

DOI: 10.11779/CJGE20220781

# 基于 Mohr-Coulomb 准则和二阶锥规划技术的轴对称自适应下限有限元法

孙 锐<sup>1</sup>, 张 箭<sup>\*2</sup>, 阳军生<sup>3</sup>, 杨 峰<sup>3</sup>

(1. 安徽理工大学土木建筑学院, 安徽 淮南 232001; 2. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210024;  
3. 中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

**摘 要:** 轴对称 Mohr-Coulomb 准则屈服面的角点问题导致其在数值计算中存在困难, 如何高效处理该屈服准则一直是极限分析下限有限元法的重要内容。首先, 引入完全塑性假定将轴对称 Mohr-Coulomb 准则转化为 1 组不等式约束和 3 个线性等式约束; 然后, 将不等式约束直接转化为二阶锥约束, 避免了对角点进行光滑近似处理; 最后, 将基于 Mohr-Coulomb 准则的轴对称极限分析下限有限元计算模型转化为具有较高计算效率的二阶锥规划数学优化模型。极限分析下限有限元法采用的线性应力单元难以精确模拟破坏区域的应力变化, 单元的分布形式对计算精度存在较大影响。因此提出一种基于单元应力的网格自适应加密策略, 通过判断单元内节点应力接近屈服的程度, 自动识别破坏区域待加密的单元, 实现对破坏区域应力分布的精确模拟, 进而能够以较少单元获得高精度下解。通过分析圆形基础承载力及竖向锚板极限抗拔力等典型轴对称岩土工程稳定性问题, 表明了所提方法具有较高计算效率及计算精度, 具有一定的理论价值和应用前景。

**关键词:** 下限有限元; 自适应加密; 轴对称; 二阶锥规划; Mohr-Coulomb 准则

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)11-2387-09

**作者简介:** 孙 锐(1993—), 男, 博士, 讲师, 主要从事隧道与地下工程方面的研究工作。E-mail: sunruilight@163.com。

## Axisymmetric adaptive lower bound finite element method based on Mohr-Coulomb yield criterion and second-order cone programming

SUN Rui<sup>1</sup>, ZHANG Jian<sup>2</sup>, YANG Junsheng<sup>3</sup>, YANG Feng<sup>3</sup>

(1 School of Civil Engineering and Architecture, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China; 2 Key Laboratory for Geotechnical Engineering of Ministry of Water Resource, Hohai University, Nanjing 210024, China; 3 School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** The axisymmetric Mohr Coulomb yield surfaces have edges and corners in the three-dimensional stress space, which leads to difficulties in numerical calculation. Therefore, how to deal with the axisymmetric Mohr-Coulomb criterion efficiently has always been an important research content of the lower bound finite element limit analysis (LB-FELA) method. Firstly, the axisymmetric Mohr-Coulomb criterion is transformed into a set of inequality constraints and three linear equality constraints by introducing the complete plasticity assumption. Then, the inequality constraints are directly transformed into the second-order cone ones, which avoids the smooth approximation of numerical singularities. Finally, the axisymmetric LB-FELA model based on the Mohr Coulomb criterion is transformed into a mathematical optimization one of the second-order cone programming. The linear stress element adopted by the axisymmetric LB-FELA cannot accurately simulate the stress change in the failure region. Therefore, the mesh distribution form has a great impact on the calculation accuracy of the LB-FELA. To solve this problem, an adaptive mesh refinement strategy based on the element yield residual is proposed. By judging the degree of the node stress in the element close to the yield, the elements can be automatically identified and refined in the failure area. By analyzing the stability problems of typical axisymmetric geotechnical projects such as the bearing capacity of circular foundation and the ultimate uplift capacity of vertical anchor plate, it is shown that the proposed method has high calculation efficiency and accuracy, and it has certain theoretical value and application prospect.

**基金项目:** 安徽高校自然科学研究重点项目 (2022AH050840); 安徽理工大学高层次引进人才科研启动基金项目 (2022yjrc31); 国家自然科学基金面上基金项目 (52178386)

**收稿日期:** 2022-06-20

**\*通信作者** (E-mail: zhangj0507@163.com)

**Key words:** lower bound finite element method; adaptive refinement; axisymmetry; second-order cone programming; Mohr-Coulomb criterion

## 0 引言

轴对称极限分析下限有限元法常用于分析轴对称岩土工程稳定性问题。轴对称问题与平面应变问题不同之处在于需要考虑三维效应。轴对称极限分析下限法中通常采用 Haar-Von Karman 完全塑性假定来描述三维效应<sup>[1-4]</sup>。Pastor 等<sup>[3]</sup>基于 Haar-Von Karman 假定将轴对称 Mohr-Coulomb 准则转化为 3 组不等式锥约束,并通过屈服准则线性化技术将锥约束转化为  $3p$  组线性约束 ( $p$  为某一锥约束线性化边数),从而建立了基于线性规划技术的轴对称下限有限元技术模型,但是也带来相较于平面应变问题 3 倍计算规模的弊端。为提高计算效率, Kumar 等<sup>[5]</sup>提出一种新的转化方式,将轴对称 Mohr-Coulomb 准则转换为 1 组不等式锥约束和 3 条线性约束,然后基于线性化技术,将屈服准则转化为  $p+3$  条线性约束。相较于 Pastor 等<sup>[3]</sup>所提方法, Kumar 等<sup>[5]</sup>所提方法约束更少,计算效率更高。随后, Kumar 等<sup>[6-7]</sup>, Martin<sup>[8]</sup>将上述屈服准则转化方法扩展到轴对称上限有限元方法。

以上方法均是基于线性规划技术,屈服准则的线性化会带来大量线性约束,在计算规模较大时计算效率较低。相较于线性规划技术,二阶锥规划无需屈服准则线性化,优化规模更小;同时二阶锥规划可以采用内点法进行求解,计算效率较高。目前,二阶锥规划技术由于其处理屈服准则的独特优势,已在极限分析有限元方法中得到较为广泛的应用<sup>[9-17]</sup>,但是,以上文献所提方法主要是基于平面应变问题,而二阶锥规划技术在轴对称下限有限元方法中的应用较少。

事实上,文献[9~17]的研究成果表明基于二阶锥规划技术的极限分析有限元法的计算效率要显著大于线性规划技术。然而,以主应力形式表达的轴对称 Mohr-Coulomb 屈服准则难以直接转化为二阶锥规划约束,因此如何转化该准则一直是研究的重点。Tang 等<sup>[18]</sup>基于 Pastor 等<sup>[3]</sup>所提方法,将二阶锥规划技术引入到轴对称下限有限元计算方法中,并与 Kumar 等<sup>[5]</sup>所提方法进行对比,表明基于二阶锥规划的轴对称下限法的计算效率要高于 Kumar 等<sup>[5]</sup>中所提线性规划方法。但是 Tang 等<sup>[18]</sup>与 Pastor 等<sup>[3]</sup>所提方法类似,同样将轴对称 Mohr-Coulomb 准则转化为 3 组二阶锥约束,产生约束较多,会降低计算效率。

因此,为了进一步提高轴对称极限分析下限有限元法的计算效率,本文通过引入完全塑性假定将轴对称 Mohr-Coulomb 准则转化为 1 组二阶锥约束和 3 个线性等式约束,进而建立一种基于二阶锥规划技术的

轴对称下限有限元计算方法。已有较多文献表明<sup>[19-25]</sup>,网格分布形式对于下限有限元方法的计算精度具有较大影响。因此,本文在所提方法中引入一种基于单元屈服残余的网格自适应加密技术,以进一步提高计算精度。通过两个算例验证了该方法具有准确、高效等特性,值得推广应用。

## 1 轴对称条件下 Mohr-Coulomb 准则

轴对称 Mohr-Coulomb 屈服准则可写作为

$$f(\sigma) = (1 + \sin \phi)\sigma_1 - (1 - \sin \phi)\sigma_3 - 2c \cos \phi \leq 0. \quad (1)$$

式中:  $\sigma_1$  为土体最大拉主应力;  $\sigma_3$  为土体最小拉主应力。

如式(1)所示的 Mohr-Coulomb 屈服准则由于角点问题的存在导致其在极限分析有限元方法中的应用存在困难。针对上述问题,文献[18]将轴对称 Mohr-Coulomb 准则转化为如下所示的应力分量表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} &\leq 2c \cos \phi + (\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi, \\ \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} &\leq \frac{4c \cos \phi}{1 + \sin \phi} + (\sigma_r + \sigma_z) - 2\sigma_\theta \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}, \\ \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} &\leq \frac{4c \cos \phi}{1 - \sin \phi} - (\sigma_r + \sigma_z) + 2\sigma_\theta \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中:  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{rz}$  为单元节点应力;  $c$  为土体黏聚力,  $\phi$  为土体内摩擦角。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{z_1^2 + z_2^2} &\leq z_3, \\ z_1 &= \sigma_r - \sigma_z, \\ z_2 &= 2\tau_{rz}, \\ z_3 &= 2c \cos \phi + (\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi, \\ \sqrt{z_4^2 + z_5^2} &\leq z_6, \\ z_4 &= \sigma_r - \sigma_z, \\ z_5 &= 2\tau_{rz}, \\ z_6 &= \frac{4c \cos \phi}{1 + \sin \phi} + (\sigma_r + \sigma_z) - 2\sigma_\theta \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}, \\ \sqrt{z_7^2 + z_8^2} &\leq z_9, \\ z_7 &= \sigma_r - \sigma_z, \\ z_8 &= 2\tau_{rz}, \\ z_9 &= \frac{4c \cos \phi}{1 - \sin \phi} - (\sigma_r + \sigma_z) + 2\sigma_\theta \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Tang 等<sup>[18]</sup>在文献[3]基础上,基于二阶锥规划技术,引入辅助优化变量  $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9\}$ ,将式(2)转换为标准二阶锥规划模型格式。

采用式 (3) 建立极限分析下限有限元数学优化计算模型, 每个优化节点将会产生 3 个二阶锥约束, 9 个线性等式约束。

事实上, 通过引入完全塑性假定可将轴对称 Mohr-Coulomb 准则转化为 1 组二阶锥规划约束和 3 个线性等式约束。对于被动破坏, 轴对称 Mohr-Coulomb 准则可写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r - \sigma_\theta &\leq 0, \\ \sigma_z - \sigma_\theta &\leq 0, \\ \sigma_\theta - 0.5(\sigma_r + \sigma_z) + 0.5(\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi &\leq c \cos \phi, \\ \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} &\leq 2c \cos \phi - (\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

对于主动破坏, 轴对称 Mohr-Coulomb 准则可写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r &\leq 0, \\ \sigma_\theta - \sigma_z &\leq 0, \\ 0.5(\sigma_r + \sigma_z) + 0.5(\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi - \sigma_\theta &\leq c \cos \phi, \\ \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} &\leq 2c \cos \phi - (\sigma_r + \sigma_z) \sin \phi. \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

文献[4, 5, 7, 8, 25]基于完全塑性假定, 考虑土体产生被动破坏, 并利用式 (4a) 求解圆形基础地基承载力问题; 文献[6, 25]考虑土体产生主动破坏, 并利用式 (4b) 求解无支护圆形基坑在土体自重作用下的稳定性问题; 文献[26, 27]基于完全塑性假定, 考虑土体产生主动破坏, 并利用滑移线法求解圆形基坑的主动土压力问题。

采用式 (4) 建立极限分析下限有限元数学优化计算模型, 每个优化节点将会产生 1 组二阶锥约束及 3 个线性约束。相较于 Tang 等<sup>[18]</sup>所提方法, 本文所提方法计算量更小, 计算效率更高。

## 2 基于二阶锥规划的轴对称自适应下限有限元计算模型

### 2.1 问题的离散

如图 1 所示, 轴对称下限有限元法通常采用三角形线性应力单元离散计算域。

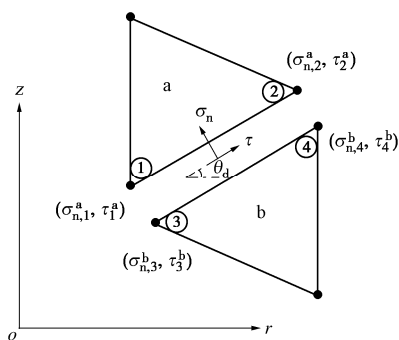


图 1 单元形式及应力间断

Fig. 1 Element type and stress discontinuity

单元之间设置应力间断面。单元内的应力可以表达为

$$\sigma^e = \sum_{i=1}^3 L_i \sigma_i^e. \quad (5)$$

式中:  $\sigma^e$  为单元应力;  $L_i$  为三角形单元形函数;  $\sigma_i^e$  为单元节点应力变量。

#### (1) 应力间断条件

图 1 中  $\sigma_n, \tau$  为应力间断线对应节点的正应力及切应力, 同时保证单元间应力相等,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n,1}^a &= \sigma_{n,3}^b, \tau_1^a = \tau_3^b, \\ \sigma_{n,2}^a &= \sigma_{n,4}^b, \tau_2^a = \tau_4^b. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

#### (2) 静力平衡条件

单元内任意一点的应力均应满足下式所示的轴对称形式下的静力平衡条件, 轴对称问题需要考虑环向应力  $\sigma_\theta$  的影响:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \gamma_z. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中:  $\gamma_z$  为作用在单元  $z$  方向上的体力 (内力以拉应力为正, 右手坐标系)。

### 2.2 基于二阶锥规划的轴对称下限有限元法

结合式 (4) ~ (7) 和应力边界条件, 可以建立基于二阶锥规划的轴对称下限有限元计算模型。式中,  $Q_u$  为下限法所求外力荷载;  $B$  为线性系数矩阵, 由边界条件, 平衡条件以及应力间断条件组成;  $\tilde{\sigma}$  为整体节点应力分量矩阵;  $f(\sigma) \leq 0$  为屈服准则条件, 处理方法如式 (4) 所示。

$$\left. \begin{aligned} \max Q_u \\ B\tilde{\sigma} &= 0, \\ f(\sigma) &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

编制轴对称下限有限元 Matlab 计算程序, 然后调用锥规划求解程序 Mosek<sup>[28]</sup> 求解下限法模型。Mosek<sup>[28]</sup> 是一款基于原始-对偶内点法的锥优化求解程序, 在许多研究中得到了应用<sup>[9-19, 24-25, 28]</sup>, 众多研究表明 Mosek<sup>[28]</sup> 能够准确的求解二阶锥规划、半定规划等锥优化问题, 本文所有案例求解均采用 Mosek 默认参数设置。操作系统为 Windows 10 (64 位); 处理器为 Intel(R) Core(TM) i7-7700HQ 2.8 GHz; 内存为 8 G。

### 2.3 方法效率的对比

第 1 节从理论上解释了本文所提方法相较于既有方法效率更高的原因, 本小节以圆形基础地基承载力问题为例, 具体论证各种方法的计算精度及计算时长。表 1 中两种方法均采用相同非结构化网格, 单元数为 22846。边界条件如图 2 所示, 内摩擦角  $\phi$  为  $5^\circ, 20^\circ$ 。

表 1 计算效率对比(地基与基础直径接触粗糙)

Table 1 Comparison of calculation efficiencies between present method and those available in Reference [18]

方法	单元数	节点数	优化变量数	锥约束数量	线性约束数量	$\phi=5^\circ$			$\phi=20^\circ$		
						承载力系数	计算误差/%	计算时长/s	承载力系数	计算误差/%	计算时长/s
本文方法	22846	11592	479766	68538	593794	7.73	3.37	31	22.35	3.74	37
文献[18]	22846	11592	890994	205614	799408	7.74	3.25	68	22.37	3.67	87

以文献[5]中所给出的下限解为标准,得出两种方法所得解 $N_{cr}$ 与文献[5]的计算误差 $= (N_b - N_{cr}) / N_b \times 100\%$ 。

从表 1 中计算结果可以发现,在采用相同非结构化网格下,两种方法计算结果基本相同,但是本文所提方法计算时长仅为文献[18]中的 1/3~1/2,这说明采用本文所提出方法可以有效提高计算效率。从表 1 也可得出本文所提方法计算效率非常高,内摩擦角 $\phi = 5^\circ$ 时,所需计算时间仅为 31 s;内摩擦角 $\phi = 20^\circ$ 时,所需计算时间仅为 37 s。

2.4 自适应加密技术

由于极限分析下限有限元法存在网格依赖性,结合表 1 中的计算结果可以发现采用非结构化网格计算问题时,两种方法均存在一定计算误差。事实上,文献[18]中为获取较高精度下限解,在划分网格时需要对破坏区域网格预先进行局部加密,且单元数超过 $10^6$ 。这种预先局部加密的手段显然可以获取较高精度下限解,但是在实际操作中,往往需要进行多次重复计算以估计破坏区域范围,同时单元数目过多也进一步加大计算难度,这便是本文提出自适应加密技术的原因。

目前自适应加密技术在轴对称下限有限元法中的应用却较少。因此,本文提出一种基于单元节点应力的网格自适应加密策略,具体流程如下:

(1) 建立初始下限有限元分析模型,提取单元节点应力计算结果。

(2) 根据计算结果,计算单元节点应力与屈服准则的接近程度,结合式 (3),定义单元应力加密指标 ER;每个单元包含 3 个节点,每个节点应力指标定义为 $ER_1, ER_2, ER_3$ ,

$$\left. \begin{aligned} ER_1 &= \sqrt{(\sigma_{r,1} - \sigma_{z,1})^2 + 4\tau_{rz,1}^2} + (\sigma_{r,1} + \sigma_{z,1}) \sin \phi, \\ ER_2 &= \sqrt{(\sigma_{r,2} - \sigma_{z,2})^2 + 4\tau_{rz,2}^2} + (\sigma_{r,2} + \sigma_{z,2}) \sin \phi, \\ ER_3 &= \sqrt{(\sigma_{r,3} - \sigma_{z,3})^2 + 4\tau_{rz,3}^2} + (\sigma_{r,3} + \sigma_{z,3}) \sin \phi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

因此单元应力加密指标 ER 定义为 $\max\{ER_1, ER_2, ER_3\}$ ,通过该指标判断单元内最大应力与屈服面的接近程度。

(3) 根据单元应力加密指标 ER 的计算结果,对单元进行从大到小进行排序。定义参数 $\beta = n / NE$ 为前 n 个待加密单元 (ER 值较大的单元) 与所有单元

数目的比值。由参数 $\beta$ 控制自适应加密单元的数目及单元号,通过大量试算,确定参数 $\beta$ 取 0.15~0.25 较适宜。

(4) 根据第 3 步的处理,采用单元一分为二的方式对单元应力加密指标 ER 较大单元进行加密。

(5) 返回第 2 步,重新进行下限有限元计算,通常加密 15 次即可获取较高精度下限解。

3 案例验证

3.1 圆形基础承载力问题

(1) 问题描述

本文基于所提下限有限元法研究圆形基础地基承载力问题,并与既有文献结果<sup>[5, 8, 25]</sup>进行对比。考虑对称性,圆形基础在纯黏性无重土地基的极限承载力计算模型如图 2 所示。对于本案例所分析的圆形基础承载力问题,竖向压力荷载是导致土体发生被动破坏主要荷载,因此采用式 (4a) 所示方程进行求解。

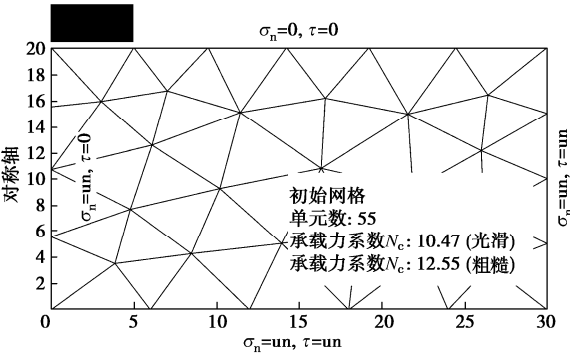


图 2 基础初始网格及边界条件

Fig. 2 Initial mesh and boundary conditions for footing

土体左边界为对称轴,应力边界条件为 $\sigma_n = un, \tau = 0$ ;土体上边界应力边界条件为 $\sigma_n = 0, \tau = 0$ ;基础与地基之间的应力边界条件为 $\tau = 0$  (基础与地面接触光滑), $\tau = un$  (基础与地面接触粗糙);土体下边界及右边界应力边界条件为 $\sigma_n = un, \tau = un$ ,其中 un 代表在该应力边界不施加任何约束。B 为圆形基础直径, c 为土体黏聚强度,  $\phi$  为土体内摩擦角,土体重度 $\gamma = 0, N_c = Q_u / \pi (B/2)^2$  为地基承载力系数,  $Q_u$  为荷载 (也即下限解优化变量)。

根据下限定理,所得的承载力系数越大代表计算结果的精度越高。



为了说明引入网格自适应加密技术的必要性, 图 3 分别采用均匀网格和网格自适应加密两种方法进行求解。可以发现, 相近单元数下, 采用网格自适应加密技术可以获取更高精度的下限解。虽然采用更多单元数的均匀网格也可提高下限解计算精度, 但随着计算精度的提高, 所需单元数将急剧增加, 例如单元数为 3225 时, 此时承载力系数为 17.20, 而单元数 36522 时, 承载力系数仅为 19.23, 低于第 12 次网格自适应加密下的计算结果, 这意味着引入网格自适应技术能够以较少单元获取高精度下限解。

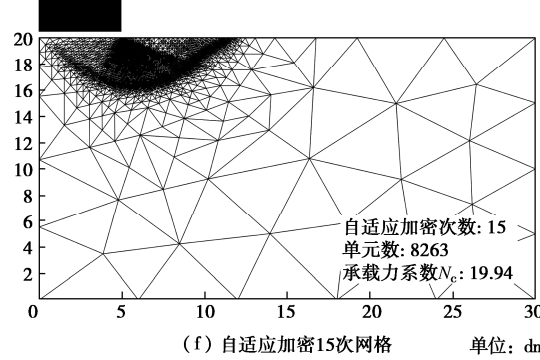
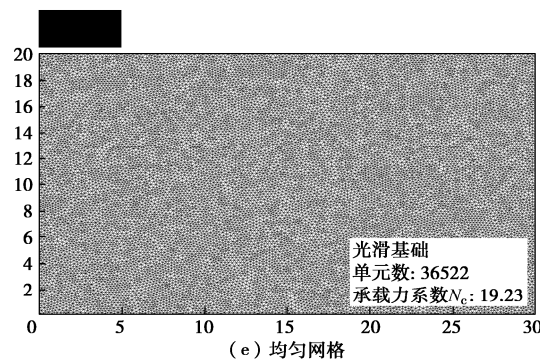
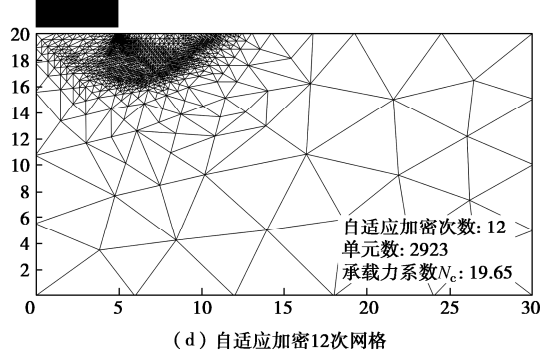
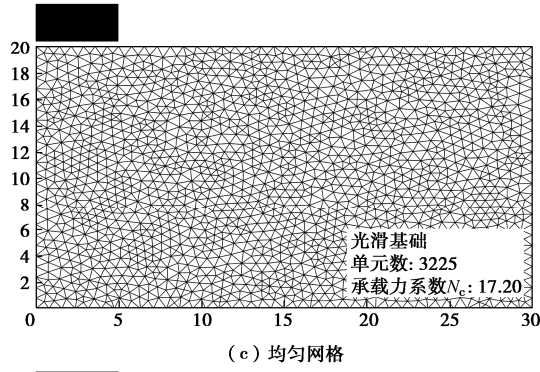
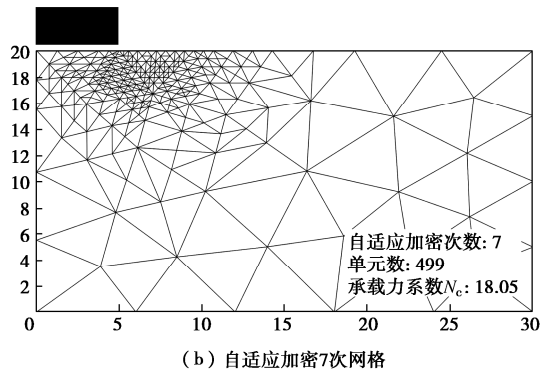
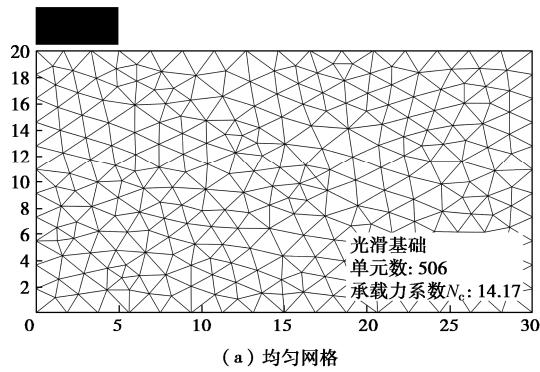
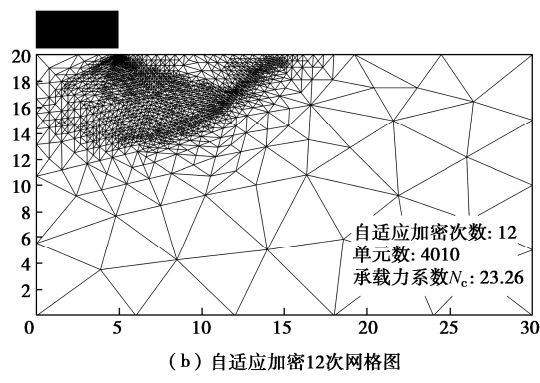
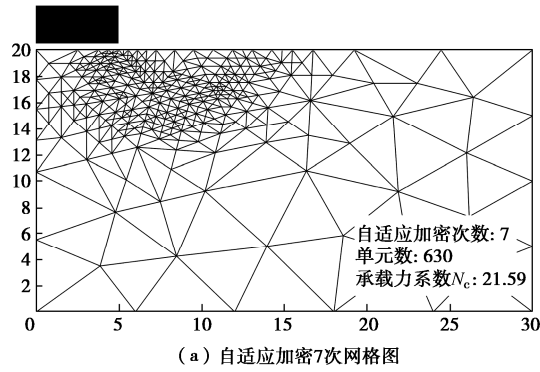


图 3 圆形基础地基承载力下限有限元加密网格(接触光滑)  
Fig. 3 Adaptive refined meshes of bearing capacity using lower bound finite element method with smooth interface

对比图 2~4 可以发现, 随着不断加密, 计算精度不断提高, 这说明本文所提自适应方法的能够准确识别破坏区域单元。同时加密后的网格逐渐形成一条清晰的破坏带, 与文献[25]中得到的塑性区域相一致, 这说明可以通过本文所提方法得到的加密网格可以间接反映出计算区域的塑性区域。图 4 给出接触粗糙时的自适应加密网格图及相应的承载力系数  $N_c$ 。



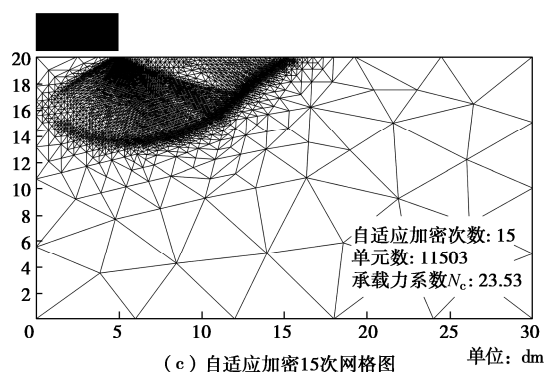


图 4 圆形基础地基承载力下限有限元加密网格(接触粗糙)

Fig. 4 Adaptive refined meshes of bearing capacity using lower bound finite element method with rough interface

(2) 地基承载力系数

根据极限分析定理, 下限解越逼近上限解, 意味着所得下限解的计算精度越高。图 5 给出了不同自适应加密次数下的单元数和相应的地基承载力系数, 初始网格如图 2 所示, 不同加密次数下的自适应加密网格如图 3 所示。可以发现随着网格不断加密, 所得下限解的精度迅速提高, 最终获取的下限解位于 Kumar 等<sup>[5]</sup>所得的下限解和 Zhang 等<sup>[25]</sup>所得上限解之间。

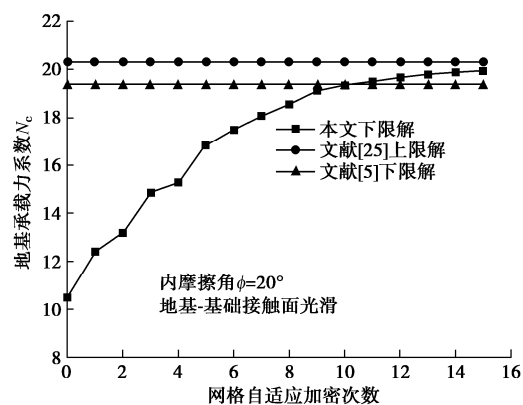


图 5 网格自适应加密次数对地基承载力系数的影响

Fig. 5 Effects of mesh refinement times on bearing capacity coefficient

如表 2 所示, 分别计算不同内摩擦角  $\phi$  下的刚性基础地基承载力系数  $N_c$ , 并与文献[5, 8, 25]中既有

计算结果进行对比。

文献[5]采用基于线性规划的轴对称下限有限元法、文献[8]采用基于轴对称滑移线法、文献[25]采用基于线性规划的轴对称自适应上限有限元法。

3.2 圆形锚板竖向极限抗拔力问题

(1) 问题描述

本文基于所提极限分析轴对称自适应下限有限元法研究圆形锚板竖向极限抗拔力问题, 并与既有文献[1]结果进行对比。对于本案例所分析的圆形锚板竖向极限抗拔力问题, 竖向拉力荷载导致土体发生被动破坏的主要荷载, 因此采用式(4a)所示方程进行求解。

考虑对称性, 圆形锚板竖向极限抗拔力计算模型如图 6 所示, 土体左边界为对称轴, 应力边界条件为  $\sigma_n = \text{un}$ ,  $\tau = 0$ ; 土体上边界应力边界条件为  $\sigma_n = 0$ ,  $\tau = 0$ ; 土体下边界及右边界应力边界条件为  $\sigma_n = \text{un}$ ,  $\tau = \text{un}$ , 其中  $\text{un}$  代表在该应力边界不施加任何约束; 锚板底面与地面接触应力边界条件为  $\sigma_n = 0$ ,  $\tau = 0$ 。

$H$  为锚板埋深,  $d$  为圆形锚板直径, 图 6 中  $H/d = 3$ 。  $c$  为土体黏聚强度, 为了与文献[1]中结果进行对比, 本节假定土体重度  $\gamma = 0$ , 土体内摩擦角为  $\phi = 0^\circ$ ,  $N_q = 4Q_u/(\pi d^2)$  为极限抗拔力系数,  $Q_u$  为荷载(也即下限解优化变量)。

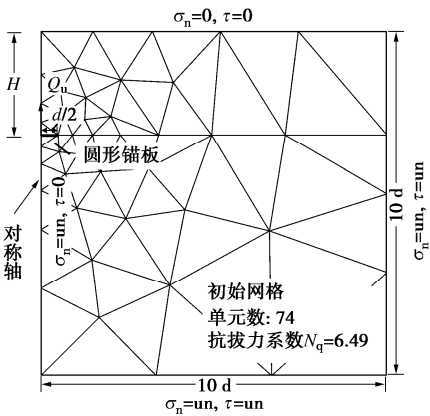


图 6 圆形锚板竖向抗拔力问题初始网格及边界条件

Fig. 6 Initial mesh and boundary conditions for vertical uplift of circular anchor plate

表 2  $N_c$  计算结果与文献结果对比

Table 2 Comparison between present results and those available in references

$\phi$	本文方法	Kumar 等 <sup>[5]</sup>	Zhang 等 <sup>[25]</sup>	Martin 等 <sup>[8]</sup>
5	8.03(7.41)	8.00(7.31)	8.00(7.47)	8.06(7.43)
10	11.04(9.94)	10.99(9.78)	11.16(10.05)	11.09(9.99)
15	15.76(13.86)	15.66(13.51)	16.03(13.99)	15.84(13.87)
20	23.53(19.94)	23.22(19.38)	24.02(20.32)	23.67(20.07)
25	36.98(30.25)	36.17(29.06)	37.96(30.97)	37.31(30.52)
30	61.92(48.78)	61.48(47.10)	64.27(50.48)	62.70(49.29)
35	112.07(84.59)	112.47(81.47)	117.99(89.01)	113.99(85.88)

注: 括号外为接触粗糙时地基承载力系数, 括号内为接触光滑时的承载力系数; 自适应加密次数均为 15 次。

(2) 圆形锚板竖向抗拔问题自适应加密网格

根据下限定理, 所得的承载力系数  $N_q$  越大代表结果的计算精度越高。

对比图 6, 7 可以发现, 随着不断加密, 计算精度不断提高, 同时加密后的网格逐渐形成一条清晰的加密带。

与均布加密方式相比, 破坏区域单元内自动被识别和加密, 显然可以达到以较少单元数获取较高计算精度的目的, 这也是在所提方法中采用自适应加密技术的意义。

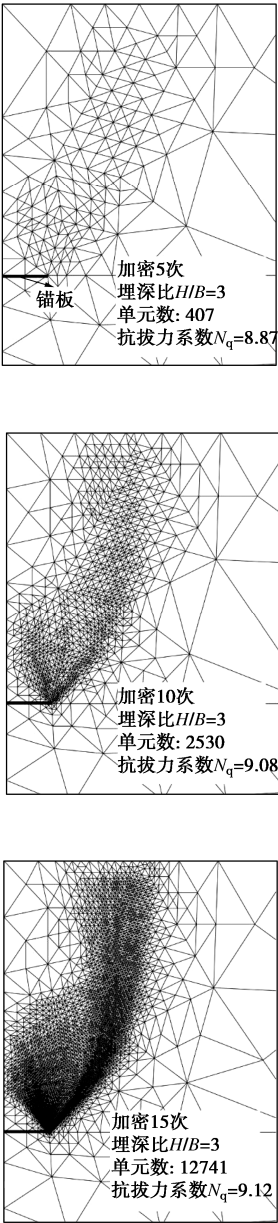


图 7 圆形锚板竖向极限抗拔力问题加密网格 (局部破坏区域)

Fig. 7 Refinement meshes for vertical uplift of circular anchor plates

(3) 锚板抗拔力系数

图 8 中计算不同埋深下的锚板抗拔力系数, 并与文献[1]中既有结果进行对比。从图 8 结果可以发现, 本文计算结果略高于文献[1]中结果, 由下限定理可知, 本文计算结果更精确。与文献[1]中预先对破坏区域的网格进行人工加密不同, 本节基于图 6 所示非结构化网格, 无需预先对计算网格进行特殊处理, 这也是体现了本文所提方法的优势。

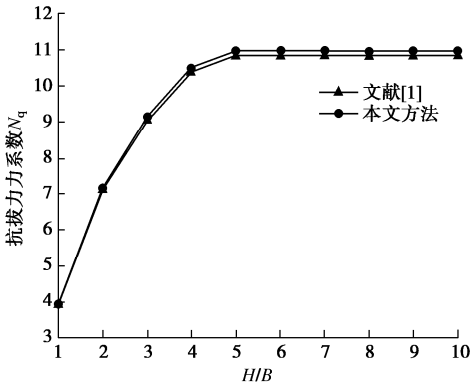


图 8  $N_q$  计算结果与文献结果对比

Fig. 8 Comparison between present results and those available in Reference[1]

4 结 论

本文提出一种基于二阶锥规划的极限分析轴对称自适应下限有限元计算方法。通过算例验证及结果分析, 得到 3 点结论。

(1) 本文所提基于二阶锥规划的轴对称自适应下限有限元方法具有较高计算效率, 能够在个人电脑上高效分析轴对称稳定性问题。

(2) 基于单元屈服残余的网格自适应加密策略克服了极限分析下限有限元法的网格依赖性, 能够迅速提高下限有限元法计算精度, 通过与既有文献结果对比, 表明所提方法可获取高精度下限解。

(3) 破坏区域内的单元被自动识别和加密, 因此通过加密后网格可间接呈现岩土工程的塑性区域。

参考文献:

[1] KHATRI V N, KUMAR J. Vertical uplift resistance of circular plate anchors in clays under undrained condition[J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36(8): 1352-1359.

[2] KHATRI V N, KUMAR J. Bearing capacity factor  $N_c$  under  $\phi=0$  condition for piles in clays[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, 33(9): 1203-1225.

[3] PASTOR J, TURGEMAN S. Limit analysis in axisymmetrical

- problems: numerical determination of complete statical solutions[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1982, **24**(2): 95-117.
- [4] COX A D. Axially-symmetric plastic deformation in soils—II. Indentation of ponderable soils[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1962, **4**(5): 371-380.
- [5] KUMAR J, KHATRI V N. Bearing capacity factors of circular foundations for a general  $c$ - $\phi$  soil using lower bound finite elements limit analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2011, **35**(3): 393-405.
- [6] KUMAR J, CHAKRABORTY D. Stability numbers for an unsupported vertical circular excavation in  $c$ - $\phi$  soil[J]. Computers and Geotechnics, 2012, **39**: 79-84.
- [7] KUMAR J, CHAKRABORTY M. Upper-bound axisymmetric limit analysis using the mohr-coulomb yield criterion, finite elements, and linear optimization[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2014, **140**(12): 06014012.
- [8] MARTIN C. M. User guide for ABC: Analysis of bearing capacity, Version 1.0[R]. Oxford: Department of Engineering Science, University of Oxford, 2004.
- [9] 孙锐, 阳军生, 赵乙丁, 等. 基于 Drucker-Prager 准则的高阶单元自适应上限有限元研究[J]. 岩土工程学报, 2020, **42**(2): 398-404. (SUN Rui, YANG Junsheng, ZHAO Yiding, et al. Upper bound adaptive finite element method with higher-order element based on Drucker-Prager yield criterion[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, **42**(2): 398-404. (in Chinese))
- [10] 孙锐, 杨峰, 阳军生, 等. 基于二阶锥规划与高阶单元的自适应上限有限元研究[J]. 岩土力学, 2020, **41**(2): 687-694. (SUN Rui, YANG Feng, YANG Junsheng, et al. Investigation of upper bound adaptive finite element method based on second-order cone programming and higher-order element[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, **41**(2): 687-694. (in Chinese))
- [11] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, **66**(4): 604-634.
- [12] MAKRODIMOPOULOS A, MARTIN C M. Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2007, **31**(6): 835-865.
- [13] 杨昕光, 周密, 张伟, 等. 基于二阶锥规划的边坡稳定上限有限元分析[J]. 长江科学院院报, 2016, **33**(12): 61-67. (YANG Xinguang, ZHOU Mi, ZHANG Wei, et al. Upper bound finite element limit analysis of slope stability using second-order cone programming[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2016, **33**(12): 61-67. (in Chinese))
- [14] 杨昕光, 迟世春. 土石坝坡极限抗震能力的下限有限元法[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(7): 1202-1209. (YANG Xinguang, CHI Shichun. Lower bound FEM for limit aseismic capability of earth-rockfill dams[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(7): 1202-1209. (in Chinese))
- [15] 刘锋涛, 张绍发, 戴北冰, 等. 边坡稳定分析刚体有限元上限法的锥规划模型[J]. 岩土力学, 2019, **40**(10): 4084-4091, 4100. (LIU Fengtao, ZHANG Shaofa, DAI Beibing, et al. Upper bound limit analysis of soil slopes based on rigid finite element method and second-order cone programming[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, **40**(10): 4084-4091, 4100. (in Chinese))
- [16] 周锡文, 刘锋涛, 戴北冰, 等. 基于混合常应力-光滑应变单元的极限分析方法[J]. 岩土力学, 2022, **43**(6): 1660-1670. (ZHOU Xiwen, LIU Fengtao, DAI Beibing, et al. Limit analysis method based on mixed constant stress-smoothed strain element[J]. Rock and Soil Mechanics, 2022, **43**(6): 1660-1670. (in Chinese))
- [17] 杨昕光, 迟世春. 基于非线性破坏准则的土坡稳定有限元上限分析[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(9): 1759-1764. (YANG Xinguang, CHI Shichun. Upper bound FEM analysis of slope stability using a nonlinear failure criterion[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(9): 1759-1764. (in Chinese))
- [18] TANG C, TOH K C, PHOON K K. Axisymmetric lower-bound limit analysis using finite elements and second-order cone programming[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2014, **140**(2): 268-278.
- [19] LYAMIN A V, SLOAN S W, KRABBENHØFT K, et al. Lower bound limit analysis with adaptive remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, **63**(14): 1961-1974.
- [20] ZHANG R, CHEN G H, ZOU J F, et al. Study on roof collapse of deep circular cavities in jointed rock masses using

- adaptive finite element limit analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2019, **111**: 42-55.
- [21] 李大钟, 郑榕明, 王金安, 等. 自适应有限元极限分析及岩土工程中的应用[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(5): 922-929. (LI Dazhong, CHENG Yungming, WANG Jinan, et al. Application of finite-element-based limit analysis with mesh adaptation in geotechnical engineering[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(5): 922-929. (in Chinese))
- [22] ZHANG R, LI L A, ZHAO L H, et al. An adaptive remeshing procedure for discontinuous finite element limit analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018: 287-307.
- [23] MUÑOZ J J, BONET J, HUERTA A, et al. Upper and lower bounds in limit analysis: adaptive meshing strategies and discontinuous loading[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, **77**(4): 471-501.
- [24] SUN R, YANG J S, ZHAO Y D, et al. Upper bound finite element limit analysis method with discontinuous quadratic displacement fields and remeshing in non-homogeneous clays[J]. Archive of Applied Mechanics, 2021, **91**(3): 1007-1020.
- [25] ZHANG J, GAO Y F, FENG T G, et al. Upper-bound finite-element analysis of axisymmetric problems using a mesh adaptive strategy[J]. Computers and Geotechnics, 2018, **102**: 148-154.
- [26] LIU F Q, WANG J H, ZHANG L L. Analytical solution of general axisymmetric active earth pressure[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2009, **33**(4): 551-565.
- [27] LIU F Q, WANG J H. A generalized slip line solution to the active earth pressure on circular retaining walls[J]. Computers and Geotechnics, 2008, **35**(2): 155-164.
- [28] MOSEK ApS. The MOSEK C optimizer API manual, version 10.1[EB/OL]. 2023-10-01. <https://www.mosek.com/>.

## 第十届全国岩土工程物理模拟学术研讨会征文通知（一号通知）

为促进中国岩土工程物理模拟学术交流, 由中国水利学会岩土力学专业委员会和中国土木工程学会土力学及岩土工程分会主办, 交通运输部天津水运工程科学研究院、南京水利科学研究院、中交天津港湾工程研究院有限公司、天津大学承办的第十届全国岩土工程物理模拟学术研讨会将于 2024 年 8 月 16 日—18 日在天津举行。本届会议是继武汉（2011 年）、杭州（2013 年）、北京（2017 年）、喀什（2023 年）会议后全国岩土工程物理模拟领域的又一次学术盛会。届时将邀请国内外岩土力学与物理模拟领域的著名专家和学者进行交流, 展现最新模拟技术和研究成果, 探讨物理模拟在“交通强国与海洋强国”基础设施建设与防灾减灾研究中的应用, 以促进物理模拟研究对中国重大战略和重大工程的技术支撑作用。本次会议热诚欢迎本领域及相关领域的专家、学者及工程技术人员参加, 特别欢迎相关的博士和硕士研究生参加。

### 一、会议议题

岩土工程物理模拟理论、技术和装备的发展前沿及“交通强国与海洋强国”基础设施建设工程难点问题（例如高烈度土工抗震、港口码头的基础设施建设与高性能服役等），具体会议议题包括（但不限于）如下：①物理模拟新设备与新技术（Ng 超重力模拟与 1g 常重力模拟）；②岩土工程物理模拟理论与相

似律；③岩土工程物理模拟与数值分析；④交通基础设施与地下工程；⑤边坡与堤坝工程防灾减灾；⑥近海及海洋岩土工程；⑦土动力学与岩土地震工程；⑧水利水电与能源岩土工程；⑨冻土与特殊土力学及工程；⑩岩土工程物理模拟研究生论坛。

### 二、论文征稿

论文全文请于 2024 年 1 月 1 日前电邮至会议秘书处邮箱：125828612@qq.com，审查结果将于 2024 年 1 月 30 日通知。根据审查意见，作者修改后的论文终稿请于 2024 年 3 月 15 日前电邮至会议秘书处邮箱。

论文格式：论文限 6 页以内，论文排版格式参考《岩土工程学报》。

本次会议优秀论文将推荐在《岩土工程学报》或《水道港口》等正刊或专刊上发表。热忱从事相关领域的研究、勘察、设计与施工的科技工作者及青年研究生踊跃投稿。论文请控制在 6 页以内。

### 三、联系方式

地址：交通运输部天津水运工程科学研究院；邮编：300456；E-mail: 125828612@qq.com, 726327972@qq.com；电话：张宇亭 18622332119，安晓宇 18622236750，王雪奎 13502069907，陈广思 1532018817。

（会议组委会）