f(\xi) p^\beta = 0 \quad . \quad (37)$$

式中： $N$ 为该点所在单元数； $M$ 为该点所在单元面数； $e$ 为单元号； $f$ 为单元面号。

### （3）系统方程组与时间积分方案

对单元内部点和单元边界点，考虑式（32），（34），（35），可定义统一变量 $U=[u; p]$ ，能够得到多孔介质渗流问题最终的系统方程组为

$$C\dot{U} + KU = f \quad . \quad (38)$$

对于该一阶时间导数的方程, 其瞬态项可利用以下隐式差分格式代替, 其形式为

$$\frac{\partial U(t)}{\partial t} = \frac{U(t) - U(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad . \quad (39)$$

式中:  $\Delta t$  为时间步长。

将式(39)代入式(38), 则式(38)可转化为

$$\frac{C}{\Delta t}U(t) - \frac{C}{\Delta t}U(t - \Delta t) + KU(t) = f(t) \quad . \quad (40)$$

将式(40)化简之后可得

$$\left(\frac{1}{\Delta t}C + K\right)U(t) = f + \frac{1}{\Delta t}CU(t - \Delta t) \quad . \quad (41)$$

可将式(41)改写为

$$AU = b \quad . \quad (42)$$

只要给定  $U$  的初始值, 便可以通过以上的时间迭代方式计算出每一步的位移和孔压结果。

### 3 数值算例

通过本文上述所推导的公式, 我们将其编写成相应的 Fortran 程序, 并通过下面两个多孔介质固结问题的算例分析计算以验证单元微分法在求解该问题中的正确性。

#### 3.1 Terzaghi 柱

Terzaghi 柱是一个单位宽度为  $A$ , 高度为  $6A$  的饱和流体圆柱, 在其柱顶部施加恒定的荷载  $\sigma_0$ , 并假定开始时的时间为  $t_0$  时刻。取模型的左上角顶点为坐标轴的原点,  $y$  轴竖直向下。如图 2(a) 中所示。圆柱体的顶部边界可自由移动且透水, 流体可以通过上部边界离开模型区域, 而模型的底部边界为固定边界且不透水。在经历无限长时间后模型顶部边界移动至图 2(b) 所示状态。

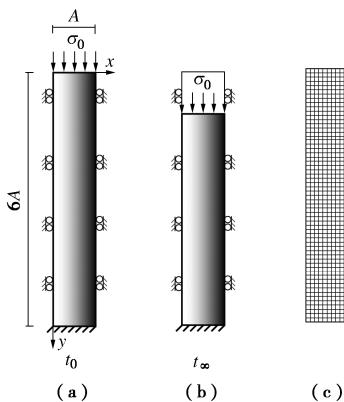


图 2 Terzaghi 柱模型图及网格划分图

Fig. 2 Terzaghi column model and grid division

在该数值模拟中, 柱体为砂岩均质柱, 取单位宽度  $A=1$  m, 并规定顶部最高荷载  $\sigma_0=10^6$  Pa。柱体材料采用贝雷砂岩, 其材料属性列于表 1 中。孔隙中流体密度为  $1000$  Kg/m<sup>3</sup>, 动力黏度为  $\mu=0.001$  Pa·s, 以及其压缩系数为  $c_f=3.030303\times10^{-10}$  Pa<sup>-1</sup>。本文运用单元微分法求解该问题, 采用二阶拉格朗日单元, 网格划分情况如图 2(c) 中所示。它是由 600 个单元以及 2541 个节点组成。仿真所采用的时间步长  $\Delta t=1$  s。

表 1 贝雷砂岩的材料属性参数

Table 1 Material property parameters of Berea sandstone

属性	符号	值	单位
剪切模量	$G$	$6 \times 10^9$	Pa
孔隙率	$\phi$	0.19	
泊松比	$\nu$	0.2	
固体颗粒压缩系数	$C_s$	$2.777777 \times 10^{-11}$	Pa <sup>-1</sup>
Biot 系数	$\alpha$	0.777778	
渗透率	$k$	$1.9 \times 10^{-15}$	m <sup>2</sup>

该问题可简化为沿  $y$  方向的一维问题。对于该问题, 其孔隙压力  $p$  解析解的形式为<sup>[26]</sup>

$$p(y, t) = \sigma_0 \eta \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi y^*}{2}\right) e^{-m^2\pi^2 t^*} \quad . \quad (43)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\alpha M(1-2\nu)}{\alpha^2 M(1-2\nu) + 2G(1-\nu)}, \\ c &= \frac{2\kappa MG(1-\nu)}{\alpha^2 M(1-2\nu) + 2G(1-\nu)}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$y^* = y/L, \quad t^* = ct/4L^2, \quad L = 6A \quad . \quad (45)$$

为了证明单元微分法的精度, 对于该问题, 分别采用单元微分法和解析计算求解孔隙压力的值, 并将结果进行比较。首先比较模型底部节点的孔压计算结果。经过计算, 得出两种不同方法求解所得模型底部边界上一点的孔压  $p$  随时间变化曲线, 如图 3 中所示。

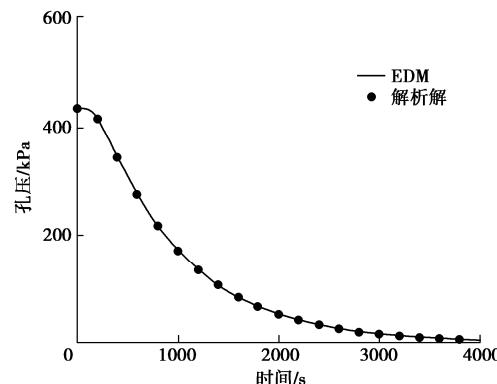


图 3 柱底孔隙压力随时间变化情况图

Fig. 3 Variation of pore pressure at bottom of column with time

从图 3 可以看出, 单元微分法在求解该问题时, 能够取得较为满意的结果, EDM 求解所得孔压随时间变化曲线与解析解曲线基本吻合。为了更为直观的了解 EDM 求解该问题的误差, 下面将给出相应的相对误差曲线, 如图 4 所示。

在图 4 中可以较为清晰的看出, EDM 在求解该问题时产生的最大相对误差为 0.25%。在时间步迭代的前

1000 s 内，相对误差不到 0.1%。但随着迭代不断地向前推进，出现相对误差不断增大的情况，这是由于时间迭代所产生的误差。

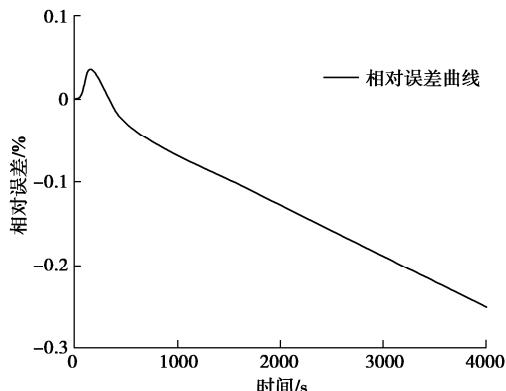


图 4 相对误差曲线图

Fig. 4 Relative error curve

下面还相应的给出了模型左侧边界上各节点在不同时刻下的孔压曲线，如图 5 中所示。在图 5 中选取了 100, 500, 1000, 2000, 4000 s 5 个时刻分析不同深度下相对应的孔隙压力值，均得到与解析解极其近似的结果。可以证明该算法在求解这类问题时的精度较高。

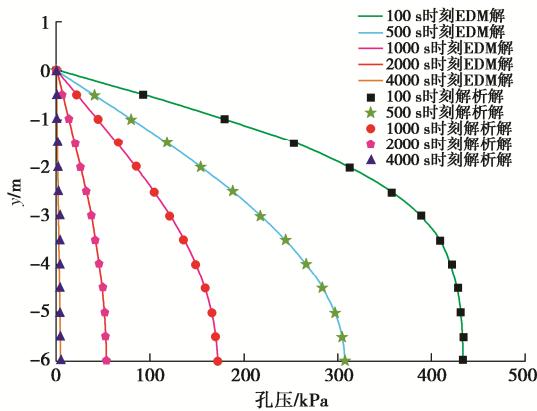


图 5 柱体不同深度下的孔压曲线

Fig. 5 Pore pressure curves of column at different depths

### 3.2 二维土带

在第二个算例中，考虑计算一个二维的饱和均质土带在均匀荷载作用下的固结情况，模型示意如图 6

(a) 中所示。条带几何参数为  $H=5 \text{ m}$ ,  $B=10 \text{ m}$ 。在模型的顶部施加宽度  $C=2 \text{ m}$  的阶跃荷载  $\sigma_0$ 。假定模型处在平面应变的条件下，选取单位厚度的土。由于模型的对称性，只取模型的一半作为计算对象，如图 6 (b) 中所示。

在数值模拟中，模型仅顶部边界可透水，其他边界均为不透水边界。模型左右两侧垂直边界约束其水平位移，底部边界完全固定。考虑孔隙内流体为可压缩的，而固体骨架不可压缩。其主要材料属性参数列于表 2 中。选取时间步长为 0.01 s，共 50 步，终止时间为 0.5 s。采用单元微分法与有限元法分别求解该问题，EDM 采用的单元类型为 9 节点二阶拉格朗日单

元，FEM 采用 8 节点 serendipity 单元。网格划分情况如图 7 中所示。模型通过 EDM 格式离散为 2500 个单元，以及 10201 个节点。而有限元离散为 2500 个单元，以及 7701 个节点。

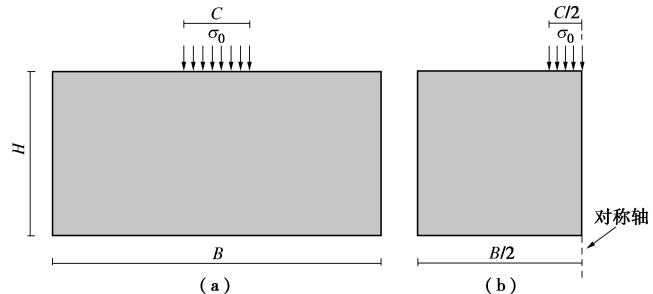


图 6 饱和均质土带

Fig. 6 Saturated homogeneous soil zone

表 2 饱和土带的材料属性

Table 2 Material parameters of saturated soil zone

属性	符号	值	单位
弹性模量	$E$	$1 \times 10^7$	N/m <sup>2</sup>
泊松比	$\nu$	0.2	
流体体积弹性系数	$K_f$	$3.3 \times 10^9$	Pa
迁移率系数	$\kappa$	$1 \times 10^{-7}$	m <sup>4</sup> /(N·s)
孔隙率	$\phi$	0.2	
Biot 系数	$\alpha$	1	

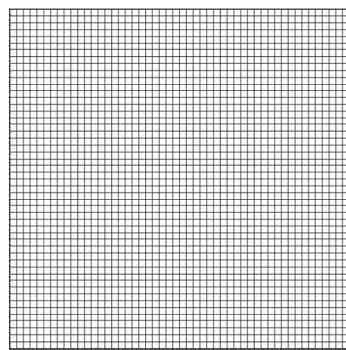


图 7 饱和土带网格划分情况图

Fig. 7 Grid division of saturated soil zone

首先，分别用两种方法计算出模型对称线上的各节点在不同时刻的竖向位移  $u_z$  值，计算结果在图 8 中所示。由于该问题并没有解析解，选择较为可靠的有限单元法作为参考，能够较为清晰的比较单元微分法的计算精度（该问题中的 FEM 是与 EDM 在同一程序框架下编程所得）。通过图 8 可以看出，EDM 与 FEM 计算结果曲线吻合程度较好，两者所得结果非常接近。

接下来，同样使用这两种数值算法计算出对称线上各节点在不同时刻的孔隙压力值，如图 9 所示。可以看到，不管选取的是哪一时刻，单元微分法计算的孔隙压力结果与有限元法的计算结果吻合很好。为了更为清晰的了解模型的孔压变化情况，将两种的方法计算所得 0.5 s 时刻的孔压云图示意于图 10 中，图 10 (a) 为单元微分法计算结果云图，图 10 (b) 为有限元

的结果云图, 两者结果基本一致。

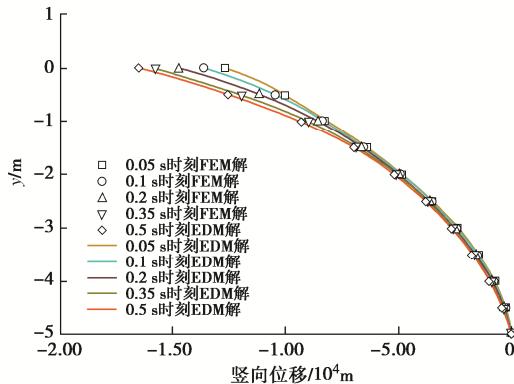


图 8 饱和土带对称线上节点不同时刻的竖向位移图  
Fig. 8 Vertical displacements of symmetrical line nodes on saturated soil zone at different time

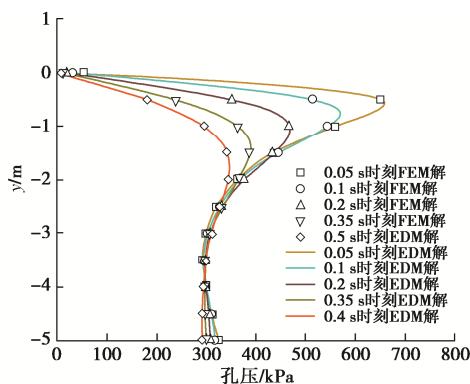


图 9 饱和土带对称线上节点在不同时刻的孔压图  
Fig. 9 Pore pressures of symmetrical line nodes in saturated soil zone at different time

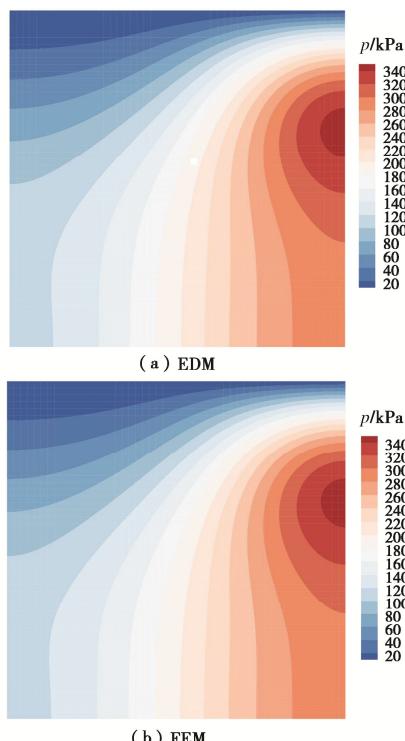


图 10 饱和土带在 0.5 s 时刻的孔隙压力云图  
Fig. 10 Cloud chart of pore pressure of saturated soil zone at 0.5 s

## 4 结语

在本文中, 给出了计算多孔介质弹性问题的单元微分法。该算法是一种强形式算法, 在计算时不需要进行数值积分, 因此非常适用于此类多物理场耦合问题的求解。本文考虑 Biot 固结理论, 给出多孔介质流体流动与固体变形的耦合控制方程, 并引入单元微分法, 对该耦合形式的控制方程进行强形式离散求解。在计算过程中可以看出, 通过直接将形函数关于全局坐标的一阶导数二阶导数的显式表达式直接带入到耦合形式的方程中, 可直接得到离散后的控制方程, 不需要用到传统有限元法中的积分处理。在时域内, 通过 2.2 节所述的时间积分方案, 计算出每一时间步所需的位移及孔压结果。在本文中, 使用单元微分法, 针对两个典型的多孔介质流固耦合问题进行计算, 并将结果分别与解析解和有限元解的结果进行比较。从结果中可以看出, 单元微分法在多孔介质耦合问题中的计算结果和解析解以及有限元解吻合的非常好, 证明了该算法在求解该类问题时的计算精度和稳定性。

## 参考文献:

- [1] TERZAGHI K. Theoretical Soil Mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons. 1943.
- [2] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. Journal of Applied Physics, 1941, **12**(2): 155-164.
- [3] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid — saturated porous solid[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1956, **28**:168-191.
- [4] BORJA R I. Finite element formulation for transient pore pressure dissipation: a variational approach[J]. International Journal of Solids and Structures, 1986, **22**(11): 1201-1211.
- [5] SANDHU R S, WILSON E L. Finite-element analysis of seepage in elastic media[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1969, **95**(3): 641-652.
- [6] KADEETHUM T, LEE S, NICK H M. Correction to: finite element solvers for biot's poroelasticity equations in porous media[J]. Mathematical Geosciences, 2021, **53**(5): 1095.
- [7] GHASSEMI A, CHENG A H D, DIEK A, et al. A complete plane strain fictitious stress boundary element method for poroelastic media[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2001, **25**(1): 41-48.
- [8] SOARES D. Iterative dynamic analysis of linear and nonlinear fully saturated porous media considering edge-based smoothed meshfree techniques[J]. Computer Methods in

- Applied Mechanics and Engineering, 2013, **253**: 73-88.
- [9] KHOSHGHALB A, KHALILI N. A stable meshfree method for fully coupled flow-deformation analysis of saturated porous media[J]. Computers and Geotechnics, 2010, **37**(6): 789-795.
- [10] 邸 元, 唐小微. 饱和多孔介质大变形分析的一种有限元-有限体积混合方法[J]. 计算力学学报, 2008, **25**(4): 483-487, 493. (DI Yuan, TANG Xiaowei. An finite element-finite volume hybrid method for large deformation analysis of porous media[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2008, **25**(4): 483-487, 493. (in Chinese))
- [11] PERAZZO F, LÖHNER R, PEREZ-POZO L. Adaptive methodology for meshless finite point method[J]. Advances in Engineering Software, 2008, **39**(3): 156-166.
- [12] 高效伟, 徐兵兵, 吕 军, 等. 自由单元法及其在结构分析中的应用[J]. 力学学报, 2019, **51**(3): 703-713. (GAO Xiaowei, XU Bingbing, LÜ Jun, et al. Free element method and its application in structural analysis[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, **51**(3): 703-713. (in Chinese))
- [13] GAO X W, GAO L F, ZHANG Y, et al. Free element collocation method: a new method combining advantages of finite element and mesh free methods[J]. Computers & Structures, 2019, **215**: 10-26.
- [14] FANTUZZI N. New insights into the strong formulation finiteelement method for solving elastostatic andelastodynamic problems[J]. Curved and Layered Structures, 2014, **1**(1): 94-127.
- [15] TORNABENE F, FANTUZZI N, BACCIOCCHI M. The GDQ method for the free vibration analysis of arbitrarily shaped laminated composite shells using a NURBS-based isogeometric approach[J]. Composite Structures, 2016, **154**: 190-218.
- [16] 樊礼恒, 王东东, 刘宇翔, 等. 节点梯度光滑有限元配点法[J]. 力学学报, 2021, **53**(2): 467-481. (FAN Liheng, WANG Dongdong, LIU Yuxiang, et al. A finite element collocation method with smoothed nodal gradients[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, **53**(2): 467-481. (in Chinese))
- [17] GAO X W, HUANG S Z, CUI M A, et al. Element differential method for solving general heat conduction problems[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2017, **115**: 882-894.
- [18] GAO X W, LI Z Y, YANG K, et al. Element differential method and its application in thermal-mechanical problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, **113**(1): 82-108.
- [19] CUI M A, XU B B, LV J, et al. Numerical solution of multi-dimensional transient nonlinear heat conduction problems with heat sources by an extended element differential method[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018, **126**: 1111-1119.
- [20] GAO X W, LIU H Y, XU B B, et al. Element differential method with the simplest quadrilateral and hexahedron quadratic elements for solving heat conduction problems[J]. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2018, **73**(4): 206-224.
- [21] LV J, SONG C, GAO X W. Element differential method for free and forced vibration analysis for solids[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, **151**: 828-841.
- [22] LV J, SHAO M J, CUI M A, et al. An efficient collocation approach for piezoelectric problems based on the element differential method[J]. Composite Structures, 2019, **230**: 111483.
- [23] 胡 凯, 高效伟, 徐兵兵. 求解固体力学问题的强-弱耦合形式单元微分法[J]. 力学学报, 2022, **54**(7): 2050-2058. (HU Kai, GAO Xiaowei, XU Bingbing. Strong weak coupling form element differential method for solving solid mechanics problems[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, **54**(7): 2050-2058. (in Chinese))
- [24] ZHENG Y T, GAO X W, LV J, et al. Weak-form element differential method for solving mechanics and heat conduction problems with abruptly changed boundary conditions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2020, **121**(16): 3722-3741.
- [25] TERZAGHI K. Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungsercheinungen[J]. Sitzungsber Akad Wissen Wien Math Naturwis, 1923(132): 105-124.
- [26] ALEXANDER H, CHENG D. Poroelasticity[M]. Switzerland: Springer Cham, 2016.
- [27] GAO X W, LIU H Y, LV J, et al. A novel element differential method for solid mechanical problems using isoparametric triangular and tetrahedral elements[J]. Computers & Mathematics With Applications, 2019, **78**(11): 3563-3585.