

DOI: 10.11779/CJGE20220582

黏时变渗透分段注浆压力的上、下限解

王军辉, 韩 煊

(北京市勘察设计研究院有限公司, 北京 100038)

摘要: 在浆液的黏时变效应下, 渗透注浆压力(p)和注浆速率(q)都是随时间 t 变化的, 给注浆工程的设计计算带来困难。首先, 考虑到设计的便利, 利用定积分原理, 提出了 p - q 双时间变量下对应的分段注浆压力(P)和注浆速率(Q)的工程定义。其次, 根据黏时变理论和Darcy定律, 建立了 p - q 双时间变量下的黏时变渗透注浆解析模型(包括物理方程、几何方程和边界条件), 揭示了黏时变渗透注浆的复杂数学物理过程, 讨论了模型解的存在性与唯一性。再次, 利用 P - Q 的工程定义式和渗透注浆解析模型进行 P 的理论解研究, 充分利用积分不等式的性质, 分别得到了 P 的下限与上限通解, 讨论解的科学性与普适性。最后, 结合当前实际工程需要, 进一步讨论了指数黏时变函数 P 的上、下限特解(包括球面和柱面两种扩散模式)。

关键词: 注浆; 渗透; 注浆压力; 注浆速率; 注浆持续时间; 黏滞系数; 黏时变; 积分不等式

中图分类号: TU432 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2023)09-1782-08

作者简介: 王军辉(1973—), 男, 博士, 教授级高级工程师, 主要从事水文地质与岩土工程方面的科学研究与工程咨询工作。E-mail: wjh1223@sina.com。

Upper- and lower-bound solutions for sectional penetration grouting pressure under time-dependent viscosity of slurry

WANG Junhui, HAN Xuan

(BGI Engineering Consultants Ltd., Beijing 100038, China)

Abstract: Under the time-dependent viscosity of slurry, the grouting pressure (p) and the grouting rate (q) are both time-dependent, which makes design and calculation more difficult in grouting project. Firstly, the engineering definitions of grouting pressure (P) and grouting rate (Q) for a sectional grouting under the double-time-variable of p - q are introduced by using the defined integral. Secondly, according to the theory of time-dependent viscosity and the Darcy's law, an analytical model for the penetration grouting under time-dependent viscosity of slurry considering the double-time-variable of p - q is established (including physical equation, geometrical equation and boundary condition), with which the complex process of penetration grouting under time-dependent viscosity of slurry is discovered, and its solutions are discussed systematically. Thirdly, the theoretical solutions for the sectional grouting pressure P are deduced based on its engineering definition and the above analytical model, and with the property of integral inequality and the systematic theoretical derivation, the general limit solutions (including upper- and lower-bound solutions) of P are obtained, and their scientificity and universality are discussed. Finally, considering the actual engineering needs, the special upper- and lower-bound solutions of P for the two modes of spherical and cylindrical diffusions under exponential time-dependent viscosity function are further discussed.

Key words: grouting; penetration; grouting pressure; grouting rate; grouting duration; viscosity coefficient; time-dependent viscosity; integral inequality

0 引言

注浆是地下工程的灵魂, 在地下工程的各类主工法(如明挖、暗挖和盾构)施工中的地层加固与止水两个方面发挥越来越重要的作用^[1-3]。为确保注浆质量, 目前工程上注浆多数是靠分段注浆工艺(前进式或后退式)来实现的, 在分段注浆设计中, P - Q - T 3个关键技术参数(分别为某段注浆的注浆压力、注浆

速率和注浆持续时间等3个设计参数, 均为具体的值, 下同)对注浆效果、成本和环境扰动程度有重要影响。但一般情况下在注浆过程中注浆压力和注浆速率(分别以 p 和 q 表示)是随时间 t 变化的, 这种情况下如何用一个具体的 P 和 Q 值来指导注浆施工? 目

前的注浆设计计算理论尚不完善, 现场施工多依赖于经验, 致使设计与施工实际严重脱节, 最终造成注浆施工中工程风险和环境风险均很大。这是目前注浆设计施工中普遍存在的问题, 尤其是分段注浆压力 P 的确定上表现更明显, 例如: P 过低, 无法得到满足工程需要的注浆量或扩散半径; 有时 P 过大, 造成冒浆、围岩与邻近结构位移超限等问题。

按照不同的介质和工艺, 注浆可分为渗透注浆、劈裂注浆、压密注浆和充填注浆等 4 类。对于一般的水泥-水玻璃浆液, 在中砂粒径以上的地层中以渗透注浆为主。针对渗透注浆, 1938 年法国学者 Maag 提出了注浆史上第一个计算公式, 即著名的 Maag 公式。之后, 渗透注浆成为整个注浆理论的基础和研究热点, 但仍然存在诸多不足, 其中之一就是在对浆液黏时变的考虑上。

0.1 传统渗透注浆理论存在的问题

为方便后续讨论, 将传统的 Magg 公式与柱面扩散公式整合在一起表达^[4] (注浆压力统一采用水头高度表达, 下同), 即

$$h_g = \frac{\mu_{g0} q_g}{\mu_w K} \int_{r_g}^{R(T)} \frac{dr}{A(r)} + h_0 \quad , \quad (1)$$

其中, $A(r) = \begin{cases} 4\pi(r^2 - r_g^2) & \text{(球面扩散)} \\ 2\pi L(r - r_g) & \text{(柱面扩散)} \end{cases}$, $q_g T = \int_{r_g}^{R(T)} A(r) dr \cdot n$ 。

式中: h_g 为注浆压力水头 [L]; q_g 为注浆速率 [$L^3 T^{-1}$]; μ_{g0} 为浆液初始黏滞系数 [$ML^{-1}T^{-1}$], 为时间常量; μ_w 为水的黏滞系数 [$ML^{-1}T^{-1}$]; K 为地层渗透系数 [LT^{-1}]; r_g 为注浆孔半径 [L]; T 为注浆持续时间 [T]; $R(T)$ 为达到 T 时的浆液扩散半径 [L]; h_0 为注浆影响范围 (近似为扩散半径 $R(T)$ 附近) 以外的地层中孔隙水压力水头 [L]; $A(r)$ 为浆液扩散到 r 时的面积 [L^2]; r 为离注浆孔中心的距离变量 [L]; L 为柱面扩散段的长度 [L]; n 为地层孔隙率。

式 (1) 定量地描述了渗透注浆 p 和 q 两个过程量之间的关系 (分别对应式中的 h_g 和 q_g), 同时, 由于推导过程中, 黏滞系数按照时间常量考虑的 (即整个过程中均等于初始黏滞系数 μ_{g0}), 因此当 q 为时间的恒量时, p 也可为常量^[4], 这样式 (1) 中 h_g 可直接用于 P 的压力水头取值, 为注浆设计提供一定依据^[4]。

由于式 (1) 中黏滞系数按时间常量考虑, 在理论上与在含水层中注水并无本质区别。但实际上, 出于注浆加固和止水目的, 与化学性质稳定的水体存在着本质区别, 浆液的黏滞系数注浆过程中是随时间快速增大的 (即所谓 “黏时变”, time-dependent viscosity)^[5-13],

即

$$\mu_g'(t) > 0 \quad (t \in [0, T_g]) \quad . \quad (2)$$

式中: $\mu_g(t)$ 为任意时刻 t 的黏滞系数, 即黏时变函数 [$ML^{-1}T^{-1}$]; t 为注浆时间 [T]; T_g 为浆液的凝胶时间 [T]; 其他符号同前。

浆液黏时变作用势必会引起 p - q 两个新的时间变量。大量的工程实践也表明, 对于渗透注浆这种不改变地层结构的注浆类型, 在同一个注浆段内, p 一般为 t 的增函数, 而 q 为一般 t 的减函数^[14], 即

$$h_g'(t) \geq 0 \quad (t \in [0, T]) \quad , \quad (3a)$$

$$q'(t) \leq 0 \quad (t \in [0, T]) \quad . \quad (3b)$$

式中: $h_g(t)$ 为任意时刻 t 的注浆压力 $p(t)$ 对应的水头高度 [L]; $q(t)$ 为任意时刻 t 的注浆速率 [$L^3 T^{-1}$]; 其他符号同前。

式 (1) 不能很好地反映式 (2), (3) 中的实际情况, 这是造成传统渗透注浆理论分析的 P 和实际相差较大的主要原因之一。

0.2 黏时变渗透注浆理论研究现状

随着注浆实践中上述问题越来越突出, 相关学者开展了较多的理论研究, 这对改进实际渗透注浆设计计算水平起到积极促进作用。目前的研究成果主要是基于黏时变函数某种数学处理而达到对传统注浆理论式 (1) 一定改进, 总体上可以分为如下两大类。

(1) 黏时变函数平均值法

该类方法比较直观, 直接利用黏时变函数 $\mu_g(t)$ 的平均值直接置换式 (1) 中的 μ_{g0} , 从而得到其注浆压力^[8-10], 即

$$h_{gq} = \frac{q_g \int_0^T \mu_g(t) dt}{\mu_w K T} \int_{r_g}^{R(T)} \frac{dr}{A(r)} + h_0 \quad . \quad (4)$$

式中: h_{gq} 为用黏时变函数平均值法计算的某段注浆压力水头高度 [L]。

(2) 黏时变函数调和平均值法

该类方法是将式 (1) 中的 μ_{g0} 置换成黏时变函数调和平均值, 得到其注浆压力^[11-13], 即

$$h_{gp} = \frac{q_g T}{\mu_w K \int_0^T \frac{dt}{\mu_g(t)}} \int_{r_g}^{R(T)} \frac{dr}{A(r)} + h_0 \quad . \quad (5)$$

式中: h_{gp} 为用黏时变函数调和平均值法计算的某段注浆压力水头高度 [L]。

在式 (4), (5) 中, 当注浆速率 q_g 按时间常量考虑时, 与之对应的注浆压力 h_{gq} 和 h_{gp} 也是时间的常量, 类似于式 (1) 的思路, h_{gq} 和 h_{gp} 直接作为分段注浆压力设计值。

但是, 式(4), (5)在数学推导上存在如下不足: 仅考虑到式(2)中的黏时变函数这一个时间变量, 而并未充分地考虑到式(3)所表征的 p - q 双时间变量, 同时在概念上也未充分厘清过程量(p , q)与对应具体技术参数(P , Q)的区别及联系。因此, 这种对于黏时变的考虑是“不彻底的”, 实际上还是一种“常量方法”, 无非是将传统注浆理论式(1)中的常量 μ_{g0} 置换成了另一个常量(黏时变函数的平均值或黏时变函数调和平均值), 存在理论上的不足。由此得到的 P 用于设计是否合理, 以及上述两种计算方法之间又存在何种关系, 也缺乏足够的科学论证和实践的检验。

为系统地揭示对黏时变渗透注浆过程和提高注浆设计计算水平, 开展了如下研究工作: ①基于定积分原理, 提出了 p - q 双时间变量这一普遍情况下其所对应的 P - Q 工程定义式, 并分析了其物理意义、误差可控性和问题可解性。②基于渗流理论和黏时变理论, 建立了黏时变渗透注浆的解析模型, 系统地揭示了黏时变渗透注浆复杂过程, 探讨了过程量 $h_g(t)$ 的客观存在性和唯一性。③为克服 P 显式解推导的困难, 基于积分不等式性质和系统的理论推导, 得到了 P 的上、下限通解, 讨论了其科学性和普适性。④结合实际工程需要, 提出了指数黏时变函数下 P 的上、下限特解, 为黏时变渗透注浆设计实践提供了科学依据和方法基础。

1 技术参数 Q 和 P 的工程定义

为充分考虑 p , q 双时间变量这一普遍客观实际, 同时又便于工程设计应用, 取 p 和 q 在各自注浆持续时间 T 内的积分平均值分别定义为该注浆段的 P 与 Q , 即

$$Q = \frac{\int_0^T q(t) dt}{T} \quad (t \in [0, T]) \quad (6)$$

式中: Q 为分段注浆速率 [$L^3 T^{-1}$], 其他符号同前。

$$H_g = \frac{\int_0^T h_g(t) dt}{T} \quad (t \in [0, T]) \quad (7)$$

式中: H_g 为分段注浆压力水头高度 [L], 其他符号同前。

(1) 物理意义

上述工程定义不是单纯数学意义上的平均, 而是具有明确物理意义的: 式(6)表征了单位时间内该段总注浆量, 即该段平均注浆速率; 同样, 式(7)该段注浆压力的平均冲量。同时, 式(6), (7)充分厘清了某注浆段的具体技术参数(P , Q)与相应过程量(p , q)的区别及联系, 且反映在数值上, 后者是确定前者依据的这一逻辑关系。

(2) 误差的可控性

当 T 较小时, 式(6), (7)具有较高精度; 当 T 较大时, 可以根据需要将 T 分为若干个足够小的时间段, 然后分别采用类似如式(6), (7)方式表达。

(3) 问题的可解性

T 和 Q 可以根据总注浆量要求和浆液性质综合确定, 对于 P , 可以通过建立 $H_g(Q, T)$ 关系式来求解 P 。

2 黏时变注浆过程的解析模型

由于 Q 与 H_g 中分别隐含过程量 $q(t)$ 和 $h_g(t)$, 因此, 建立 $H_g(Q, T)$ 的首要工作就是建立 $q(t)$ 和 $h_g(t)$ 之间的关系, 即黏时变渗透注浆过程解析模型。

2.1 黏时变效应对浆液渗透系数的影响

Bear^[17]在 Nutting^[18-19]的工作基础上, 提出了任意流体在多孔介质中的渗透系数表达式, 利用这一思路可以表达浆液在地层中渗透系数, 即

$$K_g(t) = \frac{\rho_g g}{\mu_g(t)} k \quad (t \in [0, T_g]) \quad (8)$$

式中: $K_g(t)$ 为注浆后任意 t 时刻浆液在地层中的渗透系数 [LT^{-1}]; ρ_g 为浆液的密度 [ML^{-3}]; g 为重力加速度 [LT^{-2}]; k 为地层固有渗透率 [L^2]; 其他符号同前。

类似于式(8), 可以得到水在地层中的渗透系数:

$$K = \frac{\rho_w g}{\mu_w} k \quad (9)$$

式中: ρ_w 为水的密度 [ML^{-3}]; 其他符号同前。

由式(8)和(9)消去渗透率 k 这一不易确定的参数, $K_g(t)$ 可以进一步表达为

$$K_g(t) = \frac{\rho_g \mu_w}{\rho_w \mu_g(t)} K \quad (t \in [0, T_g]) \quad (10)$$

2.2 解析模型

(1) 物理方程

考虑单孔一般扩散形式下注浆情况, 顺着浆液流向取一截平面, 如图 1 所示。注浆孔半径为 r_g , 注浆压力为 p_g , 扩散半径为 $R(t)$ (图 1 中简写为“ R ”), 地层中孔隙水压力为 p_0 (相应水头高度为 h_0), 距离注浆孔中心任意距离 r 处 t 时刻的浆液压力为 $p(r, t)$ (图 1 中简写为“ p ”, 相应水头高度为 $h(r, t)$)。

根据 Darcy 定律, 可以得到注浆过程中任意断面的流量与压力水头的关系, 即黏时变渗透注浆过程的物理方程:

$$q(t) = K_g(t) \left(-\frac{\partial h(r, t)}{\partial r} \right) A(r) \quad (t \in [0, T]) \quad (11)$$

式中: $h(r, t)$ 为注浆扩散半径内任意位置 r 任意时刻 t 的浆液压力 $p(r, t)$ 对应的水头高度 [L], 其他符号同前。

将式(10)代入式(11), 可以进一步得到

$$q(t) = \frac{\mu_w K}{\mu_g(t)} \left(-\frac{\partial h(r, t)}{\partial r} \right) A(r) \quad (t \in [0, T]) \quad (12)$$

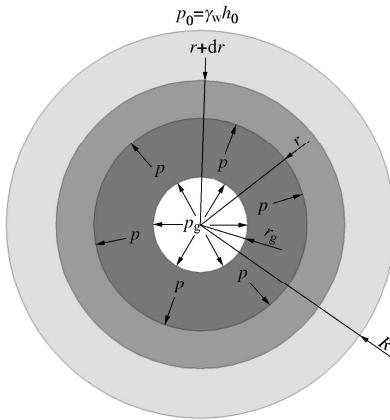


图1 单孔注浆浆液流向截面示意图

Fig. 1 Section of flow direction of slurry under single hole-grouting

(2) 几何方程

根据任意时刻 t 注入的浆液量和地层中填充的浆液量相等的原则, 结合多孔介质流体力学中有效孔隙率的概念^[17], 可以得到如下浆液扩散几何方程, 即

$$\int_0^t q(t) dt = \int_{r_g}^{R(t)} A(r) dr \cdot n_e \quad (13)$$

式中: n_e 为地层的有效孔隙率, 即能与外界发生流体交换且内部互连通的那部分孔隙体积与地层总体积之比; 其他符号同前。

(3) 边界条件

根据当前注浆技术领域普遍认识^[4], 注浆扩散半径处的浆液压力为零, 即等于该处的地下水水头, 可以得到渗流边界条件, 即

$$h|_{r=R(t)} = h_0 \quad (14)$$

从式(14)可以看出, 黏时变渗透注浆的渗流边界为随时间 t 而发生位置变化的动边界。

式(12)~(14)综合反映了 $h(r, t)$, $q(t)$, $u_g(t)$ 和 $R(t)$ 4个时间变量之间的相互制约关系, 系统地揭示了黏时变渗透注浆复杂的过程。

2.3 模型解 $h_g(t)$ 的存在性和唯一性

联立方程(12)和(14), 并利用分离变量法, 可得到地层中浆液压力表达式, 即

$$h(r, t) = \frac{q(t) \mu_g(t)}{\mu_w K} \int_r^{R(t)} \frac{dr}{A(r)} + h_0 \quad (t \in [0, T]) \quad (15)$$

令式(15)中 $r=r_g$, 可以得到模型的解:

$$h_g(t) = \frac{q(t) \mu_g(t)}{\mu_w K} \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)} + h_0 \quad (t \in [0, T]) \quad (16)$$

式中: $h_g(t)$ 为任意时刻注浆压力水头[L]; 其他符号同前。

当 $q(t)$ 和 $\mu_g(t)$ 这两个时间变量已知的条件下, 理论上可由式(13)和式(16)两个方程唯一确定注浆压力时间函数 $h_g(t)$, 同时并行得到扩散半径时间函数 $R(t)$ 。

3 P 的上、下限通解

鉴于 $h_g(t)$ 解的存在性和唯一性, 理论上可以由此联立式(6), (7)唯一确定关系式 $H_g(Q, T)$ 。但由于 $h_g(t)$ 表达式(16)右边除了 $q(t)$ 这个时间变量外, 还隐含另一个时间变量 $\mu_g(t)$, 根据分部积分原理, $H_g(Q, T)$ 很难像 $h_g(q(t), t)$ 那样显式表述出来。为克服这一推导上的困难, 充分利用积分不等式相关性质(详见附录A), 进行 H_g 的上、下限解研究。

3.1 下限解 H_{g1}

对式(16)进行变形, 得到

$$\frac{h_g(t) - h_0}{\mu_g(t)} = \frac{q(t)}{\mu_w K} \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)} \quad (t \in [0, T]) \quad (17)$$

对式(17)两边同时在 $[0, T]$ 上做定积分后除以 T , 得到

$$\frac{\int_0^T [h_g(t) - h_0] dt}{T} = \frac{\int_0^T \frac{q(t)}{\mu_w K} \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)} dt}{T} \quad (t \in [0, T]) \quad (18)$$

由式(2)知, $\mu_g(t)$ 是 t 的增函数, 因此 $1/\mu_g(t)$ 是 t 的减函数, 由式(3a)知, $h_g(t)$ 是 t 的增函数。因此式(18)左端为单调性相反的两个同域函数积的平均值, 根据“单调性相反的两个函数积的平均值不大于二者平均值的积”这一积分不等式性质(证明过程详见附录A), 并经过整理, 可以得到

$$\frac{\int_0^T [h_g(t) - h_0] dt}{T} \leq \frac{\int_0^T [h_g(t) - h_0] dt \int_0^T \frac{dt}{\mu_g(t)}}{T^2} \quad (19)$$

式中: “=”仅当 $h_g'(t) \equiv 0$ 时成立。

将式(7)代入式(19), 并联立式(18), 经过整理, 得到如下不等式, 即

$$H_g \geq \frac{T}{K} \frac{\int_0^T \frac{\mu_w}{\mu_g(t)} dt}{\int_0^T \frac{q(t)}{T} \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)} dt + h_0} \quad (20)$$

式中: “=”仅当 $h_g'(t) \equiv 0$ 时成立。

显然, 式(20)的右端为 $h_g'(t) \equiv 0$ (即恒压注浆)下成立的 H_g 下限解, 为方便后续讨论, 利用分部积分原理, 并结合几何方程式(13), 对式(20)右端做进一步简化表达, 即

$$H_{g1} = \frac{1}{K} [F_1(T) - G_1(T)] + h_0 \quad (t \in [0, T]) \quad (21)$$

其中:

$$F_1(Q, T) = \alpha_1 Q \int_{r_g}^{R(T)} \frac{dr}{A(r)} \quad ,$$

$$G_1(Q, T) = \frac{\alpha_1 n_e}{T} \int_0^T \left[\int_{r_g}^{R(t)} A(r) dr \right] \frac{R'(t)}{A[R(t)]} dt \quad ,$$

$$\alpha_1 = \frac{T}{\int_0^T \frac{\mu_w}{\mu_g(t)} dt} \quad .$$

式中: H_{g1} 为 H_g 的下限解, 在恒压注浆条件下成立[L]; $F_1(Q, T)$ 为恒压注浆下定边界影响因子 [$L^2 T^{-1}$]; $G_1(Q, T)$ 为恒压注浆条件下动边界影响因子 [$L^2 T^{-1}$]; α_1 为恒压注浆条件下的黏时变影响系数, 无量纲量; 其他符号同前。

3.2 上限解 H_{g2}

对式 (17) 两边同时在 $[0, T]$ 上做定积分后除以 T , 得到

$$\frac{\int_0^T h_g(t) dt}{T} = \frac{\int_0^T q(t) \mu_g(t) \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)} dt}{\mu_w K T} + h_0$$

$$t \in [0, T] \quad . \quad (22)$$

由式 (3b) 知, $q(t)$ 是 t 的减函数, 由式 (2) 知 $\mu_g(t)$ 是 t 的增函数, 而 $\int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)}$ 是 t 的增函数, 因此式 (22)

$$\text{右端第一项中的 } \frac{\int_0^T q(t) [\mu_g(t) \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)}] dt}{T} \text{ 为单调性相}$$

反的两个函数积的平均值, 根据类似于式 (19) 的方法, 可以得到如下积分不等式, 即

$$\frac{\int_0^T q(t) [\mu_g(t) \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)}] dt}{T} \leq \frac{\int_0^T q(t) dt \int_0^T [\mu_g(t) \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)}] dt}{T^2} \quad . \quad (23)$$

式中: “=”仅当 $h'_g(t) \equiv 0$ 时成立, “=”仅当 $q'(t) \equiv 0$ 时成立。

将式 (22) 代入式 (23) 中, 并联立式 (6), (7), 经过整理, 得到

$$H_g \leq \frac{Q}{\mu_w K T} \int_0^T [\mu_g(t) \int_{r_g}^{R(t)} \frac{dr}{A(r)}] dt + h_0$$

$$t \in [0, T] \quad . \quad (24)$$

式中: “=”仅当 $q'(t) \equiv 0$ 时成立。

显然, 式 (24) 右端为 $q'(t) \equiv 0$ 条件下 (即恒速注浆) H_g 的上限解, 为方便后续讨论, 对式 (24) 右端做进一步简化表达, 即

$$H_{g2} = \frac{1}{K} [F_2(T) - G_2(T)] + h_0 \quad , \quad (25)$$

$$\text{其中, } F_2(Q, T) = \alpha_2 Q \int_{r_g}^{R(T)} \frac{dr}{A(r)} \quad ,$$

$$G_2(Q, T) = \frac{Q}{\mu_w T} \int_0^T [\int_0^t \mu_g(t) dt] \frac{R'(t) dt}{A[R(t)]} \quad ,$$

$$\alpha_2 = \frac{\int_0^T \frac{\mu_g(t)}{\mu_w} dt}{T} \quad .$$

式中: H_{g2} 为 H_g 的上限解, 在恒速注浆条件下成立[L]; α_2 为恒速注浆条件下黏时变影响系数, 无量纲量; $F_2(Q, T)$ 为恒速注浆下定边界影响因子 [$L^2 T^{-1}$]; $G_2(Q, T)$ 为恒速注浆条件下动边界影响因子 [$L^2 T^{-1}$]; 其他符号同前。

上述下限解 H_{g1} 和上限解 H_{g2} 的推导分别基于恒压和恒速的各种理想假设条件, 而实际注浆中压力 p 和速率 q 是同时变化的, 因此下限解 H_{g1} 和上限解 H_{g2} 主要工程意义是为满足一定 Q 和 T 所需要 H_g 的最小值与最大值。

3.3 关于解的讨论

式 (21), (25) 在推导过程中出于数学表达的便利, 引入了定边界影响因子和动边界影响因子。下面从二者表达式上, 进一步分析各自物理意义。

(1) 定边界影响因子

定边界影响因子未含扩散半径的时间变化过程量 $R(t)$, 而仅含有最终的扩散半径 $R(T)$ (参见 $F_1(Q, T)$ 和 $F_2(Q, T)$ 的表达式)。相当于注浆过程中地层中浆液压力边界自始至终都在 $R(T)$ 的位置, 这与含水层中注水过程中的水力传导边界位置类似^[19]。但实际上, 浆液扩散范围 $R(t)$ 以外是不存在浆液压力的 (式 (14)), 因此在 $R(T)$ 域上并非任意时刻注浆压力传导都是连续过程, 若整个 T 内统一用定边界 $R(T)$ 来计算分段注浆压力上、下限解, 显然均是偏大的。

(2) 动边界影响因子

动边界影响因子含有扩散半径的时间变化过程量 $R(t)$ (参见 $G_1(Q, T)$ 和 $G_2(Q, T)$ 表达式), 反映了注浆过程中由于浆液扩散过程而对定边界下的分段注浆压力的一种“消散作用”。相同条件下 $R'(t)$ 越大, $G_1(Q, T)$ 和 $G_2(Q, T)$ 也越大, 反映了浆液扩散速率越大, 对分段注浆压力消散作用越明显。

(3) 关于 $R'(t)=0$ 的一个特例

假设如下一个极端的特例, 即

$$R'(t) = 0 \quad (t \in [0, 7]) \quad . \quad (26)$$

则很容易得到上、下限解分别蜕化为如下两个表达式, 即

$$H_{g1}^* = \frac{\alpha_1}{K} \int_{r_g}^{R(T)} \frac{dr}{A(r)} + h_0 \quad (t \in [0, T]) \quad , \quad (27)$$

$$H_{g2}^* = \frac{\alpha_2}{K} \int_{r_g}^{R(T)} \frac{dr}{A(r)} + h_0 \quad (t \in [0, T]) \quad . \quad (28)$$

对比既有黏时变研究成果, 容易发现, 在数学形式上, 下限解 H_{g1}^* 与黏时变函数调和平均值法 (式 (5)) 完全一致^[11-13], 而上限解 H_{g2}^* 与黏时变函数平均值法 (式 (4)) 完全一致^[8-10]。因此, 既有研究成果可以

分别理解为上、下限通解忽略各自动边界影响因子下的一种近似简化形式。但式(26)仅仅是一种纯数学上假设, 而缺乏足够的科学依据和工程背景。因此, 在进行一般情况下 P 的上、下限解分析时, 需要同时考虑上述两类边界影响因子。

4 指数黏时变函数下的上、下限特解

在前述通解基础上, 针对目前常用的指数黏时变函数条件下的特解做进一步研究。

根据 Honma 等^[5]研究成果, 指数黏时变函数可表达为

$$\mu_g(t) = \mu_{g0} \cdot e^{at} \quad (t \in [0, T]) \quad (29)$$

式中: a 为凝胶常数 [T^{-1}], 反映浆液黏滞系数随注浆时间 t 变化的快慢程度。

根据式(29), 结合式(21), (25), 可以得到指数黏时变函数下的恒压、恒速两种条件下黏时变影响系数, 即

$$\alpha_1^e = \frac{\mu_{g0} a T \exp(aT)}{\mu_w [\exp(aT) - 1]} \quad (30a)$$

$$\alpha_2^e = \frac{\mu_{g0}}{\mu_w a T} [\exp(aT) - 1] \quad (30b)$$

式中: α_1^e 为指数黏时变函数下恒压注浆黏时变影响系数; α_2^e 为指数黏时变函数下恒速注浆黏时变影响系数; 其他符号同前。

以式(30)所示的两类指数函数黏时变影响系数为基础, 根据前述上下限通解研究成果, 结合式(1), 进行进一步推导, 得到球面扩散和柱面扩散这两个常见浆液扩散模式下的下、上限特解如表1和表2。

表1 球面扩散模式下 P 的上、下限特解

Table 1 Special limit solution of P under spherical diffusion mode

解的类型	解的表达式	符号说明
下限解	$H_{g1}^s = \frac{\mu_{g0} a T \exp(aT)}{\mu_w [\exp(aT) - 1] K}$	$R^s(T) = \sqrt[3]{\frac{Q T}{4 \pi n_e} + r_g^3}$
	$\left\{ \frac{Q}{4 \pi} \left[\frac{1}{r_g} - \frac{1}{R^s(T)} \right] - \frac{n_e [R^s(T) - r_g]^2 [R^s(T) + 2r_g]}{6 R^s(T) T} \right\} + h_0$	
上限解	$H_{g2}^s = \frac{\mu_{g0} Q}{4 \pi \mu_w T K}$	$\bar{R}^s(t) = \sqrt[3]{\frac{Q t}{4 \pi n_e} + r_g^3}$
	$\left\{ \frac{[\exp(aT) - 1]}{a r_g} - \int_0^T \frac{\exp(at)}{\bar{R}^s(t)} dt \right\}$	

表2 柱状扩散模式下 P 的上、下限特解

Table 2 Special limit solution of P under cylindrical diffusion mode

解的类型	解的表达式	符号说明
下限解	$H_{g1}^c = \frac{\mu_{g0} a T \exp(aT)}{2 \mu_w K [\exp(aT) - 1]} \left\{ \left(\frac{Q}{\pi L} + \frac{n_e}{T} r_g^2 \right) \right. \quad R^c(T) = \sqrt{\frac{Q T}{\pi L n_e} + r_g^2}$ $\left. \ln \frac{R^c(T)}{r_g} - \frac{n_e}{2T} [R^c(T)^2 - r_g^2] \right\}$	
上限解	$H_{g2}^c = \frac{\mu_{g0} Q}{2 \pi K L \mu_w T} \left[\int_0^T \exp(at) \ln \bar{R}^c(t) dt - \frac{\exp(aT) - 1}{a} \ln r_g \right] \quad \bar{R}^c(t) = \sqrt{\frac{Q t}{\pi L n_e} + r_g^2}$	

上述两类扩散模式的特解表明, 下限解均为显式解, 工程应用比较便利; 而上限解略为复杂, 主要是均含有特殊积分, 但可以借助数值积分手段予以实现。

5 结论

浆液的黏时变效应对渗透注浆有重要影响, 传统的注浆理论没有考虑到这一点, 用于设计中在注浆压力分析存在较大误差。而目前黏时变注浆理论更多的是一种半经验数学处理, 缺乏足够的科学内涵和工程验证。基于系统理论研究, 得到以下4点结论。

(1) 基于定积分原理的 P - Q 工程定义从概念上厘清了注浆设计中的具体技术参数值与注浆施工过程量 p - q 之间的区别与联系, 同时具有较好的误差可控性和问题可解性。

(2) 黏时变渗透注浆解析模型系统揭示了 $h(r, t)$ 、 $q(t)$ 、 $u_g(t)$ 和 $R(t)$ 等4个时间变量之间的相互制约关系, 较全面而精确地描述了黏时变渗透注浆复杂的过程, 形成了黏时变注浆理论研究的重要基础。

(3) 基于 P - Q 工程定义、渗透注浆过程的解析模型和积分不等式等科学理论方法的严格推导, 得到了一般黏时变渗透注浆条件下的分段注浆压力 P 的下限通解(恒压条件下)与上限通解(恒速条件下)这一普遍意义成果, 解的讨论进一步说明了其科学性与普适性。

(4) 指数黏时变函数下的分段注浆压力的上、下限特解表达式较为简单实用, 为该类型浆液黏时变函数下渗透注浆工程实践提供了科学依据和技术支撑。

参考文献:

- [1] 彭峰, 刘广均. 狮子洋隧道下穿珠江大堤注浆加固技术研究[J]. 铁道工程学报, 2010, 27(7): 55-59. (PENG Feng, LIU Guangjun. Research on sleeve-valve-pipe grouting

- technology for reinforcing the Pearl River Dam underpassed by shiziyang tunnel[J]. Journal of Railway Engineering Society, 2010, **27**(7): 55-59. (in Chinese))
- [2] 李 辉, 于少辉, 杨朝帅, 等. 富水砂质围岩超前预加固大断面隧道施工变形分析[J]. 现代隧道技术, 2013, **50**(4): 128-137. (LI Hui, YU Shaohui, YANG Chaoshuai, et al. Analysis of the deformation induced by the advance pre-reinforcement construction of a large cross-section tunnel in water-rich sandy rock[J]. Modern Tunnelling Technology, 2013, **50**(4): 128-137. (in Chinese))
- [3] 孙连勇, 黄永亮, 尹长凤, 等. 富水砂层浅埋地铁隧道深孔注浆扰动机理研究[J]. 现代隧道技术, 2018, **55**(1): 184-193. (SUN Lianyong, HUANG Yongliang, YIN Changfeng, et al. Disturbance mechanism of deep-hole grouting for shallow metro tunnels in water-rich sand layers[J]. Modern Tunnelling Technology, 2018, **55**(1): 184-193. (in Chinese))
- [4] 邝健政, 翁月稳, 王 杰, 等. 岩土注浆理论与工程实例 [M]. 北京: 科学出版社, 2001. (KUANG Jianzheng, ZAN Yuwen, WANG Jie, et al. Geotechnical Grouting Theory and Engineering Examples[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))
- [5] HONMA S. A mathematical Model for the Analysis on the Injection and Distribution of Chemical Grout in Soil[R]. Tokai :Tokai University, 1986
- [6] 李术才, 韩伟伟, 张庆松, 等. 地下工程动水注浆速凝浆液黏度时变特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **32**(1): 1-7. (LI Shucai, HAN Weiwei, ZHANG Qingsong, et al. Research on time-dependent behavior of viscosity of fast curing grouts in underground construction grouting[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(1): 1-7. (in Chinese))
- [7] 李术才, 刘人太, 张庆松, 等. 基于黏度时变性的水泥-玻璃浆液扩散机制研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, **32**(12): 2415-2421. (LI Shucai, LIU Rentai, ZHANG Qingsong, et al. Research on c-s slurry diffusion mechanism with time-dependent behavior of viscosity[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, **32**(12): 2415-2421. (in Chinese))
- [8] 郑大为, 张 彬, 王笑冰. 黏度渐变型浆液渗透注浆灌注均匀砂层计算方法的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(增刊 1): 5086-5089. (ZHENG Dawei, ZHANG Bin, WANG Xiaobing. A study on calculation method of penetration theory for conforming sand layer[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, **24**(S1): 5086-5089. (in Chinese))
- [9] 刘 健, 张载松, 韩 烨, 等. 考虑黏度时变性的水泥浆液盾构壁后注浆扩散规律及管片压力模型的试验研究[J]. 岩土力学, 2015, **36**(2): 361-368. (LIU Jian, ZHANG Zaisong, HAN Ye, et al. Backfilled grouting diffusion law and model of pressure on segments of shield tunnel considering viscosity variation of cement grout[J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, **36**(2): 361-368. (in Chinese))
- [10] 雷进生, 刘 非, 彭 刚, 等. 考虑参数动态变化和相互关联的浆液扩散范围研究[J]. 长江科学院院报, 2016, **33**(2): 57-61. (LEI Jinsheng, LIU Fei, PENG Gang, et al. Diffusion range of grout in consideration of dynamic change and correlation of parameters[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2016, **33**(2): 57-61. (in Chinese))
- [11] 周军霞, 陆劲松, 张 玉, 等. 考虑浆液黏时变性渗透注浆理论计算公式[J]. 材料科学与工程学报, 2019, **37**(5): 758-762. (ZHOU Junxia, LU Jinsong, ZHANG Yu, et al. Calculation formula of permeation grouting considering slurry viscosity variation[J]. Journal of Materials Science and Engineering, 2019, **37**(5): 758-762. (in Chinese))
- [12] 叶 飞, 荀长飞, 刘燕鹏, 等. 盾构隧道壁后注浆浆液时变半球面扩散模型[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2012, **40**(12): 1789-1794. (YE Fei, GOU Changfei, LIU Yanpeng, et al. Half-spherical surface diffusion model of shield tunnel back-filled grouts[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2012, **40**(12): 1789-1794. (in Chinese))
- [13] 寇 磊, 徐建国, 王 博. 考虑有效孔隙比影响的饱和黏性土中注浆渗透机理[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 83-91. (KOU Lei, XU Jianguo, WANG Bo. Research on grouting infiltration mechanism for time-dependent viscous slurry considering effective void ratios in saturated clay[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2018, **39**(1): 83-91. (in Chinese))
- [14] 张民庆, 彭 峰. 地下工程注浆技术[M]. 北京: 地质出版社, 2008. (ZHANG Minqing, PENG Feng. Grouting Technology for Underground Engineering[M]. Beijing: Geological Publishing House, 2008. (in Chinese))
- [15] 张连震, 张庆松, 刘人太, 等. 考虑浆液黏度时空变化的速凝浆液渗透注浆扩散机制研究[J]. 岩土力学, 2017, **38**(2): 443-452. (ZHANG Lianzhen, ZHANG Qingsong, LIU Rentai, et al. Penetration grouting mechanism of quick setting slurry considering spatiotemporal variation of viscosity[J].

- Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(2): 443-452. (in Chinese))
- [16] 邓弘扬, 汪在芹, 魏涛. 基于 CW 环氧浆液流变性的注浆扩散理论研究[J]. 长江科学院院报, 2016, 33(5): 121-124, 134. (DENG Hongyang, WANG Zaiqin, WEI Tao. Grout diffusion theory based on CW epoxy grout's time-varying characteristics of viscosity[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2016, 33(5): 121-124, 134. (in Chinese))
- [17] BEAR J. Dynamics of Fluids in Porous Media[M]. New York: American Elsevier Pub. Co, 1972.
- [18] NUTTING P G. The movements of fluids in porous solids[J]. Journal of the Franklin Institute, 1927, 203(2): 313-324.
- [19] NUTTING P G. Physical analysis of oil sands[J]. AAPG Bulletin, 1930, 14:1337-1349.

附录 A 单调性相反的两个同域函数积分不等式性质及其证明

积分不等式性质: 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上二阶连续可导, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的单调性相反, 则该两个函数在 $[a, b]$ 上积的平均值不大于二者的平均值的积, 即

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{b-a} \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \cdot \frac{\int_a^b g(t)dt}{b-a}$$

"="当且仅当 $f'(t) \equiv 0$ 或 $g'(t) \equiv 0$ 时成立。 (A)

证明: 构造函数

$$F(x) = (x-a) \int_a^x f(t)g(t)dt - \int_a^x f(t)dt \int_a^x g(t)dt \quad x \in [a, b] \quad , \quad (A-1)$$

对式(A-1)两边对 x 求导数, 即

$$F'(x) = (x-a) \cdot f(x)g(x) + \int_a^x f(t)g(t)dt - f(x) \int_a^x g(t)dt - g(x) \int_a^x f(t)dt \quad . \quad (A-2)$$

对式(A-2)两边继续对 x 求导数并经过整理, 可以得到函数 $F(x)$ 的二阶导数, 即

$$F''(x) = f'(x)[g(x)(x-a) - \int_a^x g(t)dt] + g'(x)[(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt] \quad . \quad (A-3)$$

根据已知条件 $f(t)$ 与 $g(t)$ 单调性相异, 考虑问题对称性和方便讨论, 不妨令

$$f'(t) \geq 0 \quad , \quad (A-4a)$$

$$g'(t) \leq 0 \quad . \quad (A-4b)$$

由式(A-4b)知, $g(t)$ 为时间变量 t 单调减函数, 根据积分中值定理, 则有

$$g(x)(x-a) - \int_a^x g(t)dt \leq 0$$

"="当且仅当 $g'(t) \equiv 0$ 时成立。 (A-5)

121-124, 134. (in Chinese))

[17] BEAR J. Dynamics of Fluids in Porous Media[M]. New York:

American Elsevier Pub. Co, 1972.

[18] NUTTING P G. The movements of fluids in porous solids[J].

Journal of the Franklin Institute, 1927, 203(2): 313-324.

[19] NUTTING P G. Physical analysis of oil sands[J]. AAPG

Bulletin, 1930, 14:1337-1349.

将式(A-5)和式(A-4a)相乘, 可以得到式(A-3)右端第一项非正, 即

$$f'(x)[g(x)(x-a) - \int_a^x g(t)dt] \leq 0$$

"="当且仅当 $f'(t) \equiv 0$ 或 $g'(t) \equiv 0$ 时成立。 (A-6)

由式(A-4a)知, $f(t)$ 为时间变量 t 单调增函数, 根据积分中值定理, 则有

$$(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt \geq 0$$

"="当且仅当 $f'(t) \equiv 0$ 时成立。 (A-7)

由式(A-7)与式(A-4b)相乘, 得到式(A-3)右端第二项非正, 即

$$g'(x)[(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt] \leq 0$$

"="当且仅当 $f'(t) \equiv 0$ 或 $g'(t) \equiv 0$ 时成立。 (A-8)

由式(A-6)与式(A-8)相加, 可以得到式(A-3)非正, 即

$$F''(x) \leq 0 \quad "=\text{当且仅当 } f'(t) \equiv 0 \text{ 或 } g'(t) \equiv 0 \text{ 时成立。} \quad (A-9)$$

由式(A-9)并根据二阶导数的定义可知, $F'(x)$ 为变量 x 的单调减函数, 则有

$$F'(x) \leq F'(a) = 0$$

"≤"中的"="当且仅当 $f'(t) \equiv 0$ 或 $g'(t) \equiv 0$ 时成立。 (A-10)

由式(A-10)并根据一阶导数性质可知, $F(x)$ 为变量 x 的单调减函数, 则有

$$F(x) \leq F(a) = 0$$

"≤"中的"="当且仅当 $f'(t) \equiv 0$ 或 $g'(t) \equiv 0$ 时成立。 (A-11)

联立式(A-11)和式(A-1), 并令 $x=b$, 通过整理可以得到下式:

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{b-a} \leq \frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a} \cdot \frac{\int_a^b g(t)dt}{b-a}$$

"="当且仅当 $f'(t) \equiv 0$ 或 $g'(t) \equiv 0$ 时成立。 (A-12)

式(A)得证。