

DOI: 10.11779/CJGE202208002

基于块体剪流组合机构的黏土隧道三维开挖面稳定分析

王鸿宇^{1, 2}, 黄茂松^{*1, 3}, 唐震⁴

(1. 同济大学土木工程学院地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 华北水利水电大学地球科学与工程学院, 河南 郑州 450046;

3. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 4. 宝龙地产控股有限公司, 上海 201101)

摘要: 基于块体剪流组合机构研究了非均质黏土地层中隧道三维开挖面稳定性。指出了已有文献在推导简单剪流 - 转动机构过程中存在漏项并对稳定系数计算公式进行了改正。通过对块体机构与剪流机构的讨论, 分别从上部刚性块体以及下部剪流区两个方面揭示现有解析机构上限解与离心模型试验结果及弹塑性有限元解差距较大的内在机理。在此基础上, 进一步提出了平动块体非均匀剪流组合机构, 显著改进了现有解析机构在隧道理深比相对较大时的上限解, 并详细讨论了当前常用工程验算方法的适用性。

关键词: 非均质黏土; 隧道开挖面稳定; 上限法; 稳定系数

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2022)08-1376-10

作者简介: 王鸿宇(1993—), 男, 博士, 从事地下工程稳定性方面的科研工作。E-mail: wanghongyu@tongji.edu.cn。

Three-dimensional undrained stability analysis of circular tunnels based on combined mechanism of a translational block and a shear zone

WANG Hong-yu^{1, 2}, HUANG Mao-song^{1, 3}, TANG Zhen⁴

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Geosciences and Engineering,

North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450046, China; 3. Key Laboratory of Geotechnical and
Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 4. Powerlong Real Estate Holdings

Limited, Shanghai 201101, China)

Abstract: Three-dimensional tunnel face stability analysis in heterogeneous undrained clay is carried out by using the combined mechanism of a translational block and a shear zone. The stability factor of tunnels of the simple shear - rotational mechanism proposed by the previous study is corrected as the energy dissipation along the discontinuity surface is omitted. Through in-depth discussion on the block mechanism and shear flow mechanism, the gap between the upper-bounds from the existing mechanisms with the centrifugal test results and the solutions from the finite element method is clarified. The mechanism consisting of a translational cylindrical block and a toroidal shear zone is further proposed to significantly improve the upper-bound solutions from the existing analytical mechanisms when the tunnel cover to depth ratio is relatively large. The effectiveness of practical engineering evaluation methods is also discussed.

Key words: heterogeneous clay; tunnel face stability; upper bound theorem; stability factor

0 引言

隧道开挖面极限支护压力的界定是隧道施工过程中的一项关键内容。若支护压力过小, 可能会造成隧道开挖面塌陷失稳; 而若支护压力过大则又可能造成地表隆起。因此, 对隧道开挖面稳定性进行研究具有重要的工程实践意义。

由于具有严格的理论基础, 极限分析上限法在隧道开挖面稳定问题中得到了广泛的应用。当前用于隧道开挖面稳定分析的上限机构可以划分为3大类: 块体机构、剪流机构以及块体剪流组合机构。

在黏土地层隧道开挖面稳定问题中, 大多数的上

限机构都是基于平动或转动模式的刚性块体机构。Davis等^[1]构造了包含两个块体的简化平动机构对隧道三维开挖面稳定性进行了研究。Mollon等^[2]则通过增加机构内块体的数量对简化平动机构^[1]进行了改进。但Mollon等^[2]所提出的多块体机构存在着与隧道开挖面为不完全接触的缺陷。为解决这一问题, Mollon等^[3]利用空间离散技术使多块体机构可以完全贴合隧

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(51738010); 国家重点研发计划项目(2016YFC0800200)

收稿日期: 2021-06-03

*通信作者(E-mail: mshuang@tongji.edu.cn)

表1 隧道开挖面稳定上限机构对比

Table 1 Comparison of upper-bound mechanisms for tunnel stability analysis

机构类别	运动模式	能量耗散模式	特点	文献来源
块体机构	平动/转动	速度间断面摩擦耗能	精度依赖块体数量 浅埋隧道上限解较好	文献[1~6]
剪流机构	一般形式	速度间断面摩擦耗能(若有) 与剪流区内部塑性变形耗能	相容性速度场构造困难 深埋隧道上限解较好	文献[9~13]
块体剪流组合机构	块体(平动/转动)	速度间断面摩擦耗能与剪流	相容性速度场构造困难	文献[14~16]
	剪流区(一般形式)	区内部塑性变形耗能		

道开挖面。然而离散方法较为复杂且无法估计相应的计算误差。宋春霞等^[4]构造了基于截椭圆柱的解析多块体平动机构, 不仅可以保证机构截面与隧道开挖面完全重合, 还能提高离散技术的计算效率。杨峰等^[5]通过将平动块与有限元法结合, 提出了基于平动块体的上限有限元法。在此基础上, 杨峰等^[6]对非均质黏土地层中隧道开挖面稳定问题进行了研究。从计算结果来看, 多块体机构上限解^[4]在隧道埋深较小时与离心试验结果^[7]及弹塑性有限元解^[8]均吻合较好, 但在隧道埋深较大时的计算精度还有待进一步的提高。

不同于块体机构中的平动或转动模式, 剪流机构基于相容性的连续速度场进行构造, 因而在速度场分布形式上更加自由灵活。Klar 等^[9]基于弹性力学解构造了三维剪流边界摩擦机构, 并对深埋隧道简化平动机构^[1]上限解进行了改进。Mollon 等^[10]在归纳总结离心试验及数值模拟结果的基础上, 提出了空间圆环状的三维纯剪流机构。考虑到机构的几何形状较为复杂, Mollon 等^[10]在功能方程计算时采用了空间离散技术。但 Klar 等^[11]指出由于 Mollon 等^[10]在应变率计算时存在漏项, 采用空间离散技术得到的上限解与解析解之间存在着约 10% 的误差。Zhang 等^[12~13]随后基于 Klar 等^[11]构建的三维正交曲线坐标系对 Mollon 等^[10]提出的 M2 机构进行了解析计算, 并显著提高了深埋隧道上限解的精度。但对浅埋隧道, 纯剪流机构上限解^[12]仍要高于简化平动机构解^[1]。

鉴于块体机构更适用于浅埋隧道稳定性分析, 而对深埋隧道剪流机构解往往更优, 已有学者尝试构造块体剪流组合机构用于隧道开挖面稳定性研究。宋春霞等^[4]提出了简单剪流-转动机构, 以进一步改进深埋隧道上限解, 但其在推导时遗漏了剪流区边界摩擦耗能项, 所得结果并不是严格的上限解。黄茂松^[14]曾对简单剪流-转动机构中稳定系数的计算式进行了修正, 但当时提出的转动块体速度场未能考虑法向速度分量随径向坐标的变化, 导致速度场表达式不满足转动模式中速度的变化规律。唐震^[15]基于平动块体-均匀剪流机构对宋春霞等^[4]构造的组合机构形式进行了调整。虽然平动块体-均匀剪流机构优化了简单剪

流-转动机构上限解, 但其与简化平动机构^[1]仍存在着一定的差距。Huang 等^[16]通过优化组合机构中剪流区速度场的形式, 提出了块体非均匀剪流组合机构。该机构显著改进了现有解析机构对深埋隧道的上限解, 但在隧道埋深比较小时仍要差于简化平动机构^[1]。现有研究中不同上限机构之间差异的对比见表 1。

在当前的工程实践中, 还常使用基于极限平衡法的稳定系数法^[17~18]或是楔形体模型^[19]验算隧道开挖面稳定性。但尚不明确工程实用验算方法的计算结果是偏于保守还是偏于危险, 其适用性还有待进一步的探讨和研究。

本文基于块体非均匀剪流组合机构, 对非均质黏土地层隧道三维开挖面稳定问题展开了上限研究。首先, 指出了宋春霞等^[4]在推导简单剪流-转动机构上限解时存在的问题, 并对其进行更正; 随后, 通过对平动块体-均匀剪流机构以及剪流边界摩擦机构的讨论, 揭示出现有解析机构上限解与离心试验结果及弹塑性有限元解差距较大的内在机理; 最后, 基于上部块体加下部剪流区的组合机构模式, 提出了块体非均匀剪流机构, 并深入探讨了当前工程实践中常用计算方法在验算黏土地层隧道开挖面稳定性时的适用性。

1 简单组合机构的讨论

在非均质黏土地层隧道三维开挖面稳定简化分析模型中, 将隧道开挖面简化为临空面, 隧道埋深与直径分别为 C 与 D ; 隧道开挖面均布支护压力及地表均布超载分别为 σ_T 与 σ_S ; 黏土重度为 γ , 黏土不排水抗剪强度 c_u 随深度 z 呈线性变化:

$$c_u(z) = c_{uo} + \rho z \quad , \quad (1)$$

式中, c_{uo} 为地表处黏土不排水抗剪强度, ρ 为不排水抗剪强度剖面斜率。

从表 1 中的对比讨论可以看出, 不同于块体机构或剪流机构, 在组合机构中, 既包含刚性块体, 又存在剪流区。而根据剪流场形式的不同, 又可以分为均匀剪流及非均匀剪流。其中, 当由速度场推导出的主

应变率均为零时, 称为均匀剪流场, 而当主应变率不全为零时, 速度场可称为非均匀剪流场。在本节所讨论的两种组合机构中, 剪流场均为均匀剪流场。而在后文中通过对非均匀剪流形式的讨论, 进一步引入非均匀剪流区, 以优化均匀剪流区中速度场的分布规律。

本节首先对简单剪流-转动机构稳定系数的计算公式进行推导以更正宋春霞等^[4]所提出的错误计算公式, 再结合不同组合机构形式的讨论构造更加合理的组合机构以获得更优的上限解。

1.1 简单剪流-转动机构

在如图 1 所示的简单剪流-转动机构中, 下部的圆环状转动块体绕垂直于纸面并过隧道开挖面顶点的转动轴做刚性转动, 在其顶部为圆柱状的简单剪流区。

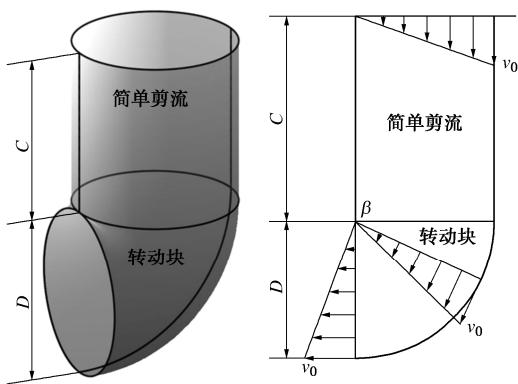


图 1 简单剪流-转动机构

Fig. 1 Simple shear-rotational mechanism

本文在推导时基于剪流概念构造转动块体速度场, 并假设在对称平面中边界面上的相对速度为 v_0 , 则在如图 2 所示的三维正交曲线坐标系 (r, θ, β) 中, 下部转动块体的速度场可写为

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \theta, \beta) &= 0, \\ v_\theta(r, \theta, \beta) &= 0, \\ v_\beta(r, \theta, \beta) &= \frac{v_0}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, R 为隧道开挖面的半径。

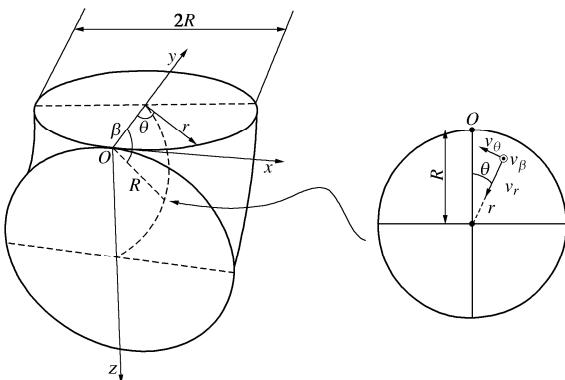


图 2 空间正交曲线坐标系

Fig. 2 Curvilinear coordinate system

基于剪流概念构造的速度场可以保证转动块体只在速度间断面上存在相对摩擦而块体内部无塑性变形产生, 这样的速度场表达式与宋春霞等^[4]所采用的角度速度推导形式在本质上是一致的。

对于上部的简单剪流区, 其速度场可在柱坐标系 (r, θ, z) 下表示为

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \theta, z) &= 0, \\ v_\theta(r, \theta, z) &= 0, \\ v_z(r, \theta, z) &= \frac{v_0}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从速度场分布形式可以看出, 组合机构中下部转动块体与顶部简单剪流区在接触面上无相对速度。

下部转动块体边界上的内力做功为

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} v_0 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [c_{uo} + \rho C + \rho R(1 - \cos \theta) \sin \beta] \cdot \\ &\quad (1 - \cos \theta)^2 d\theta d\beta \\ &= \frac{3\pi^2}{16} v_0 D^2 c_{uo} + \frac{3\pi^2}{16} v_0 \rho C D^2 + \frac{5\pi}{16} v_0 \rho D^3. \end{aligned} \quad (4)$$

下部转动块体重力做功为

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} v_0 R \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right)^2 r \cos \beta dr d\theta d\beta \\ &= \frac{5\pi}{64} v_0 \gamma D^3. \end{aligned} \quad (5)$$

上部简单剪流区最大工程剪应变率为

$$|\dot{\epsilon}_{max}| = \frac{v_0}{2D}. \quad (6)$$

上部简单剪流区内力做功为

$$\begin{aligned} E_2 &= 2 \int_0^C \int_0^{2\pi} \int_0^R (c_{uo} + \rho z) |\dot{\epsilon}_{max}| r dr d\theta dz \\ &= \frac{\pi}{4} v_0 C D c_{uo} + \frac{\pi}{8} v_0 \rho C^2 D. \end{aligned} \quad (7)$$

上部简单剪流区边界上的内力做功为

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{2} v_0 \int_0^C \int_0^{2\pi} (c_{uo} + \rho z)(1 - \cos \theta) R d\theta dz \\ &= \frac{\pi}{2} v_0 C D c_{uo} + \frac{\pi}{4} v_0 \rho C^2 D. \end{aligned} \quad (8)$$

上部简单剪流区重力做功为

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{2} v_0 \gamma \int_0^C \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right) r dr d\theta dz \\ &= \frac{\pi}{8} v_0 \gamma C D^2. \end{aligned} \quad (9)$$

隧道支护压力 σ_T 及地表超载 σ_s 做功为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} v_0 (\sigma_s - \sigma_T) \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right) r dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{8} v_0 (\sigma_s - \sigma_T) D^2. \end{aligned} \quad (10)$$

由外力做功与内力做功相等, 可得荷载参数 $(\sigma_s - \sigma_T)/c_{uo}$ 和稳定系数 N 的计算式分别为

$$\frac{\sigma_s - \sigma_t}{c_{uo}} = 6\frac{C}{D} + \frac{3\pi}{2} - \frac{\gamma D}{c_{uo}} \left(\frac{C}{D} + \frac{5}{8} \right) + \frac{\rho D}{c_{uo}} \left[3 \left(\frac{C}{D} \right)^2 + \frac{3\pi}{2} \frac{C}{D} + \frac{5}{2} \right] , \quad (11)$$

$$N = \frac{\sigma_s - \sigma_t + \gamma(C + D/2)}{c_{uo}} \\ = 6\frac{C}{D} + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{8} \frac{\gamma D}{c_{uo}} + \frac{\rho D}{c_{uo}} \left[3 \left(\frac{C}{D} \right)^2 + \frac{3\pi}{2} \frac{C}{D} + \frac{5}{2} \right] . \quad (12)$$

宋春霞等^[4]在推导过程中遗漏了剪流区边界摩擦耗能项, 所提出的均质黏土地层中荷载参数与稳定系数上限解表达式分别为

$$\frac{\sigma_s - \sigma_t}{c_{uo}} = 2\frac{C}{D} + \frac{3\pi}{2} - \frac{\gamma D}{c_{uo}} \left(\frac{C}{D} + \frac{5}{8} \right) , \quad (13)$$

$$N = \frac{\sigma_s - \sigma_t + \gamma(C + D/2)}{c_{uo}} = 2\frac{C}{D} + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{8} \frac{\gamma D}{c_{uo}} . \quad (14)$$

本文与宋春霞等^[4]所分别推导的简单剪流-转动机构以及 Davis 等^[1]提出的简化平动机构稳定系数上限解在均质无重黏土地层中随隧道埋深比的变化情况如图 3 所示。

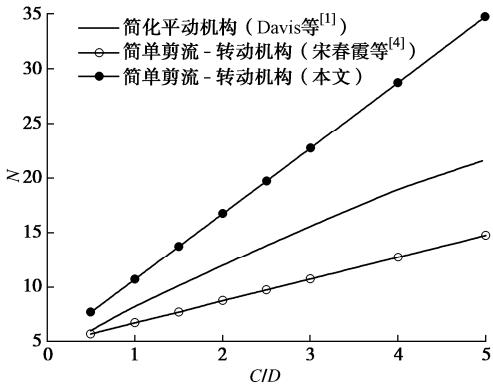


图 3 简单剪流-转动机构稳定系数解

Fig. 3 Stability factor of simple shear-rotational mechanism

图 3 表明, 宋春霞等^[4]在遗漏了剪流区边界摩擦耗能项后, 将明显低估简单剪流-转动机构稳定系数上限解。实际上, 无论是对于浅埋隧道还是深埋隧道, 正确的简单剪流-转动机构上限解同简化平动机构上限解都存在着一定的差距。特别是当隧道埋深比较大时, 二者间的差距十分显著。

简单剪流-转动机构与简化平动机构均由两部分组成, 但上限解却相差较大。这一方面是由于简单剪流-转动机构基于固定模式, 机构形状不能随场地条件的变化进行优化调整; 另一方面则是因为机构内呈线性分布的速度场形式并不合理, 造成机构上限解较差。

1.2 平动块体-均匀剪流机构

上文针对简单剪流-转动机构的讨论指出固定形状的简单剪流-转动机构上限解并不理想, 说明机构

形式并不合理。本节基于数值模拟结果^[8], 通过构造可优化的平动块体-均匀剪流组合机构对简单剪流-转动机构进行改进, 如图 4 所示。

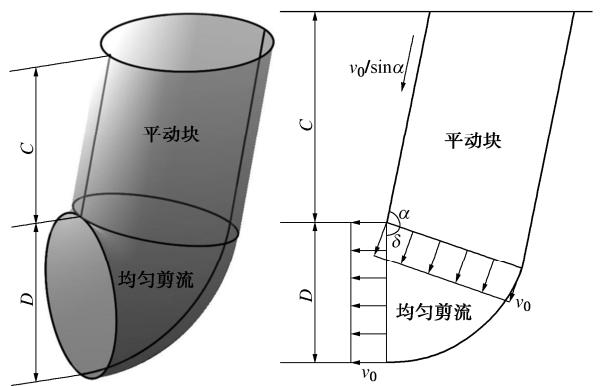


图 4 平动块体-均匀剪流机构

Fig. 4 Translational-uniform shear mechanism

假设下部均匀剪流区在隧道开挖面处的法向速度为 v_0 , 则在三维正交曲线坐标系 (r, θ, β) 中, 下部均匀剪流区的速度场可表示为

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \theta, \beta) &= 0 , \\ v_\theta(r, \theta, \beta) &= 0 , \\ v_\beta(r, \theta, \beta) &= v_0 . \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

下部均匀剪流区最大工程剪应变率为

$$|\dot{\epsilon}_{max}| = \frac{v_0}{2(R - r \cos \theta)} . \quad (16)$$

下部均匀剪流区内部内力做功为

$$E_1 = 2 \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R [c_{uo} + \rho C + \rho(R - r \cos \theta) \sin \beta] \cdot |\dot{\epsilon}_{max}| r (R - r \cos \theta) dr d\theta d\beta \\ = \frac{\pi}{8} v_0 (2\delta D^2 c_{uo} + 2\delta \rho CD^2 + \sin \delta \rho D^3) . \quad (17)$$

下部均匀剪流区边界上内力做功为

$$E_2 = v_0 R^2 \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [c_{uo} + \rho C + \rho R(1 - \cos \theta) \sin \beta] \cdot (1 - \cos \theta) d\theta d\beta \\ = \frac{\rho}{8} v_0 (4\delta D^2 c_{uo} + 4\delta \rho CD^2 + 3 \sin \delta \rho D^3) . \quad (18)$$

下部均匀剪流区重力做功为

$$W_1 = v_0 \gamma \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \cos \beta r (R - r \cos \theta) dr d\theta d\beta \\ = \frac{\pi}{8} v_0 \gamma D^3 (1 - \cos \delta) . \quad (19)$$

由速度相容性条件可得上部平动块体的速度为 $v_0 / \sin \alpha$, 则平动块体边界上内力做功为

$$E_3 = \frac{v_0 D}{2} \int_0^{2\pi} \left[c_{uo} + \frac{1}{2} \rho L \cos(\alpha + \delta) \right] L d\theta$$

$$= \frac{\pi v_0 D}{2 \cos(\alpha + \delta)} \left[c_{uo} (2C + D \cos \delta) + \rho C^2 + \rho \cos \delta CD + \frac{3}{8} \rho \cos^2 \delta D^2 \right] . \quad (20)$$

式中,

$$L(\theta) = \frac{C}{\cos(\alpha + \delta)} + \frac{D \cos \delta (1 - \cos \theta)}{2 \cos(\alpha + \delta)} . \quad (21)$$

上部平动块体重力做功为

$$W_1 = \frac{\pi}{8} v_0 \gamma D^2 (2C + D \cos \delta) . \quad (22)$$

平动块体与均匀剪流区在接触面上的相对速度为 $v_0 \cot \alpha$, 接触面上内力做功为

$$E_4 = \frac{v_0}{\sin \alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^R [c_{uo} + \rho C + \rho(R - r \cos \theta) \cos \delta] \cdot r dr d\theta \\ = \frac{\pi}{8} v_0 \cot \alpha (2D^2 c_{uo} + 2\rho C D^2 + \rho \cos \delta D^3) . \quad (23)$$

隧道支护压力及地表超载做功为

$$P = \frac{\pi}{4} v_0 (\sigma_s - \sigma_t) D^2 . \quad (24)$$

整个机构的重力做功为

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\pi}{4} v_0 \gamma D^2 \left(C + \frac{D}{2} \right) . \quad (25)$$

由外力做功与内力做功相等, 可得荷载参数和稳定系数的计算式分别为

$$\frac{\sigma_s - \sigma_t}{c_{uo}} = N_0 + \frac{\gamma D}{c_{uo}} N_\gamma + \frac{\rho D}{c_{uo}} N_\rho , \quad (26)$$

$$N = \frac{\sigma_s - \sigma_t + \gamma(C + D/2)}{c_{uo}} = N_0 + \frac{\rho D}{c_{uo}} N_\rho . \quad (27)$$

式中,

$$N_0 = 3\delta + \cot \alpha + \frac{2 \cos \delta}{\cos(\alpha + \delta)} + \frac{4}{\cos(\alpha + \delta)} \frac{C}{D} , \quad (28)$$

$$N_\gamma = - \left(\frac{C}{D} + \frac{1}{2} \right) , \quad (29)$$

$$N_\rho = 2 \sin \delta + \frac{\cot \alpha \cos \delta}{2} + \frac{3 \cos^2 \delta}{4 \cos(\alpha + \delta)} + \left[3\delta + \cot \alpha + \frac{2 \cos \delta}{\cos(\alpha + \delta)} \right] \frac{C}{D} + \frac{2}{\cos(\alpha + \delta)} \left(\frac{C}{D} \right)^2 . \quad (30)$$

通过对几何参数 α 与 δ 进行优化搜索即可求得平动块体 - 均匀剪流机构的最优上限解。在均质无重黏土中, 平动块体 - 均匀剪流机构、简单剪流 - 转动机构、简化平动机构^[1]、多块体平动机构^[4]上限解及弹塑性有限元计算结果^[8]对比如图 5 所示。

从图 5 中可以看出, 平动块体 - 均匀剪流机构明显优化了简单剪流 - 转动机构的上限解, 且在隧道埋深较小时与简化平动机构上限解十分接近。但随着隧道埋深比的增加, 其与简化平动机构上限解的差距也在逐步扩大。考虑到平动块体 - 均匀剪流机构以及简

化平动机构的上部均为角度可优化的平动块, 不难发现造成平动块体 - 均匀剪流机构上限解高于简化平动机构解的原因在于其底部均匀剪流区的分布形式, 这也表明均匀剪流区的效果并不理想。

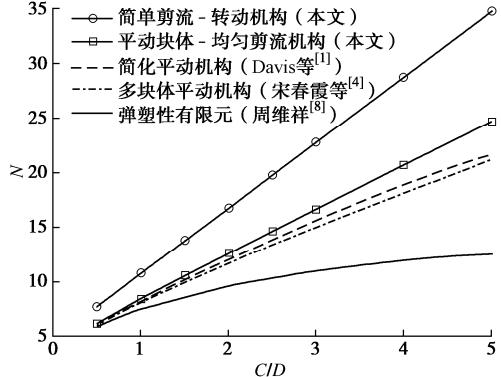


图 5 平动块体 - 均匀剪流机构稳定系数解

Fig. 5 Stability factor of translational-uniform shear mechanism

2 平动块体非均匀剪流机构上限分析

在第 1 节讨论的简单组合机构中, 无论是简单剪流 - 转动机构中的转动块, 还是平动块体 - 均匀剪流机构中的均匀剪流区, 其速度场形式均较为简单。在图 5 中, 两种组合机构的稳定系数上限解均随隧道埋深比呈线性变化。而实际上, 隧道开挖面稳定性不可能随隧道埋深的增加而出现无限制的增长。在 Kimura 等^[7]开展的离心试验中, 当 $C/D \geq 2$ 后隧道开挖面稳定系数的增长趋势就明显放缓。此外, 弹塑性有限元解^[8]表明深埋隧道失稳时土体塑性变形主要集中于隧道开挖面附近, 而地表处土体受到的扰动则较小。形式相对简单的剪流区并不能够反映极限状态下隧道开挖面附近土体的剧烈变形情况, 这也是深埋隧道中简单组合机构稳定系数上限解不够理想的根本原因。

本节通过对剪流区构造方法的讨论, 进一步优化机构底部剪流区的构造形式, 对隧道开挖面稳定上限机构进行改进。

2.1 基于连续速度场的剪流边界摩擦机构

本节对 Mollon 等^[10]提出的 M1 机构进行解析计算, 并在解析 M1 机构的基础上进一步引入边界摩擦, 构造剪流边界摩擦机构, 如图 6 所示。

剪流边界摩擦机构的速度场为

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \theta, \beta) &= \frac{R^2 r}{R_\beta^3 (R_f - r \cos \theta)} \frac{dR_\beta}{d\beta} \left(1 - \frac{\alpha r^2}{R_\beta^2} \right) , \\ v_\theta(r, \theta, \beta) &= 0 , \\ v_\beta(r, \theta, \beta) &= \frac{R^2}{R_\beta^2} \left(1 - \frac{\alpha r^2}{R_\beta^2} \right) , \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$R_\beta(\beta) = R_f + 2\beta(R - R_f)/\pi , \quad (32)$$

$$R_f = C + D/2 , \quad (33)$$

式中, α 为边界速度参数并通过优化计算确定。当 $\alpha=1$ 时, 边界速度为零, 可退化为 M1 纯剪流机构; 当 $\alpha < 1$ 时, 边界速度不为零, 即为剪流边界摩擦机构。

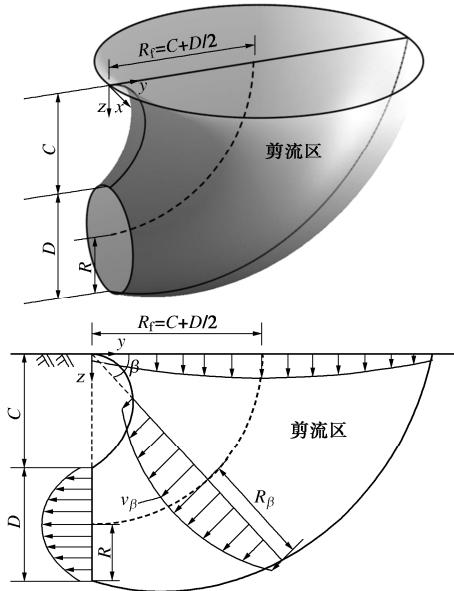


图 6 剪流边界摩擦机构

Fig. 6 Shear flow mechanism with discontinuities
隧道荷载参数与稳定系数的表达式分别为

$$\frac{\sigma_s - \sigma_t}{c_{uo}} = \frac{E_1 + E_2}{\pi D^2 (1 - \alpha/2) c_{uo}} - \frac{\gamma D}{c_{uo}} \left(\frac{C}{D} + \frac{1}{2} \right), \quad (34)$$

$$N = \frac{\sigma_s - \sigma_t + \gamma(C + D/2)}{c_{uo}} = \frac{E_1 + E_2}{\pi D^2 (1 - \alpha/2) c_{uo}}, \quad (35)$$

其中,

$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_\beta} 2c_u |\dot{\varepsilon}_{max}| r (R_f - r \cos \theta) dr d\theta d\beta, \quad (36)$$

$$E_2 = (1 - \alpha) R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{c_u}{R_\beta} \sqrt{1 + \frac{(R'_\beta)^2}{(R_f - R_\beta \cos \theta)^2}} \cdot (R_f - R_\beta \cos \theta) d\theta d\beta. \quad (37)$$

剪流边界摩擦机构、纯剪流机构 M1、平动块体 - 均匀剪流机构、简单剪流 - 转动机构、简化平动机构^[1]、多块体平动机构^[4]以及弹塑性有限元^[8]所给出的隧道开挖面稳定系数解随埋深比的变化见图 7。

图 7 表明当 $C/D \geq 3$ 时, 剪流边界摩擦机构可以改进简化平动机构^[1]以及多块体平动机构^[4]上限解, 并进一步缩小了与弹塑性有限元解^[8]的差距。深埋隧道的开挖面失稳模式更加复杂, 难以用纯平动模式进行表征, 故采用构造合理的非均匀剪流区可以获得更优的上限解。此外, 剪流边界摩擦机构上限解随隧道埋深比呈现出非线性的变化趋势, 更加符合实际情况。但是当 $C/D < 3$ 时, 剪流边界摩擦机构上限解仍高于简化平动机构解^[1]。这主要是因为浅埋隧道失稳时一般呈现出整体塌陷的破坏特征^[8], 在隧道埋深比较小时仍采用较为复杂的非均匀剪流区速度场分布形

式并不合理。

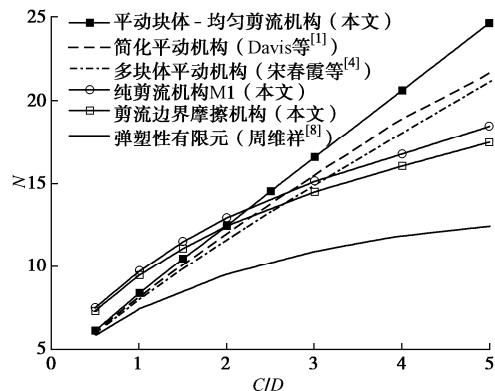


图 7 剪流边界摩擦机构稳定系数解

Fig. 7 Stability factor of shear flow mechanism with discontinuities

值得注意的是, Mollon 等^[10]构造的纯剪流机构是基于数值模拟及离心试验结果中所揭示的失稳模式而总结归纳得到的。但如图 7 所示, 即使是形式简单的简化平动机构^[1]也会在 $C/D < 3$ 时优于纯剪流机构 M1。正如 Chen^[20]所述, 从上限法的角度来看, 任何一种可获得更优上限解的破坏机构都代表了一种改进。上限机构所代表的失稳模式只是一种假想状态, 机构的构造不必拘泥于试验或数值模拟的结果。

2.2 块体非均匀剪流组合机构

通过上文对块体机构以及剪流机构的讨论可以看出就隧道开挖面稳定问题而言, 单独构造刚性块体或非均匀剪流区都不能够完整地反映隧道开挖面失稳模式的特征。从整体上看, 平动块体所体现的整体塌陷的破坏模式更适用于描述浅埋隧道的整体失稳特点, 而非均匀剪流区则可以更好地模拟深埋隧道开挖面附近土体剧烈变形情况。

本节基于此思路, 在 Huang 等^[16]构造的块体非均匀剪流组合机构基础上进一步考虑了可变倾角的顶部平动块, 通过构造一个既包括非均匀剪流区又含有刚性平动块体的三维组合机构对已有机构上限解进行改进, 如图 8 所示。

在此组合机构中, 下部的非均匀剪流区由一系列半径为 R_β 的空间圆环绕垂直于纸面并过点 O 的转动轴旋转组成, 点 O 与开挖面顶点的距离为 L_0 。在隧道开挖面处圆环的半径为 R , 在剪流区与块体交界面处圆环半径为 R_w 。块体剪流区交界面同水平方向的夹角为 δ , 上部平动块体以夹角 α 延伸至地表。假设隧道开挖面处法向速度为 v_0 , 下部非均匀剪流区速度场为

$$\left. \begin{aligned} v_r(r, \theta, \beta) &= \frac{v_0 R^2 r}{R_\beta^3 (R_f - r \cos \theta)} \frac{dR_\beta}{d\beta}, \\ v_\theta(r, \theta, \beta) &= 0, \\ v_\beta(r, \theta, \beta) &= v_0 \frac{R^2}{R_\beta^2}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$R_\beta(\beta) = \frac{R - R_w \sin \delta}{1 - \sin \delta} + \frac{R_w - R}{1 - \sin \delta} \cos(\beta - \delta), \quad (39)$$

式中, $R_f = L_0 + D/2$ 。

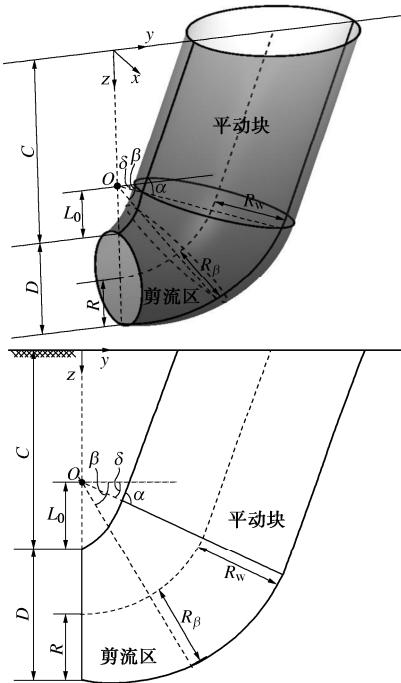


图 8 块体非均匀剪流机构

Fig. 8 Combined mechanism of block and non-uniform shear zone

下部非均匀剪流区内部的能量耗散率为

$$E_1 = 2 \int_{\delta}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_\beta} c_u |\dot{\varepsilon}_{\max}| r(R_f - r \cos \theta) dr d\theta d\beta. \quad (40)$$

下部非均匀剪流区边界摩擦耗能做功为

$$E_2 = v_0 R^2 \int_{\delta}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{c_u}{R_\beta} (R_f - R_\beta \cos \theta) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{R'_\beta}{R_f - R_\beta \cos \theta} \right)^2} d\theta d\beta. \quad (41)$$

下部非均匀剪流区重力做功为

$$W_1 = \gamma \int_{\delta}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_\beta} (v_r \cos \theta \sin \beta + v_\beta \cos \beta) \cdot r(R_f - r \cos \theta) \cdot dr d\theta d\beta = \frac{1}{4} v_0 \gamma \pi D^2 (L_0 + D/2)(1 - \sin \delta), \quad (42)$$

平动块体速度间断面上内力做功为

$$E_3 = v_0 \frac{R^2}{R_w} \int_0^{2\pi} L \left[c_{uo} + \frac{1}{2} \rho L \sin(\alpha - \delta) \right] d\theta \\ = \frac{v_0 \pi R^2}{R_w \sin(\alpha - \delta)} \left\{ c_{uo} [(2L_0 + D) \sin \delta + 2C - 2L_0] + \rho \left(L_1^2 + 2R_w L_1 \sin \delta + \frac{3}{2} R_w^2 \sin^2 \delta \right) \right\}, \quad (43)$$

式中,

$$L_1 = (L_0 + D/2 - R_w) \sin \delta + C - L_0, \quad (44)$$

$$L(\theta) = \frac{L_1}{\sin(\alpha - \delta)} + \frac{2R_w \sin \delta}{\sin(\alpha - \delta)} \frac{1 - \cos \theta}{2}. \quad (45)$$

平动块体重力做功为

$$W_2 = \frac{1}{4} v_0 \gamma \pi D^2 [(L_0 + D/2) \sin \delta + C - L_0]. \quad (46)$$

剪流区与平动块体交界面上的内力做功为

$$E_4 = v_0 \frac{R^2}{R_w^2} \cot \alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{R_w} c_u r dr d\theta \\ = \frac{\pi}{4} v_0 D^2 \cot \alpha [c_{uo} + \rho(C - L_0 + R_f \sin \delta)]. \quad (47)$$

隧道支护压力及地表超载做功为

$$P = \frac{1}{4} v_0 \pi D^2 (\sigma_s - \sigma_t). \quad (48)$$

整个机构重力做功为

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\pi}{4} v_0 \gamma D^2 \left(C + \frac{D}{2} \right). \quad (49)$$

隧道开挖面荷载参数与稳定系数的表达式为

$$\frac{\sigma_s - \sigma_t}{c_{uo}} = \frac{4(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)}{v_0 \pi D^2 c_{uo}} - \frac{\gamma D}{c_{uo}} \left(\frac{C}{D} + \frac{1}{2} \right), \quad (50)$$

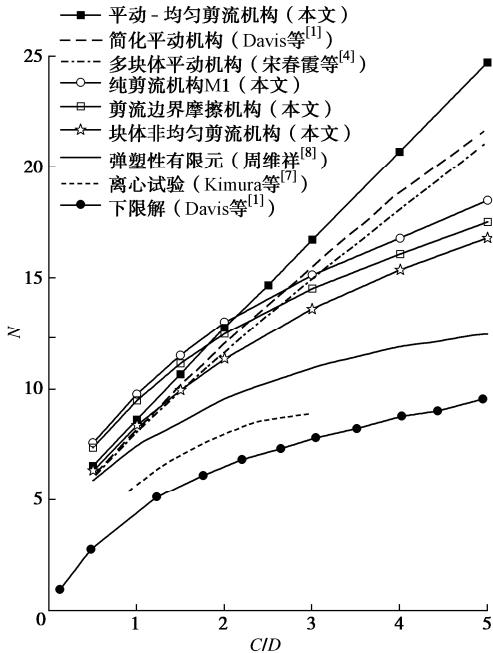
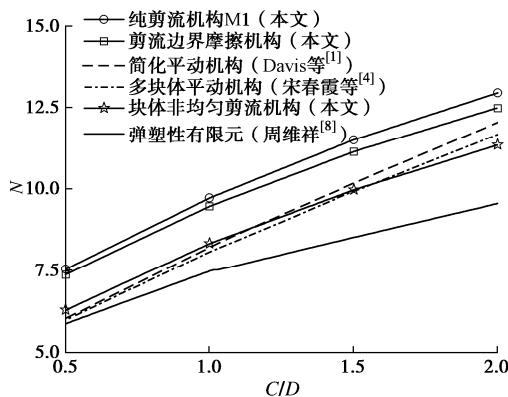
$$N = \frac{\sigma_s - \sigma_t + \gamma(C + D/2)}{c_{uo}} = \frac{4(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)}{v_0 \pi D^2 c_{uo}}. \quad (51)$$

通过对几何参数 α , δ 与 L_0 进行优化搜索即可求得块体非均匀剪流组合机构的最优上限解。由于优化参数较少, 采用模式搜索优化算法寻找最优上限解。其中, 优化参数还需满足以下约束条件:

$$0 \leq L_0 \leq C, 0 \leq \delta < \pi/2, \delta < \alpha \leq \delta + \pi/2. \quad (52)$$

在均质无重黏土中, 本文提出的块体非均匀剪流机构与其它上限机构、下限解^[1]、离心模型试验^[7]及弹塑性有限元^[8]所给出的隧道开挖面稳定系数解对比如图 9 所示。图 10 中给出了 $C/D \leq 2$ 时稳定系数解的放大图。在弹塑性有限单元法中^[8], 不排水黏土采用理想弹塑性 Tresca 屈服准则。对于求解极限承载力的稳定性问题, Griffiths 等^[21]指出弹性参数(弹性模量和泊松比)对极限荷载的影响很小, 故可利用数值方法解对各机构上限解的分布规律进行对比讨论。

虽然纯剪流机构 M1 及剪流边界摩擦机构可以改进深埋隧道中 ($C/D > 3$) 简化平动机构^[1]与多块体平动机构^[4]上限解。但在隧道埋深较浅时, 剪流类机构的效果仍不够理想。从图 10 中可以看出对于浅埋隧道 ($C/D < 1.5$), 本文提出的块体非均匀剪流机构明显优化了剪流边界摩擦机构及纯剪流机构 M1 对浅埋隧道的上限解, 并十分接近简化平动机构^[1]与多块体平动机构^[4]上限解, 缩小了与弹塑性有限元数值解^[8]的差距。从整体上看, 不论是对于浅埋隧道还是深埋隧道, 块体非均匀剪流组合机构均可以给出足够精度的上限解。

图 9 块体非均匀剪流机构上限解($C/D=0\sim 5$)Fig. 9 Stability factor of combined mechanism of block and non-uniform shear zone ($C/D=0\sim 5$)图 10 浅埋隧道稳定系数解对比($C/D=0.5\sim 2$)Fig. 10 Stability factor for shallow tunnel ($C/D=0.5\sim 2$)

基于本文提出的块体非均匀剪流组合机构，就不排水抗剪强度非均质性对隧道开挖面稳定性的影响进行研究，如图 11 所示。

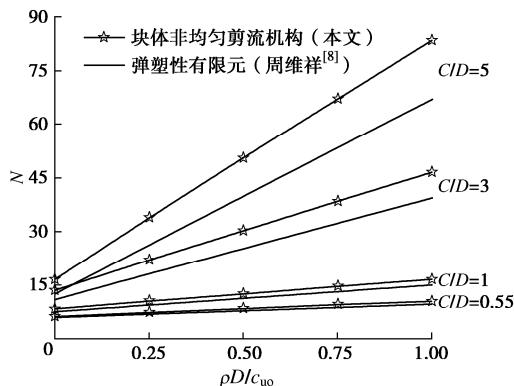


图 11 稳定系数随强度非均质性变化图

Fig. 11 Stability factor with soil strength non-uniformity

在图 11 中，隧道开挖面稳定系数随强度非均质参数呈线性变化，且线性变化率随隧道埋深比增加而增大，这表明黏土抗剪强度非均质性对隧道稳定性的影响对深埋隧道更为显著。此外，在非均质地基中块体非均匀剪流机构依然可以与弹塑性有限元解吻合较好，特别是对于浅埋隧道。但随着隧道埋深增大，解析机构解与数值模拟结果的差距也逐步扩大，且二者差距还会随强度非均质系数的引入而更加明显。

3 常用工程验算方法的讨论

在工程实践中，通常利用最早由 Broms 等^[17]基于室内模型试验结果所提出的稳定系数法对隧道开挖面稳定性进行初步验算。Broms 等^[17]认为当稳定系数小于 6 时，隧道开挖面可维持稳定。但张子新等^[22]指出，稳定系数法在 $C/D > 4$ 时才较为适用。在此基础上，刘建航等^[18]通过总结大量工程实践经验所获得的稳定系数经验公式为

$$\begin{cases} N = 2(C/D + 1) \frac{C/D + 1/2}{C/D + 2/3} & \left(\frac{C}{D} \leqslant 2 \right), \\ N = 2\pi \frac{C/D + 1/2}{C/D + 2/3} & \left(\frac{C}{D} \geqslant 2 \right), \end{cases} \quad (53)$$

除稳定系数法^[17-18]外，工程中还常使用由 Horn^[19]提出的楔形体模型验算隧道开挖面稳定性。楔形体模型由开挖面处的楔形体及其顶部的长方体两部分组成。通过静力平衡条件即可求解隧道开挖面极限支护压力并获得隧道开挖面稳定系数：

$$N = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{4(1 + \tan \alpha)}{\sqrt{\pi}} \frac{C}{D} + \frac{2 - \sqrt{\pi}}{4} \frac{\gamma D}{c_u}, \quad (54)$$

式中， α 为底部楔形体的倾角。在验算黏土地层隧道开挖面稳定性时，可取 $\alpha = 45^\circ$ ，故

$$N = 2 + \sqrt{2} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{C}{D} + \frac{2 - \sqrt{\pi}}{4} \frac{\gamma D}{c_u}. \quad (55)$$

图 12 对常用工程验算方法的稳定系数解与现有研究成果进行了对比。从图 12 中可以看出，当 $C/D \leqslant 1.5$ 时，楔形体模型计算结果略低于块体剪流组合机构上限解。但随着隧道埋深比的增加，二者间的差距也在逐步扩大。与块体类机构相同，楔形体模型计算结果同样随隧道埋深呈线性变化，与实际情况不符。需要指出的是，楔形体模式基于极限平衡法，其稳定系数解基于简化后的应力分布情况获得。当隧道埋深较小时 ($C/D = 0.5$)，楔形体模型解已低于弹塑性有限元解^[8]、T-EMSD 有限元上限解^[23]及三维极限分析有限元下限解^[24]，偏于保守；而当 $C/D \geqslant 3$ 时，楔形体模型解又显著高于块体非均匀剪流机构上限解，明显高估了隧道开挖面稳定性而偏于危险，故在

实际工程中使用楔形体模型时需特别注意。

图 12 表明, 对深埋隧道, 块体非均匀剪流机构上限解与数值方法解^[23-24]差距较大。三维极限分析有限元能量耗散率云图^[24]表明深埋隧道开挖面附近的土体变形剧烈, 而顶部土体变形较小, 呈现出明显的局部失稳特征。而现有的解析机构均基于整体失稳模式, 无法模拟局部失稳, 因此, 对深埋隧道, 解析机构稳定系数上限解与数值方法解差距较大, 且差距还随着隧道埋深比的增加而进一步增大。解析机构对深埋隧道上限解仍有一定的改进空间, 需要展开进一步的研究。

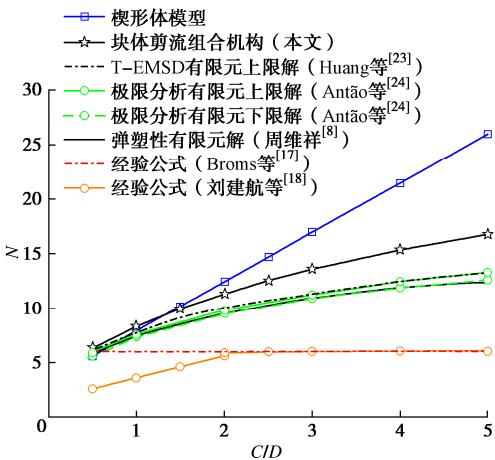


图 12 常用工程验算方法对比图

Fig. 12 Comparison with practical engineering methods

在经验公式法中, Broms 等^[17]及刘建航等^[18]所提出的稳定系数计算结果均显著低于块体剪流机构上限解以及数值方法的计算结果^[8,23-24], 体现了工程实践对安全余度的要求。Broms 等^[17]提出的隧道开挖面稳定系数临界值为定值 6, 不随隧道埋深而变化。刘建航等^[18]归纳总结的稳定系数计算公式则进一步考虑了稳定系数随隧道埋深比的改变, 更加符合稳定系数随不同场地条件的变化规律。两种经验公式解在 $C/D \geq 2$ 时差别不大, 但在 $C/D < 2$ 时, 刘建航等^[18]提出的经验解进一步降低了 Broms 等^[17]提出的稳定系数临界值, 这表明工程界在浅埋隧道稳定性验算时更加保守。从理论研究的角度来看, 上限解与下限解可以共同界定出真实解的取值范围, 即真实解不应大于上限解或小于下限解, 因此稳定系数经验公式解^[17-18]处于下限解^[24]的下方并不合理。不同于理论方法主要研究隧道开挖面在极限状态下的稳定系数真实解, 经验公式法中稳定系数的临界值的选取更多是考虑了工程实践对于安全余度的要求。

4 结 论

本文针对非均质黏土地层中隧道三维开挖面稳定性问题展开上限研究, 通过构造块体非均匀剪流组合机

构获得了隧道开挖面稳定系数上限解, 并考虑了黏土不排水抗剪强度非均质性对隧道开挖面稳定性的影响, 得到以下 4 点结论。

(1) 指出了已有文献在遗漏了剪流区边界上内力做功项后将显著低估简单剪流 - 转动机构上限解, 该机构正确的上限解并不理想。

(2) 通过对平动块体 - 均匀剪流机构以及剪流边界摩擦机构的讨论, 从上部块体及下部剪流区两个方面揭示出当前解析机构上限解与离心试验结果及弹塑性有限元解差距较大的内在机理。指出平动块体所体现的整体塌陷模式更适用于描述浅埋隧道整体失稳特征, 而非均匀剪流区则可以更好地模拟深埋隧道开挖面附近土体的剧烈变形情况。

(3) 提出的块体非均匀剪流组合机构显著改进了现有解析机构在隧道埋深比相对较大时的上限解, 并在隧道埋深较小时与多块体机构十分接近。参数分析表明稳定系数上限解随黏土强度非均质性参数呈线性变化。

(4) 基于极限平衡法的楔形体模型计算结果在隧道埋深较小时与块体非均匀剪流组合机构上限解吻合较好, 但在埋深比大于 3 时显著高于块体非均匀剪流组合机构上限解。经验公式法计算结果不仅显著低于现有解析机构上限解及数值方法结果, 还小于下限解, 体现出工程实践对安全余度的要求。

本文将隧道开挖面简化为临空面, 当采用顶管法或盾构法施工时, 可进一步考虑刀盘约束对速度场构造的影响。

参考文献:

- [1] DAVIS E H, GUNN M J, MAIR R J, et al. The stability of shallow tunnels and underground openings in cohesive material[J]. Géotechnique, 1980, 30(4): 397 - 416.
- [2] MOLLON G, DIAS D, SOUBRA A H. Probabilistic analysis and design of circular tunnels against face stability[J]. International Journal of Geomechanics, 2009, 9(6): 237 - 249.
- [3] MOLLON G, DIAS D, SOUBRA A H. Face stability analysis of circular tunnels driven by a pressurized shield[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(1): 215 - 229.
- [4] 宋春霞, 黄茂松, 周维祥. 黏土地层隧道开挖面三维稳定性上限分析[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(4): 650 - 658. (SONG Chun-xia, HUANG Mao-song, ZHOU Wei-xiang. Three-dimensional face stability analysis of tunnels in cohesive soils by upper bound limit method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(4): 650 - 658.)

- (in Chinese))
- [5] 杨 峰, 赵炼恒, 张 箭, 等. 基于刚体平动运动单元的上限有限元研究[J]. 岩土力学, 2014, **35**(6): 1782–1786, 1808. (YANG Feng, ZHAO Lian-heng, ZHANG Jian, et al. Investigation on finite element upper bound solution based on rigid translatory moving element[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, **35**(6): 1782–1786, 1808. (in Chinese))
- [6] 杨 峰, 何诗华, 吴遥杰, 等. 非均质黏土地层隧道开挖面稳定性运动单元上限有限元分析[J]. 岩土力学, 2020, **41**(4): 1412–1419, 1436. (YANG Feng, HE Shi-hua, WU Yao-jie, et al. Tunnel face stability analysis by the upper-bound finite element method with rigid translatory moving element in heterogeneous clay[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(4): 1412–1419, 1436. (in Chinese))
- [7] KIMURA T, MAIR R J. Centrifugal testing of model tunnels in soft clay[C]// Proceedings of 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Stockholm, 1981: 319–322.
- [8] 周维祥. 非均质黏土地基隧道开挖面稳定性分析[D]. 上海: 同济大学, 2011. (ZHOU Wei-xiang. Stability of Shield Tunnel Excavation in Undrained Condition[D]. Shanghai: Tongji University, 2011. (in Chinese))
- [9] KLAR A, OSMAN A S, BOLTON M. 2D and 3D upper bound solutions for tunnel excavation using ‘elastic’ flow fields[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007, **31**(12): 1367–1374.
- [10] MOLLON G, DIAS D, SOUBRA A H. Continuous velocity fields for collapse and blowout of a pressurized tunnel face in purely cohesive soil[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(13): 2061–2083.
- [11] KLAR A, KLEIN B. Energy-based volume loss prediction for tunnel face advancement in clays[J]. Géotechnique, 2014, **64**(10): 776–786.
- [12] ZHANG F, GAO Y F, WU Y X, et al. Upper-bound solutions for face stability of circular tunnels in undrained clays[J]. Géotechnique, 2018, **68**(1): 76–85.
- [13] ZHANG F, GAO Y F, WU Y X, et al. Face stability analysis of large-diameter slurry shield-driven tunnels with linearly increasing undrained strength[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2018, **78**: 178–187.
- [14] 黄茂松. 土体稳定与承载特性的分析方法[J]. 岩土工程学报, 2016, **38**(1): 1–34. (HUANG Mao-song. Analysis methods for stability and bearing capacity of soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, **38**(1): 1–34. (in Chinese))
- [15] 唐 震. 黏土地层基坑抗隆起及隧道开挖面稳定性上限分析[D]. 上海: 同济大学, 2018. (TANG Zhen. Upper-bound Solutions for Basal Stability of Braced Excavations and Face Stability of Tunnels in Undrained Clay[D]. Shanghai: Tongji University, 2018. (in Chinese))
- [16] HUANG M S, TANG Z, ZHOU W X, et al. Upper bound solutions for face stability of circular tunnels in non-homogeneous and anisotropic clays[J]. Computers and Geotechnics, 2018, **98**: 189–196.
- [17] BROMS B B, BENNERMARK H. Stability of clay at vertical opening[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1967, **93**(1): 71–94.
- [18] 刘建航, 侯学渊. 盾构法隧道[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1991. (LIU Jian-hang, HOU Xue-yuan. Sheild tunneling method[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1991. (in Chinese))
- [19] HORN N. Horizontal earth pressure on the vertical surfaces of the tunnel tubes[C]// Proceedings of National Conference of the Hungarian Civil Engineering Industry. Budapest: Hungary, 1962: 7–16.
- [20] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier, 1975.
- [21] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Géotechnique, 1999, **49**(3): 387–403.
- [22] 张子新, 胡 文. 黏性土地层中盾构隧道开挖面支护压力计算方法探讨[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(3): 606–614. (ZHANG Zi-xin, HU Wen. Investigation on excavation face support pressure calculation methods of shield tunnelling in clayey soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, **33**(3): 606–614. (in Chinese))
- [23] HUANG M S, LI S, YU J, et al. Continuous field based upper bound analysis for three-dimensional tunnel face stability in undrained clay[J]. Computers and Geotechnics, 2018, **94**: 207–213.
- [24] ANTÃO A N, DA SILVA M V, MONTEIRO N, et al. Upper and lower bounds for three-dimensional undrained stability of shallow tunnels[J]. Transportation Geotechnics, 2021, **27**(3): 100491.