

DOI: 10.11779/CJGE202210007

基于改进 Pasternak 地基模型的桩柱式桥墩受力变形分析

张玲^{1,2,3}, 岳梢^{1,2,3}, 赵明华^{1,2,3}, 彭文哲^{1,2,3}

(1. 湖南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 湖南大学建筑安全与节能教育部重点实验室, 湖南 长沙 410082;

3. 湖南大学国家级建筑安全与环境国际联合研究中心, 湖南 长沙 410082)

摘要: 倾斜荷载下成层地基中桩柱式桥墩受力变形分析极为复杂。考虑土体塑性屈服特性, 提出改进的 Pasternak 地基模型, 结合 Timoshenko 梁理论, 综合考虑桩身剪切变形、“ $P-\Delta$ 效应”、桩身轴力分布等影响, 分别建立桩柱式桥墩自由段、弹性段、塑性段水平位移控制微分方程, 继而引入 Laplace 正逆变换和矩阵传递法, 获得倾斜荷载下成层地基中桩柱式桥墩位移与内力的半解析解。并探讨分析桩、土剪切刚度及地基成层性等因素的影响, 结果表明: 不同长径比下, 增大桩身剪切刚度会增大桩身水平位移, 但会减小桩身最大弯矩, 且桩身剪切刚度的影响在长径比等于 5 左右达到最大; 而土体剪切刚度对桩身水平位移与最大弯矩均有明显减弱作用, 与“ $P-\Delta$ 效应”的影响相反; 成层地基中, 近地表土层强度对桩身水平位移和弯矩影响最大, 增大上部土层强度会显著减小桩身水平位移和弯矩。

关键词: 桩柱式桥墩; 改进 Pasternak 地基模型; Timoshenko 梁; 矩阵传递法

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2022)10-1817-10

作者简介: 张玲(1982—), 女, 浙江临海人, 教授, 博士生导师, 主要从事桩基础和特殊土地基处理等研究。E-mail: zhanglhd@163.com。

Behaviors of pile-column piers based on modified pasternak foundation model

ZHANG Ling^{1,2,3}, YUE Shao^{1,2,3}, ZHAO Ming-hua^{1,2,3}, PENG Wen-zhe^{1,2,3}

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. Key Laboratory of Building Safety and Energy Efficiency of the Ministry of Education, Hunan University, Changsha 410082, China; 3. National International Joint Research Center for Building

Safety and Environment, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The analysis of behaviors of pile-column piers in layered soils under inclined loads is extremely complicated. An improved Pasternak foundation reaction model considering the plastic yield characteristics of soils is proposed. Considering the influences of ‘ $P-\Delta$ effect’, shear deformation and axial force distribution of piles, the governing equations for displacements of free section, elastic section and plastic section of the pile-column pier are respectively established based on the Timoshenko beam theory. Then, the semi-analytical solutions to the internal forces and deformations of the pier in the layered foundation under inclined loads are obtained by using the Laplace transform and the matrix transfer method. On this basis, the influences of shear stiffnesses and foundation stratification are discussed and analyzed in a parametric study. It can be concluded as follows: (1) For the cases with different length-diameter ratios, the horizontal displacement of the piles increases with the increasing shear stiffness of the piles, but the tendency is opposite for the results of bending moment, and the influences of shear stiffness reaches the maximum when the length-diameter ratio reaches approximately 5. (2) Unlike the influences of the ‘ $P-\Delta$ effect’, the shear modulus of the soils significantly inhibits the horizontal displacement and the bending moment of the piles. (3) In a multi-layer foundation, the strength of upper soil layers has the greatest influences on the horizontal displacement and the bending moment of the piles, and increasing their strength will significantly reduce the horizontal displacement and bending moment.

Key words: pile-column pier; modified Pasternak foundation model; Timoshenko beam; matrix transfer method

0 引言

随着中国交通基础设施建设的迅猛发展, 桩柱式桥墩结构在桥梁工程中广泛应用。倾斜荷载下成层地基中桩柱式桥墩结构受力变形分析相当复杂, 不能简

单套用常规的桥梁基桩内力与变形计算方法, 为此,

基金项目: 国家自然科学基金项目(52078205, 52108317); 湖南省研究生科研创新项目(QL20210108); 创新平台与人才计划湖湘高层次人才聚集工程创新团队项目(2019RS1030)

收稿日期: 2021-09-15

桩侧土抗力 $p(z)$ 计算模型见图 3, 即在弹性区采用 Pasternak 双参数地基模型以考虑土体剪切作用的影响; 而当桩侧水平位移达到土的屈服位移 x_s 后, 土体进入塑性变形状态。则弹性区土反力 $p(z)$ 与水平位移 $x(z)$ 之间的关系如下^[16]:

$$p(z) = k_s x(z) - G_s \frac{d^2 x(z)}{dz^2}, \quad (3)$$

式中, k_s 为地基反力系数, G_s 为地基土的剪切模量。

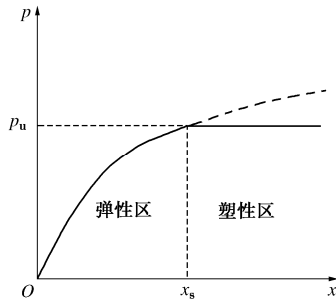


图 3 桩侧土抗力计算模型

Fig. 3 Model for subgrade reaction

考虑地基反力系数沿深度的非线性增加, 即^[12]

$$k_s = m(z + z_0)^{n_0}, \quad (4)$$

式中, m 为比例系数; z_0 为地面处当量深度, 可由地表 ($z=0$) 处的桩侧土抗力 $p_{z=0}$ 反算得到, n_0 为指数, m 和 n_0 均可通过实测或经验确定。

G_s 可用 Tanahashi^[18] 提出的经验公式确定:

$$G_s = \frac{E_s t}{6(1 + \nu_s)}, \quad (5)$$

式中, E_s , ν_s , t 分别为地基土的弹性模量、泊松比和剪切层厚度。Yao 等^[19] 基于数值模拟认为水平受荷桩影响范围约为 $11d_p$ (d_p 为桩径), 本文将此范围近似作为地基土的剪切层厚度, 即 $t=11d_p$ 。实际上地基土剪切层厚度与土的性质有关, 本文对此不作深入讨论。

当土体达到屈服位移 x_s 时, $p(z)$ 达到其极限值 p_u :

$$p_u(z) = p(x_s). \quad (6)$$

小直径桩对应土体屈服位移 x_s 确定方法如下^[10]:

$$x_s = \begin{cases} 3d_p/80, & \text{砂土} \\ 20\varepsilon_c d_p, & \text{黏土} \end{cases}, \quad (7)$$

式中, ε_c 为应变, Matlock^[20] 建议 $\varepsilon_c=0.005\sim0.020$ 。

大直径桩对应土体屈服位移 x_s 通常取 $0.1d_p$ ^[21]。

1.3 桩身内力与位移关系

为考虑桩身剪切变形的影响, 引入 Timoshenko 梁理论, 桩身位移与内力满足以下关系^[13]:

$$\varphi = \frac{dx}{dz} - \theta, \quad (8)$$

$$Q(z) = k_p G_p A_p \theta = k_p G_p A_p \left(\frac{dx}{dz} - \varphi \right), \quad (9)$$

$$M(z) = -E_p I_p \frac{d\varphi}{dz}. \quad (10)$$

式中 A_p 为桩的横截面积; G_p 为桩的剪切模量, $G_p = E_p / (2(1 + \nu_p))$; E_p , ν_p 分别为桩的弹性模量和泊松比; φ , θ 分别为桩的转角和剪切角; k_p 为 Timoshenko 剪切系数, 取决于桩横截面形状^[22], 对圆形截面: $k_p = 6(1 + \nu_p) / (7 + 6\nu_p)$, 空心圆管截面: $k_p = 2(1 + \nu_p) / (4 + 3\nu_p)$;

$E_p I_p$ 和 $k_p G_p A_p$ 分别代表桩的弯曲刚度和剪切刚度。

1.4 变形控制微分方程

(1) 弹性区

式 (3) 结合式 (9), (10), 代入式 (1), (2) 可得

$$\frac{d}{dz} \left[k_p G_p A_p \left(\frac{dx(z)}{dz} - \varphi \right) \right] = \left[k_s x(z) - G_s \frac{d^2 x(z)}{dz^2} \right] D, \quad (11)$$

$$k_p G_p A_p \left(\frac{dx(z)}{dz} - \varphi \right) = -\frac{d}{dz} \left[E_p I_p \frac{d\varphi}{dz} \right] + V(z) \frac{dx(z)}{dz}. \quad (12)$$

对式 (11), (12) 求导, 联立整理后可得弹性区桩身水平位移控制微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x(z)}{dz^4} - \frac{k_s D \cdot E_p I_p + G_s D \cdot k_p G_p A_p}{(k_p G_p A_p + G_s D) E_p I_p} \frac{d^2 x(z)}{dz^2} - \\ \frac{k_p G_p A_p}{(k_p G_p A_p + G_s D) E_p I_p} \frac{d}{dz} \left[V(z) \frac{dx(z)}{dz} \right] + \\ \frac{k_s D \cdot k_p G_p A_p}{(k_p G_p A_p + G_s D) E_p I_p} x(z) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

(2) 塑性区

式 (7) 结合式 (9) 代入式 (1) 可得

$$\frac{d}{dz} \left[k_p G_p A_p \left(\frac{dx(z)}{dz} - \varphi \right) \right] = p_u(z) D. \quad (14)$$

对式 (14) 求导, 联立式 (12) 整理可得塑性区桩身水平位移控制微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x(z)}{dz^4} - \frac{1}{E_p I_p} \frac{d}{dz} \left[V(z) \frac{dx(z)}{dz} \right] - \frac{D}{k_p G_p A_p} \frac{d^2 p_u(z)}{dz^2} + \\ \frac{p_u(z) D}{E_p I_p} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

(3) 虚拟土层

由于虚拟土层不提供水平和竖向抗力, 可视为 $p(z) = 0$ 的特殊情况, 式 (15) 中, 取 $p_u(z) = 0$, 简化后得

$$\frac{d^4 x(z)}{dz^4} - \frac{1}{E_p I_p} \frac{d}{dz} \left[V(z) \frac{dx(z)}{dz} \right] = 0. \quad (16)$$

2 受力变形分析传递矩阵法

式 (13), (15) 为变系数四阶齐次线性微分方程, 难以直接求解, 为此, 本文通过离散桩柱结构, 结合矩阵传递法, 以期获得半解析解。如图 1 所示, 根据截面突变以及土层分界面先将桩柱结构分成 n_m 段, 然后再根据计算精度进一步细分, 例如将桩身位于第 i 层土的部分划分 n_i 段, 每段长为 L_i/n_i 。共计 n 段。选取任意第 i 层土第 j 小段进行分析计算, 并建立局部坐标系。下文分析时下标 e , u 分别表示弹性区与塑性区; j_0 , j_1 分别表示第 j 小段的顶部与端部。

2.1 弹性区 (第 i 层土, 第 j 小段)

由式 (8), (10), (2), (1) 可得

$$\frac{dx_{e(i,j)}}{dz_{e(i,j)}} = \varphi_{e(i,j)} + \frac{1}{k_p G_p A_{pe(i,j)}} Q_{e(i,j)} \quad , \quad (17)$$

$$\frac{d\varphi_{e(i,j)}}{dz_{e(i,j)}} = -\frac{1}{E_p I_{pe(i,j)}} M_{e(i,j)} \quad , \quad (18)$$

$$\frac{dM_{e(i,j)}}{dz_{e(i,j)}} = -V_{e(i,j)} \varphi_{e(i,j)} + \left(1 - \frac{V_{e(i,j)}}{k_p G_p A_{pe(i,j)}} \right) Q_{e(i,j)} \quad , \quad (19)$$

$$\frac{dQ_{e(i,j)}}{dz_{e(i,j)}} = \frac{k_p G_p A_{pe(i,j)} \cdot k_{si} D_{e(i,j)}}{k_p G_p A_{pe(i,j)} + G_{si} D_{e(i,j)}} x_{e(i,j)} + \frac{k_p G_p A_{pe(i,j)} \cdot G_{si} D_{pe(i,j)}}{(k_p G_p A_{pe(i,j)} + G_{si} D_{e(i,j)}) E_p I_{pe(i,j)}} M_{e(i,j)} \quad , \quad (20)$$

其中竖向力满足:

$$V_{e(i,j)}(z) = V_0 + \gamma_i \left[\sum_{k=1}^{i-1} A_{pk} L_k + A_{pi} \left(z - \sum_{k=1}^{i-1} L_k \right) \right] + \sum_{k=1}^{i-1} \tau_k U_{pk} L_k + \tau_i U_{pi} \left(z - \sum_{k=1}^{i-1} L_k \right) \quad . \quad (21)$$

式中 γ_i 为桩身混凝土有效重度; A_{pk} , U_{pk} , L_k 分别为第 k 层土对应的桩身面积、周长及长度; τ_i 为第 i 层土对应的桩侧摩阻力, 当位于虚拟土层时, $\tau_i=0$ [2]。

假定每一小段上地基反力系数 k_{si} 为常数, k_{si} 由积分中值定理确定:

$$k_{si} = \frac{n_i}{L_i} \int_{z_{e(i,j-1)}}^{z_{e(i,j)}} m_i(z+z_0)^{n_0} dz = m_i \frac{n_i}{L_i} \left[\frac{(z_{e(i,j)}+z_0)^{n_0+1}}{n_0+1} - \frac{(z_{e(i,j-1)}+z_0)^{n_0+1}}{n_0+1} \right] \quad . \quad (22)$$

为便于表示, 将下式下标 $e(i,j)$ 简化为 e , 式(17)~(20) 写成矩阵形式得

$$\frac{dS_e}{dz_e} = A_e S_e \quad , \quad (23)$$

式中, $S_e = [x_e \quad \varphi_e \quad M_e \quad Q_e \quad 1]^T$, 矩阵 A_e 表示如下:

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & C_e \\ 0 & 0 & R_e & 0 \\ 0 & -V_e & 0 & H_e \\ K_e & 0 & B_e & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (24)$$

式中 $C_e = 1/(k_p G_p A_{pe})$; $R_e = -1/(E_p I_{pe})$;

$K_e = k_p G_p A_{pe} \cdot k_{si} D_e / k_p G_p A_{pe} \cdot k_{si} D_e / (k_p G_p A_{pe} + G_{si} D_e)$;

$B_e = \frac{k_p G_p A_{pe} \cdot G_{si} D_e}{(k_p G_p A_{pe} + G_{si} D_e) E_p I_{pe}}$; $H_e = 1 - V_e / (k_p G_p A_{pe})$ 。

对式(23) 进行 Laplace 变换, 可得

$$s_{e1} F_{e1} = A_e F_{e1} + F_{e0} \quad , \quad (25)$$

式中, $F_e(s_e) = L[S_e(z_e)]$, 下标 0, 1 表示每小段的顶部和端部; L 表示 Laplace 变换, s_e 为 Laplace 变换后的自变量。

对式(25) 进行移项、左乘得

$$F_{e1} = (E s_e - A_e)^{-1} F_{e0} \quad , \quad (26)$$

式中, E 为单位矩阵。

对式(26) 进行 Laplace 逆变换可得

$$S_{e1} = U_e S_{e0} \quad , \quad (27)$$

即

$$[x_{e1} \quad \varphi_{e1} \quad M_{e1} \quad Q_{e1} \quad 1]^T = U_e [x_{e0} \quad \varphi_{e0} \quad M_{e0} \quad Q_{e0} \quad 1]^T \quad , \quad (28)$$

式中, $U_e = L^{-1}[(E s_e - A_e)^{-1}]$, L^{-1} 表示 Laplace 逆变换。设:

$\beta_1 = \sqrt{4K_e R_e (H_e + C_e V_e) + (B_e H_e + C_e K_e - R_e V_e)^2}$;

$\beta_2 = \sqrt{(B_e H_e + C_e K_e - R_e V_e - \beta_1)/2}$;

$\beta_3 = \sqrt{(B_e H_e + C_e K_e - R_e V_e + \beta_1)/2}$; $\alpha_1 = \cosh(\beta_2 z_e)$;

$\alpha_2 = \cosh(\beta_3 z_e)$; $\alpha_3 = \sinh(\beta_2 z_e)$; $\alpha_4 = \sinh(\beta_3 z_e)$,

可得弹性段传递系数矩阵 U_e :

$$U_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (29)$$

式中 $a_{11} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2 + (\alpha_1 - \alpha_2)(B_e H_e - C_e K_e - R_e V_e)/(2\beta_1)$;

$a_{12} = (\alpha_3/\beta_2 + \alpha_4/\beta_3)/2 + (\alpha_3/\beta_2 - \alpha_4/\beta_3) \cdot$

$(B_e H_e - C_e K_e + R_e V_e + 2B_e C_e V_e)/(2\beta_1)$;

$a_{13} = -(B_e C_e + R_e)(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta_1$;

$a_{14} = C_e(\alpha_3/\beta_2 + \alpha_4/\beta_3)/2 - (\alpha_3/\beta_2 - \alpha_4/\beta_3) \cdot$

$(B_e C_e H_e + C_e^2 K_e + 2H_e R_e + C_e R_e V_e)/(2\beta_1)$;

$a_{21} = -H_e K_e R_e(\alpha_3/\beta_2 - \alpha_4/\beta_3)/\beta_1$;

$a_{22} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2 + (\alpha_1 - \alpha_2)(B_e H_e + C_e K_e + R_e V_e)/(2\beta_1)$;

$a_{23} = R_e(\alpha_3/\beta_2 + \alpha_4/\beta_3)/2 - R_e(\alpha_3/\beta_2 - \alpha_4/\beta_3)(B_e H_e - C_e K_e - R_e V_e)/2\beta_1$;

$a_{24} = -H_e R_e(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta_1$; $a_{31} = -H_e K_e(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta_1$;

$a_{32} = -V_e(\alpha_3/\beta_2 + \alpha_4/\beta_3)/2 - (\alpha_3/\beta_2 - \alpha_4/\beta_3)(2H_e K_e - B_e H_e V_e + C_e K_e V_e + R_e V_e^2)/2\beta_1$;

$a_{33} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2 - (\alpha_1 - \alpha_2)(B_e H_e - C_e K_e - R_e V_e)/(2\beta_1)$;

$a_{34} = -H_e(\beta_2 \alpha_3 - \beta_3 \alpha_4)/\beta_1$;

$a_{41} = K_e(\alpha_3/\beta_2 + \alpha_4/\beta_3)/2 - K_e(\alpha_3/\beta_2 - \alpha_4/\beta_3)(B_e H_e + C_e K_e + R_e V_e)/(2\beta_1)$;

$a_{42} = -(K_e - B_e V_e)(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta_1$;

$a_{43} = B_e(\alpha_3/\beta_2 + \alpha_4/\beta_3)/2 - (\alpha_3/\beta_2 - \alpha_4/\beta_3)(B_e^2 H_e + B_e C_e K_e + 2K_e R_e - B_e R_e V_e)/2\beta_1$;

$a_{44} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2 - (\alpha_1 - \alpha_2)(B_e H_e + C_e K_e + R_e V_e)/(2\beta_1)$ 。

2.2 塑性区 (第 i 层土, 第 j 小段)

由式(1) 可得

$$\frac{dQ_{u(i,j)}}{dz_{u(i,j)}} = p_{u(i,j)}(z_{u(i,j)}) D_{u(i,j)} \quad , \quad (30)$$

此时将式 (17) ~ (19) 下标 e 改为 u, 联合式 (30) 写成矩阵形式得

$$\frac{d\mathbf{S}_{u(i,j)}}{dz_{u(i,j)}} = \mathbf{A}_{u(i,j)} \mathbf{S}_{u(i,j)} + \mathbf{f}_{u(i,j)} \quad (31)$$

式中 $\mathbf{S}_{u(i,j)} = [x_{u(i,j)} \quad \varphi_{u(i,j)} \quad M_{u(i,j)} \quad Q_{u(i,j)}]^T$;
 $\mathbf{f}_{u(i,j)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad p_{u(i,j)}]^T$; 同弹性区, 为便于表示, 将下式下标 $u(i,j)$ 简化为 u , 矩阵 \mathbf{A}_u 表示如下:

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & C_u \\ 0 & 0 & R_u & 0 \\ 0 & -V_u & 0 & H_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

式中 $C_u = 1/(k_p G_p A_{pu})$; $R_u = -1/(E_p I_{pu})$; $H_u = 1 - V_u / (k_p G_p A_{pu})$ 。

对式 (32) 进行 Laplace 变换, 可得

$$s_{u1} \mathbf{F}_{u1} = \mathbf{A}_u \mathbf{F}_{u1} + \mathbf{F}_{u0} + \mathbf{P}_u \quad (33)$$

式中, $\mathbf{F}_u(s_u) = L[\mathbf{S}_u(z_u)]$; $\mathbf{P}_u(s_u) = L[\mathbf{f}_u(z_u)]$ 。

对式 (33) 进行移项、左乘得

$$\mathbf{F}_{u1} = (\mathbf{E}s_u - \mathbf{A}_u)^{-1} \mathbf{F}_{u0} + (\mathbf{E}s_u - \mathbf{A}_u)^{-1} \mathbf{P}_u \quad (34)$$

对式 (34) 进行 Laplace 逆变换可得

$$\mathbf{S}_{u1} = \mathbf{T}_u \mathbf{S}_{u0} + \mathbf{W}_u \quad (35)$$

式中 $\mathbf{T}_u = L^{-1}[(\mathbf{E}s_u - \mathbf{A}_u)^{-1}]$; $\mathbf{W}_u = L^{-1}[(\mathbf{E}s_u - \mathbf{A}_u)^{-1} \mathbf{f}_u]$ 。

设: $\gamma_1 = \cos(\sqrt{R_u V_u} z_u)$; $\gamma_2 = \sin(\sqrt{R_u V_u} z_u)$, 则:

$$\mathbf{T}_u = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma_2}{\sqrt{R_u V_u}} & \frac{1-\gamma_1}{V_u} & \left(C_u + \frac{H_u}{V_u}\right) z_u - \frac{H_u \gamma_2}{\sqrt{R_u V_u}^{3/2}} \\ 0 & \gamma_1 & \sqrt{\frac{R_u}{V_u}} \gamma_2 & \frac{H_u(1-\gamma_1)}{V_u} \\ 0 & -\sqrt{\frac{V_u}{R_u}} \gamma_2 & \gamma_1 & \frac{H_u \gamma_2}{\sqrt{R_u V_u}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{W}_u = \begin{bmatrix} p_u \left(\frac{(H_u + C_u V_u)}{2V_u} z_u^2 + \frac{H_u(\gamma_1 - 1)}{R_u V_u^2} \right) \\ p_u H_u R_u \left(\frac{z_u}{R_u V_u} - \frac{\gamma_2}{R_u^{3/2} V_u^{3/2}} \right) \\ p_u \frac{H_u(1-\gamma_1)}{R_u V_u} \\ p_u z_u \end{bmatrix} \quad (37)$$

联合式 (36), (37), 可得塑性段传递系数矩阵 \mathbf{U}_u :

$$\mathbf{U}_u = \begin{bmatrix} T_u(1,1) & T_u(1,2) & T_u(1,3) & T_u(1,4) & W_u(1,1) \\ T_u(2,1) & T_u(2,2) & T_u(2,3) & T_u(2,4) & W_u(2,1) \\ T_u(3,1) & T_u(3,2) & T_u(3,3) & T_u(3,4) & W_u(3,1) \\ T_u(4,1) & T_u(4,2) & T_u(4,3) & T_u(4,4) & W_u(4,1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

式中, $T_u(n, m)$, $W_u(n, m)$ 分别表示矩阵 \mathbf{T}_u , \mathbf{W}_u 的第 n 行, 第 m 列元素。

结合式 (35), (38), 可得塑性段传递矩阵表达式:

$$\mathbf{S}_{u1} = \mathbf{U}_u \mathbf{S}_{u0} \quad (39)$$

即

$$[x_{u1} \quad \varphi_{u1} \quad M_{u1} \quad Q_{u1} \quad 1]^T = \mathbf{U}_u [x_{u0} \quad \varphi_{u0} \quad M_{u0} \quad Q_{u0} \quad 1]^T \quad (40)$$

2.3 虚拟土层

对于虚拟土层, 由于 $p_u = 0$, $\mathbf{W}_u = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, 式 (39) 简化为

$$\mathbf{S}_{u(i,j1)} = \mathbf{U}'_{u(i,j)} \mathbf{S}_{u(i,j0)} \quad (41)$$

$$\text{式中, } \mathbf{U}'_{u(i,j)} = \begin{bmatrix} T_u(1,1) & T_u(1,2) & T_u(1,3) & T_u(1,4) & 0 \\ T_u(2,1) & T_u(2,2) & T_u(2,3) & T_u(2,4) & 0 \\ T_u(3,1) & T_u(3,2) & T_u(3,3) & T_u(3,4) & 0 \\ T_u(4,1) & T_u(4,2) & T_u(4,3) & T_u(4,4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

综合式 (31), (39) 和式 (41) 即可得桩身任意点 ξ 的矩阵传递方程:

$$\mathbf{S}_\xi = \mathbf{U}_\xi \cdots \mathbf{U}_\kappa \cdots \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{S}_0 \quad (42)$$

式中 当点 κ ($\kappa=1, 2, \dots, \xi$) 位于弹性区时, \mathbf{U}_κ 取 $\mathbf{U}_{e\kappa}$ 计算; 塑性区时, \mathbf{U}_κ 取 $\mathbf{U}_{u\kappa}$ 计算; 虚拟土层时, \mathbf{U}_κ 取 $\mathbf{U}'_{u\kappa}$ 计算。 $\mathbf{S}_0 = [x_0 \quad \varphi_0 \quad M_0 \quad Q_0 \quad 1]$, $\mathbf{S}_\xi = [x_\xi \quad \varphi_\xi \quad M_\xi \quad Q_\xi \quad 1]$ 。当 $\xi=n$ 时, 即为整个完整桩柱结构响应。

2.4 边界条件

式 (42) 共有 8 个未知量, 对于此 5 阶矩阵而言能解出其中 4 个未知量, 另外 4 个需借助边界条件确定。边界条件可分为如下 4 种:

$$\left. \begin{array}{ll} M_0 = M, \quad Q_0 = Q & \text{桩顶自由} \\ x_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0 & \text{桩顶固定} \\ M_n = 0, \quad Q_n = Q & \text{桩端自由} \\ x_n = M, \quad \varphi_n = Q & \text{桩端嵌固} \end{array} \right\} \quad (43)$$

将实际的荷载与边界条件代入式 (42) 求解可得 \mathbf{S}_0 , 再将 \mathbf{S}_0 代入式 (42) 求解可得桩柱式结构任意点的位移和内力。因求解前塑性区未知, 需进行反复迭代计算直至误差在允许范围内。具体计算过程如下:

(1) 第一步 ($k=1$), 假定桩侧土体均未达到其屈服位移, 所有计算单元按弹性解答求解得到各点水平位移 $x_{\xi,k=1}$;

(2) 将每段的 x_ξ ($\xi=1, 2, \dots, n$) 依次与 x_s 比较, 若 $x_\xi \geq x_s$, 则在第二步 ($k=2$) 迭代计算时对应计算单元段采用塑性解答 ($\mathbf{U}_{u\xi}$), 否则仍按弹性解答 ($\mathbf{U}_{e\xi}$), 再结合式 (42) 计算得到 $k=2$ 时各点水平位移 $x_{\xi,k=2}$;

(3) 重复上述步骤②, 直到第 $k+1$ 迭代步的任意点水平位移 $x_{\xi,k+1}$ 与第 k 步相应点水平位移 $x_{\xi,k}$ 满足:

$$\left| \frac{x_{\xi,k+1} - x_{\xi,k}}{x_{\xi,k}} \right| \leq \zeta \quad (44)$$

迭代停止, 其中 ζ 为收敛误差, 本文取 10^{-4} 。

上述迭代计算通过 MATLAB 编程完成。

3 算例分析

3.1 算例 1

为验证本文方法的可行性以及编制程序的正确性,对吴鸣等^[23]倾斜荷载基桩室内模型试验结果进行分析。试验桩共 4 组,各组桩的入土深度及桩顶作用荷载见图 4,其他计算参数如下:桩长 $L=0.8$ m,桩径 $d_p=0.016$ m,壁厚 $t_p=0.002$ m,抗弯刚度 $E_p I_p=189$ N·m²,泊松比 $\nu_p=0.25$;土的弹性模量 $E_s=10$ MPa,泊松比 $\nu_s=0.3$,地基土为均质干砂,土的屈服位移 $x_s=0.6$ mm。桩顶、桩端自由,忽略桩身轴力分布的影响。参考文献[7, 12, 22]对计算参数的确定方法,现根据第一组试验桩周土表面桩身水平位移值反算地基参数得 $m=5 \times 10^5$ kN/m⁴, $z_0=0.2$ m, $n_0=0.43$ 。本文理论解和试验值对比如图 4 所示。

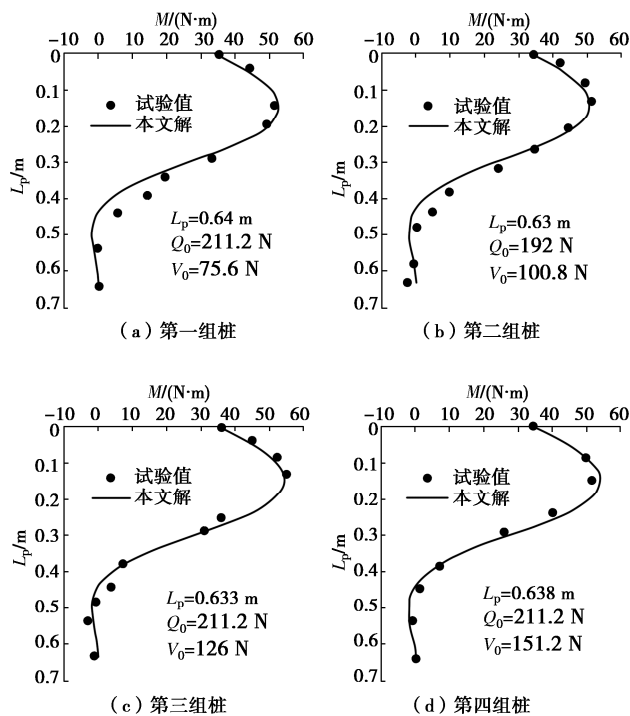


图 4 桩身弯矩对比图

Fig. 4 Comparison of bending moment of piles

由图 4 可知,本文方法所得弯矩计算值与文献[23]试验值吻合较好,因此本文计算方法与编制的程序是正确的、可行的。

3.2 算例 2

为进一步验证本文方法的适用性,对 Gupta 等^[13]大直径桩数值模拟结果进行分析。桩顶、桩端自由,忽略桩身轴力分布的影响。根据数值模拟最大水平位移反算地基参数得 $m=10^4$ kN/m⁴, $z_0=0$ m, $n_0=0.45$ 。其他计算参数见图 5。

由图 5 可知,本文方法所得桩身水平位移与文献[13]数值结果吻合较好,结果表明本文方法也适用于分析大直径桩。

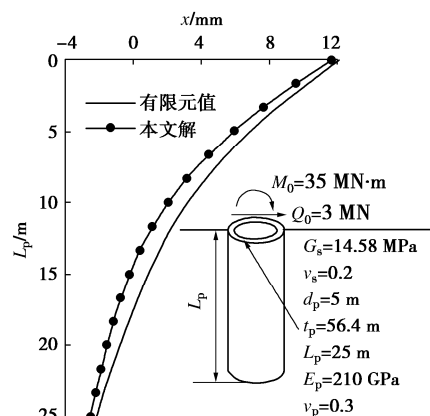


图 5 水平位移对比图

Fig. 5 Comparison of lateral displacement

3.3 算例 3

朱斌等^[24]开展了大直径水平受荷单桩离心模型试验研究。离心试验比例尺度为 1:83,换算后桩径 $d_p=2.5$ m,桩长 $L=65$ m,入土深度 $L_p=50$ m,桩身抗弯刚度 $E_p I_p=56.66$ GN·m²,泊松比 $\nu_p=0.3$,加载点距土表面 $2.7d_p$ 且加载水平荷载 $Q_0=5515$ kN;桩顶、桩端自由,忽略桩身轴力分布的影响。根据试验水平位移实测值反算地基参数得 $m=2.8 \times 10^3$ kN/m⁴, $z_0=0$ m, $n_0=0.4$ 。因文献[24]未给出土体弹性模量及泊松比,故采用本文解答计算时,暂不考虑土体剪切作用,并将计算结果与试验值对比,如图 6 所示。

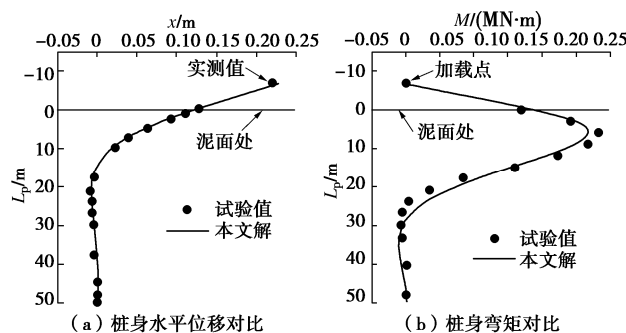


图 6 桩身水平位移、弯矩对比

Fig. 6 Comparison of lateral displacement and bending moment of piles

由图 6 可知,本文方法所得桩身水平位移、弯矩计算值与文献[24]试验值较为接近,再一次证明本文计算方法适于分析大直径桩的内力与变形,而土体剪切刚度对基桩内力与变形的影响可见下文参数分析。

4 影响因素分析

影响桩柱式桥墩受力变形的因素很多,限于篇幅,结合本文方法特点,仅讨论桩、土剪切刚度、地基反

力指数 n_0 、桩的长径比以及土的成层性对桩身水平位移及弯矩的影响。

基本计算参数选取如下：桩柱式结构总长 $L=45\text{ m}$ ，地面以上自由长度 $L_1+L_2=15\text{ m}$ ，其中 $L_1=5\text{ m}$ ，对应柱的直径 $d_{p1}=1.2\text{ m}$ ，弹性模量 $E_1=1.9333\times 10^3\text{ MPa}$ ； $L_2=10\text{ m}$ ，对应柱的直径 $d_{p2}=1.6\text{ m}$ ，弹性模量 $E_2=1.9333\times 10^3\text{ MPa}$ ；桩入土深度 $L_p=30\text{ m}$ ，桩径 $d_p=1.6\text{ m}$ ，弹性模量 $E_p=1.8\times 10^4\text{ MPa}$ ；桩柱结构泊松比 $\nu_p=0.25$ 。桩顶、桩端自由，桩顶作用水平荷载 $Q_0=400\text{ kN}$ ，竖向荷载 $V_0=4000\text{ kN}$ ，弯矩 $M_0=0\text{ kN}\cdot\text{m}$ ；考虑桩身自重以及桩侧摩阻作用，取混凝土重度 $\gamma=25\text{ kN/m}^3$ ，桩侧摩阻力 $\tau=25\text{ kPa}$ [2]；地基参数 $m=5\times 10^3\text{ kN/m}^4$ ， $z_0=0\text{ m}$ ，土的屈服位移 $x_s=10\text{ mm}$ 。

4.1 土层剪切模量 G_s 与地基指数 n_0 的影响

土层剪切模量 G_s 和地基指数 n_0 是本文地基模型的两个重要参数，故此处重点讨论 G_s 和 n_0 对桩身受力的影响。陕西省交通科学研究所通过若干基桩实测结果分析，认为 n_0 随深度按 $0.1\sim 0.6$ 次方增大，而日本竹下淳提出 n_0 应为 $0, 0.5, 1.0, 2.0$ [17]。鉴于此，本文取 $n_0=0.2\sim 1.2$ ，而 $G_s=0\sim 40\times 10^3\text{ kN/m}$ 。不同地基指数 n_0 下，地面处的桩身水平位移 x_{\max} 随不同土层剪切模量 G_s 的变化如图 7 所示。采用无量纲分析，图中， $G_s^*=G_s/(E_p d_p)$ ， $x_{\max}^*=x_{\max}/x_{d,n0=1}$ ， $z^*=z/d_p$ ， $x_{d,n0=1}$ 为 $n_0=1$ 时对应的地面冲刷线处桩身水平位移。

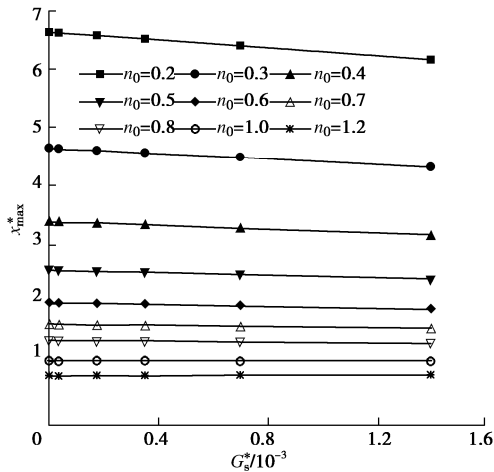


图 7 不同 G_s^* 下的地面处水平位移

Fig. 7 Lateral deflections on ground under different G_s^*

由图 7 可知相同地基剪切刚度时，随着地基反力指数 n_0 增大，土体抵抗侧向变形能力增强，因此桩身水平位移随之明显减小；且对于同一地基指数 n_0 ，地面冲刷线处的桩身水平位移随着 G_s^* 的增大而减小，即土体的剪切作用对约束桩身位移有贡献；图 7 中，当 $n_0=1$ （即为 m 法），土体未塑性变形，而当 $n_0=0.5$ （即为 C 法），土体产生塑性变形，显见 m 法计算所得水平位移值相对于 C 法偏小。

图 8 给出不同地基指数 n_0 下的 M_{\max}^* 随 G_s^* 的变化情况（ $M_{\max}^*=M_{\max}/M_{\max,n0=1}$ ）。由图 8 可知，同一 G_s^* 下，随 n_0 的增大， M_{\max}^* 逐渐减小。对于同一 n_0 ， M_{\max}^* 基本上随 G_s^* 的增大而减小，即土体的剪切作用有助于减小桩身弯矩，但当 $n_0=1, 1.2$ 时， M_{\max}^* 反而会随 G_s^* 的增大略有增大，例如当 $n_0=1$ 时，相较于 $G_s^*=0\text{ kN/m}$ ， $G_s=40\text{ kN/m}$ 对应的 M_{\max} 增大了 0.17% 。

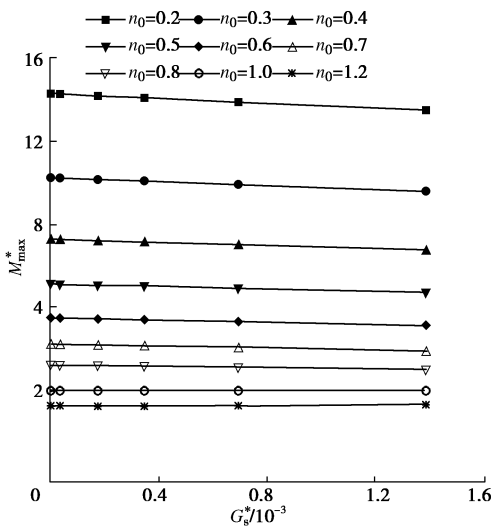


图 8 不同 G_s^* 下的最大弯矩

Fig. 8 Maximum bending moments under different G_s^*

为进一步分析这种现象，本文基于 m 法对以下几种工况进行了计算，其中桩 1 无自由段，即柱顶位于地表，计算参数同上述桩柱式桥墩地表冲刷线以下部分，桩 2 为桩柱式桥墩结构，具体分析见表 1。

表 1 不同工况下 M_{\max}

Table 1 M_{\max} under different working conditions ($10^3\text{ kN}\cdot\text{m}$)						
荷载工况	桩 1 (无 V_0)	桩 1 (有 V_0)	桩 1 ($V_0+\gamma+\tau$)	桩 2 (无 V_0)	桩 2 (有 V_0)	桩 2 ($V_0+\gamma+\tau$)
$G_s=0$ /($\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$)	1.0606	1.0468	1.0469	6.06584	7.1708	7.2339
$G_s=10$ /($\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$)	1.0578	1.0451	1.0452	6.06575	7.1724	7.2354
$G_s=20$ /($\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$)	1.0551	1.0434	1.0435	6.06568	7.1740	7.2368
$G_s=40$ /($\text{kN}\cdot\text{m}^{-1}$)	1.0495	1.0400	1.0401	6.06549	7.1770	7.2396

由表 1 可知，对于桩 1（无自由段基桩），无论有无作用竖向荷载 V_0 以及考虑桩身自重、桩侧摩阻，桩身弯矩最大值 M_{\max} 都会随着土体剪切模量 G_s 的增加而减小。而对于桩 2（桩柱式桥墩）在施加竖向荷载 V_0 后， M_{\max} 反而会随着土体剪切模量 G_s 的增加而略微增大，可知土体的剪切作用对桩柱式桥墩弯矩的影响与“ $P-\Delta$ 效应”相反。

此外图 8 中， m 法相较于 C 法桩身最大弯矩相比减小 5.12% ，同水平位移， m 法计算所得弯矩值相对于 C 法也偏小。综合图 7、8 可知，实际计算桩身位

移、弯矩时, C 法相较于 m 法计算得到的最大位移和最大弯矩相对偏大, 安全储备更高。

4.2 桩身剪切模量 G_p 与长径比 L/d_p 的影响

为分析桩身剪切刚度及长径比的影响, 桩柱结构总长取 $L=20\text{ m}$, 其中 $L_1+L_2=4\text{ m}$, 弹性模量 $E_p=1.8\times10^4\text{ MPa}$; 土体弹性模量 $E_s=5\text{ MPa}$, 泊松比 $\nu_s=0.3$; 其他计算参数不变。桩身剪切刚度的影响反应在桩身剪切模量 G_p 上, G_p 的变化范围: $1\sim40\text{ GPa}$, $G_p^*=G_p/E_s$; 长径比 L/d_p 的变化范围: $3\sim20$ 。

图 9 给出了不同长径比 L/d_p 下, 基于 Timoshenko 梁理论所得桩身最大水平位移 x_{Tmax} 与 EB 梁理论所得桩身最大水平位移 x_{Emax} 的比值。由图 9 可知, 在 $L/d_p=5$ 附近, x_{Tmax} 与 x_{Emax} 的差异达到最大; 当 $L/d_p<5$ 时, 剪切刚度对桩身水平位移的影响随 L/d_p 的增大而增大, 桩呈刚性短桩特性, 桩身剪切变形在桩身变形中占比较大; 当 $L/d_p>5$ 时, 随着长径比增大, 桩身剪切刚度对其水平位移的影响反而减小, 桩呈弹性长桩特性, 桩身弹性弯曲变形引起的桩身水平位移占比增加, 而剪切变形引起桩身水平位移占比相对降低。此外, 桩的剪切刚度越小, x_{Tmax} 与 x_{Emax} 的差异越大。例如当 $G_p^*=200$ 时, x_{Tmax} 比 x_{Emax} 最大高出 21.45%, 而当 $G_p^*=8000$ 时, 最大仅高出 0.55%。

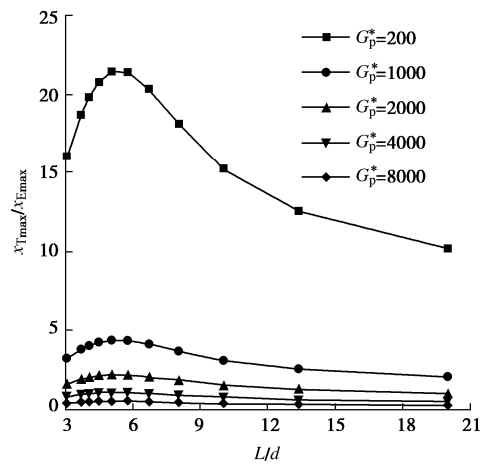


图 9 不同长径比下桩身水平位移比

Fig. 9 Lateral deflections ratio of piles under different ratios of length to diameter

图 10 给出了不同长径比 L/d_p 时, Timoshenko 梁理论所得桩身最大弯矩 M_{Tmax} 与 EB 梁理论所得桩身最大弯矩 M_{Emax} 的比值。因 M_{Emax} 大于 M_{Tmax} , 故纵坐标以 (M_{Emax}/M_{Tmax}) 表示。由图 10 可知, (M_{Emax}/M_{Tmax}) 随 L/d_p 的变化趋势同上述 (x_{Tmax}/x_{Emax}) 的变化趋势, 对应任一桩身剪切刚度, 均在 $L/d_p=5$ 附近 (M_{Emax}/M_{Tmax}) 比值达到最大。此外, 桩身剪切刚度越小, M_{Emax} 与 M_{Tmax} 计算结果相差越大。例如, 同是

$L/d_p=5$, 当 $G_p^*=200$ 时, M_{Emax} 比 M_{Tmax} 最大高出 2.67%; 而当 $G_p^*=1600$ 时, M_{Emax} 仅比 M_{Tmax} 最大高出 0.07%。

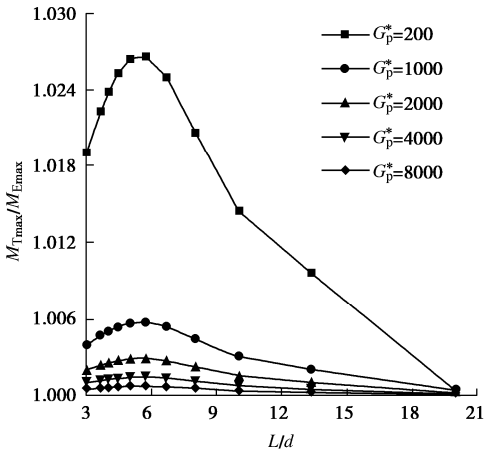


图 10 不同长径比下桩身弯矩比

Fig. 10 Ratios of bending moment of piles under different ratios of length to diameter

4.3 土的成层性对桩身水平位移以及弯矩的影响

为分析土成层性的影响, 桩柱结构总长取 $L=25\text{ m}$, 其中 $L_1+L_2=5\text{ m}$, $d_p=1.5\text{ m}$, 桩的弹性模量 $E_p=2.5\times10^4\text{ MPa}$, 土层参数见表 2。表 2 中工况 a、b 分别表示以稍密粉土、砂砾为主的土层, 工况 a1~a4 表示上层为砂砾, 下层为稍密粉土; 工况 b1~b4 反之。

表 2 各土层计算参数

Table 2 Parameters of soil layers								
工况	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4
上层土厚度 L_3/m	0	1	3	5	0	1	3	5
稍密粉土层 参数	$m=6\text{ MN/m}^4$, $\nu_s=0.35$, $E_s=7\text{ kPa}$, $\tau=120\text{ kPa}$							
砂砾层参数	$m=60\text{ MN/m}^4$, $\nu_s=0.25$, $E_s=70\text{ kPa}$, $\tau=30\text{ kPa}$							

图 11, 12 分别给出了不同工况下, 桩身水平位移图和弯矩图, 图中 $x^*=x/x_{max,b1}$, $M^*=M/M_{max,b1}$, 其中 $x_{max,b1}$, $M_{max,b1}$ 表示工况 b1 对应的最大水平位移和最大桩身弯矩。

由图 11 可知: 当土层为均质稍密粉土时, 桩身位移达到最大, 而当在地表置换 $2/3d_p$ 深的砂砾时, 最大水平位移减小 44.6%, 随着砂砾层置换深度的增加, 桩身水平位移会进一步减小, 但减小的幅度相对有限。当土层为均质砂砾层时, 桩身水平位移最小, 而当在地表存在 $2/3d_p$ 深的稍密粉土时, 最大水平位移相对均质砂砾层增加 32.7%, 随着稍密粉土深度的增加, 桩身位移会进一步增大, 且增大的幅度较大, 当稍密粉土深度为 $10/3d_p$ 时, 最大水平位移相对均质砂砾层增加 95.3%; 综上可知桩身位移的大小与一定深度的表层土软硬程度有关, 表层硬土能有效减小桩身位移。

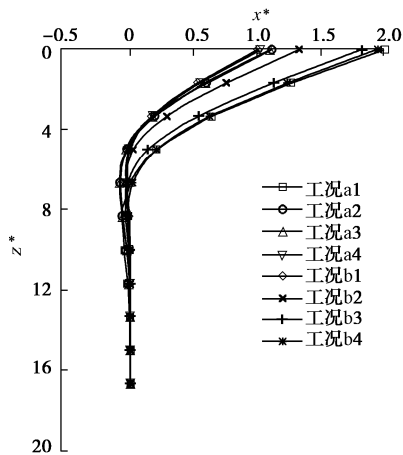


图 11 双层土中桩身水平位移

Fig. 11 Lateral deflections of piles under double-layer soils

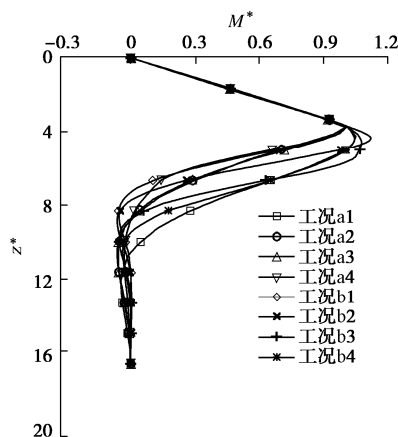


图 12 双层土中桩身弯矩

Fig. 12 Bending moments of piles under double-layer soils

由图 12 可知: 当表层为砂砾时, 最大桩身弯矩 M_{\max} 相比于表层为稍密粉土时会降低 7.8%, 且 M_{\max} 所在位置也更偏向桩体上部; 且随着上层砂砾层厚度增加, 弯矩会逐渐减小, 但减小的速度会逐渐变缓; 而随着上层粉土厚度增加时, M_{\max} 会先增大后减小, 反弯点会明显下降。

5 结 论

本文假设桩柱式桥墩结构在局部冲刷线以上的自由段置于虚拟土层中, 基于 Pasternak 地基反力模型与 Timoshenko 梁理论, 得到了考虑桩、土剪切刚度影响的倾斜荷载下成层地基桩柱结构内力与位移分析的半解析解。基于本文解答, 分析各种因素对桩身水平位移与弯矩的影响, 得到以下 4 点结论。

(1) 地基反力指数越小, 土体更易屈服, 相较于 m 法, C 法更适于计算桩身非线性弹性变形的情况。

(2) 无自由段基桩, 桩身水平位移和弯矩均随土的剪切刚度的增大而减小, 而且地基反力指数越小, 减小幅度越大; 而倾斜荷载下的桩柱式结构, “ $P-\Delta$ 效应”的存在会一定程度上抵消土体剪切刚度的影响。

(3) 桩身剪切刚度及长径比对桩身水平位移与弯矩有一定程度影响, 且在长径比等于 5 附近桩身剪切刚度的影响达到最大; 同一长径比, 桩身剪切刚度越小, 其对桩身水平位移与弯矩的影响越大, 桩身剪切刚度增大了桩身水平位移, 但削弱了桩身弯矩。

(4) 地基成层性对桩柱式结构受力变形的影响不可忽略, 若将上软下硬土层简化为等效均质土, 会使得桩身内力与变形计算结果偏小, 存在安全隐患。

参考文献:

- [1] 赵明华. 轴向和横向荷载同时作用下的桩基计算[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 1987, 14(2): 68 - 81. (ZHAO Ming-hua. The calculation of piles under simultaneous axial and lateral loading[J]. Journal of Hunan University (Natural Science), 1987, 14(2): 68 - 81. (in Chinese))
- [2] 张 玲, 赵明华, 赵 衡. 倾斜荷载下桩柱式桥墩受力变形分析传递矩阵法[J]. 中国公路学报, 2015, 28(2): 69 - 76. (ZHANG Ling, ZHAO Ming-hua, ZHAO Heng. Transfer matrix method for deformation of pile type bridge pier under axial transverse load[J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, 28(2): 69 - 76. (in Chinese))
- [3] 赵明华, 杨超炜, 杨明辉, 等. 基于有限杆单元法的陡坡段桥梁桩基受力分析[J]. 中国公路学报, 2014, 27(6): 51 - 58, 108. (ZHAO Ming-hua, YANG Chao-wei, YANG Ming-hui, et al. Mechanical analysis of bridge pile foundation in high and steep slopes based on finite bar element method[J]. China Journal of Highway and Transport, 2014, 27(6): 51 - 58, 108. (in Chinese))
- [4] 赵明华, 彭文哲, 杨超炜, 等. 高陡横坡段桥梁双桩内力计算有限差分法[J]. 中国公路学报, 2019, 32(2): 87 - 96. (ZHAO Ming-hua, PENG Wen-zhe, YANG Chao-wei, et al. Finite difference solution of bridge double-pile structure on a steep transverse slope[J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 32(2): 87 - 96. (in Chinese))
- [5] 戴国亮, 代 浩, 杨炎华, 等. 冲刷作用下水平承载单桩计算方法及承载特性[J]. 中国公路学报, 2018, 31(8): 104 - 112. (DAI Guo-liang, DAI Hao, YANG Yan-hua, et al. Computation method and bearing characteristics of lateral bearing single pile foundation under scour condition[J]. China Journal of Highway and Transport, 2018, 31(8): 104 - 112. (in Chinese))
- [6] 张小玲, 赵景玖, 杜修力. 基于 Vesic 圆孔扩张理论的桩周土抗力计算方法研究[J]. 中国公路学报, 2021, 34(6): 19 - 26. (ZHANG Xiao-ling, ZHAO Jing-jiu, DU Xiu-li. Computation method for soil resistance around pile based on cavity expansion theory[J]. China Journal of Highway and Transport, 2021, 34(6): 19 - 26. (in Chinese))

- Transport, 2021, **34**(6): 19 – 26. (in Chinese))
- [7] 俞 剑, 朱俊霖, 黄茂松, 等. 基于虚拟加载上限法和黏土小应变特性的桩基 $p-y$ 曲线[J]. 岩土工程学报, 2021, **43**(11): 2029 – 2036. (YU Jian, ZHU Jun-lin, HUANG Mao-song, et al. T-EMSD-based $p-y$ curve of laterally loaded piles in clay considering small-strain behavior[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, **43**(11): 2029 – 2036. (in Chinese))
- [8] 黄茂松, 俞 剑, 张陈蓉. 基于应变路径法的黏土中水平受荷桩 $p-y$ 曲线[J]. 岩土工程学报, 2015, **37**(3): 400 – 409. (HUANG Mao-song, YU Jian, ZHANG Chen-rong. $P-y$ curves of laterally loaded piles in clay based on strain path approach[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, **37**(3): 400 – 409. (in Chinese))
- [9] GUO W D. Nonlinear response of laterally loaded piles and pile groups[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, **33**(7): 879 – 914.
- [10] ZHANG L, ZHAO M, ZOU X. Elastic-plastic solutions for laterally loaded piles in layered soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2013, **139**(11): 1653 – 1657.
- [11] 张 磊, 龚晓南, 俞建霖. 水平荷载单桩计算的非线性地基反力法研究[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(2): 309 – 314. (ZHANG Lei, GONG Xiao-nan, YU Jian-lin. Solutions for laterally loaded single pile by nonlinear subgrade reaction method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(2): 309 – 314. (in Chinese))
- [12] 竺明星, 龚维明, 何小元, 等. 纵横向受荷基桩变形内力的矩阵传递解[J]. 岩土力学, 2014, **35**(11): 3281 – 3288. (ZHU Ming-xing, GONG Wei-ming, HE Xiao-yuan, et al. Matrix transfer solutions to deformation and internal forces of piles under combined vertical and lateral loads[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(11): 3281 – 3288. (in Chinese))
- [13] GUPTA B K, BASU D. Applicability of Timoshenko, Euler-Bernoulli and rigid beam theories in analysis of laterally loaded monopiles and piles[J]. Géotechnique, 2018, **68**(9): 772 – 785.
- [14] LIU J W, SHI C H, CAO C Y, et al. Improved analytical method for pile response due to foundation pit excavation[J]. Computers and Geotechnics, 2020, **123**: 103609.
- [15] 赵明华, 彭文哲, 杨超炜, 等. 基于 Pasternak 双参数地基模型的陡坡段桥梁基桩内力计算方法[J]. 水文地质工程地质, 2018, **45**(1): 52 – 59. (ZHAO Ming-hua, PENG Wen-zhe, YANG Chao-wei, et al. Inner-force calculation of bridge pile foundation in a high-steep slope based on the Pasternak double-parameter spring model[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2018, **45**(1): 52 – 59. (in Chinese))
- [16] 梁发云, 李彦初, 黄茂松. 基于 Pasternak 双参数地基模型水平桩简化分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(增刊 1): 300 – 304. (LIANG Fa-yun, LI Yan-chu, HUANG Mao-song. Simplified method for laterally loaded piles based on Pasternak double-parameter spring model for foundations[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(S1): 300 – 304. (in Chinese))
- [17] 赵明华. 桥梁桩基计算与检测[M]. 北京: 人民交通出版社, 1999. (ZHAO Ming-hua. Calculation of Bridge Piles and Their Detection[M]. Beijing: China Communications Press, 1999. (in Chinese))
- [18] TANAHASHI H. Formulas for an infinitely long Bernoulli-Euler beam on the Pasternak model[J]. Soils and Foundations, 2004, **44**(5): 109 – 118.
- [19] YAO W J, YIN W X, CHEN J, et al. Numerical simulation of a super-long pile group under both vertical and lateral loads[J]. Advances in Structural Engineering, 2010, **13**(6): 1139 – 1151.
- [20] MATLOCK H. Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay[C]// Proceedings of 2nd Offshore Technology Conference. Houston, 1970.
- [21] ZDRAVKOVIĆ L, TABORDA D, POTTS D, et al. Numerical modelling of large diameter piles under lateral loading for offshore wind applications[C]// Third International Symposium on Frontiers in Offshore Geotechnics. Oslo Norway, 2015: 759 – 764.
- [22] COWPER G R. The shear coefficient in timoshenko's beam theory[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, **33**(2): 335 – 340.
- [23] 吴 鸣, 赵明华. 大变形条件下桩土共同工作及试验研究[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(4): 436 – 440. (WU Ming, ZHAO Ming-hua. Study on pile-soil interaction under large deflection and its model test[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(4): 436 – 440.
- [24] 朱 斌, 熊 根, 刘晋超, 等. 砂土中大直径单桩水平受荷离心模型试验[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(10): 1807 – 1815. (ZHU Bin, XIONG Gen, LIU Jin-chao, et al. Centrifuge modelling of a large-diameter single pile under lateral loads in sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(10): 1807 – 1815. (in Chinese))