

DOI: 10.11779/CJGE202205008

改进屈服面和旋转硬化准则的各向异性黏土弹塑性模型

李梦姿^{1,2}, 蔡国庆^{*1,2}, 赵成刚²

(1. 北京交通大学城市地下工程教育部重点实验室, 北京 100044; 2. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044)

摘要: 基于临界状态理论和旋转硬化法则提出了改进的各向异性模型。首先从恒定应力比加载试验结果出发, 采用对数型插值函数描述土体的变形特性, 通过增加参数 n , 推导出可以呈现多种形状的各向异性土屈服面表达式。屈服面在 $n>1$, $n<1$ 和 $n=1$ 时分别呈现泪滴形、子弹头形和椭圆形。然后提出了恒定应力比加载时旋转硬化法则边界值表达式, 在各向同性和临界状态下, 该表达式的值最终为 0。该模型在 $n=1$ 且不考虑屈服面旋转时, 可以退化为经典的修正剑桥模型。最后运用显示积分算法实现模型的数值化, 并采用恒定应力比加载试验、变换应力路径试验、排水三轴压缩试验、不排水三轴压缩试验和不排水三轴伸长试验对模型进行验证。结果表明, 所提出的各向异性模型能较准确地描述黏性土在一系列应力路径下的体积变形特性、剪切特性和强度特性。

关键词: 各向异性; 屈服面; 临界状态; 本构模型

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2022)05-0851-10

作者简介: 李梦姿(1992—), 女, 博士研究生, 主要从事非饱和土力学相关研究。E-mail: mzli118@163.com。

Anisotropic elastoplastic model for clays with improved yield surfaces and rotational hardening rule

LI Meng-zi^{1,2}, CAI Guo-qing^{1,2}, ZHAO Cheng-gang²

(1. Key Laboratory of Urban Underground Engineering of Ministry of Education, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: A new anisotropic constitutive model is proposed based on the critical state theory and the rotational hardening rule. Firstly, an expression for yield surfaces is developed by employing the non-linear logarithmic function capable of describing volumetric deformation characteristics of anisotropic soils in a wide variety based on the results of the constant stress ratio loading tests. The shape of yield surfaces can be controlled by the introduced parameter n . The yield surface is elliptical for $n=1$, bullet for $n<1$ and teardrop for $n>1$. Then, the expression for the boundary value with rotational hardening rule under the virgin constant stress ratio loading is proposed. Under isotropic loading and critical conditions, the value of the expression reaches zero eventually. The model can be degenerated to the modified Cam-clay (MCC) when $n=1$ and the rotation of the yield surface is not considered. Finally, the explicit modified Euler method with automatic error control is used to numeralize the model, and the model is verified by the constant stress ratio loading tests, variable stress path tests, drained triaxial compression tests, undrained triaxial compression tests and undrained triaxial extension tests. The results show that the proposed anisotropic constitutive model can accurately describe the volume deformation, shear and strength characteristics of clays under a series of stress paths.

Key words: anisotropy; yield surface; critical state; constitutive model

0 引言

在不同应力、排水条件和边界条件等因素的影响下, 土体颗粒、孔隙或组构的排列在不同方向上有明显差异, 天然土和重塑土表现出一定程度的各向异性(初始各向异性)。在加载或变形过程中, 土体的组构随着塑性变形而发生改变, 从而产生新的各向异性(诱导各向异性)。土体的各向异性微观表现为颗粒排列和孔隙结构的不同^[1-2]。宏观表现为土体的力学性质取决于

应力张量和应变张量的方向; 屈服面的主方向偏离应力主轴方向; 屈服面的形状随各向性的变化而变化^[3]。倾斜屈服面和旋转硬化法则可以统一描述重塑土的初始各向异性和诱导各向异性。

基金项目: 中央高校基本科研业务费项目(2021CZ109, 2021JBM111, 2020YJS105); 国家自然科学基金项目(U2034204, 52078031); 中建股份科技研发计划(CSCEC-2019-Z-09)

收稿日期: 2021-05-25

*通信作者(E-mail: guoqing.cai@bjtu.edu.cn)

在临界状态理论框架下, 采用类似于剑桥模型的推导方式, 通过假定塑性剪切应变和塑性体积应变耦合的功耗散方程和相关联流动法则, 得到各向异性模型屈服面和塑性势面表达式^[4], 能够较好地描述屈服面主方向对应力主轴的偏离。许多各向异性模型^[5-7]采用该表达式为各向异性模型的屈服面。但该式对屈服面的描述不准确, 运用该式计算的不排水三轴试验的应力路径和预测的水平位移也不准确^[3]。这可能是由于各向异性土屈服面表现出不同的形状。在各向同性模型中, 许多学者采用了不同形态的屈服面^[8-10]。例如, 剑桥模型的子弹型、修正剑桥模型的椭圆形以及 Chen 等^[10]提出的其他形状。Lagioia 等^[11]基于剪胀和应力比之间的数学关系, 提出了一个适用于各向同性土通用的屈服和塑性势面表达式, 该表达式可以描述多种形状的屈服面。这些模型, 未考虑到组构对屈服面形状的影响。因此可以尝试发展一个形式相对灵活、屈服轨迹形状可以变换的各向异性土屈服面表达式, 以实现模型预测功能的改进。

土体是由不规则的土颗粒组成的散粒体结构, 在应力作用下表现出各向异性的演化特性。在持续应力作用下, 土颗粒通过滑动或滚动调节其排列形式, 形成新的各向异性结构以适应应力的变化。这也是各向异性模型建模的核心问题。在目前提出的各种旋转硬化法则中, 主要区别在于对不同加载路径土体组构达到的平衡状态的定义。Newson 等^[12]和 Pestana 等^[6]假设在平衡状态时, 各向异性土的屈服面倾角与施加的恒定应力比加载路径一致。Dafalias 等^[13]认为屈服面倾斜程度与恒定应力比加载路径偏离静水压力轴的程度成正比, 比例系数为小于 1 的常数。Wheeler 等^[3]、Dafalias 等^[14]则发现, 在应力作用下土体各向异性达到平衡状态时, 采用非线性描述屈服面倾角与施加的恒定应力比关系时, 本构模型的预测效果更好。

以上模型在土体达到临界状态失稳破坏时对土体组构的描述也存在很大的争议。理论上, 对临界状态的试样进行不同应力路径的卸载再加载试验, 可以测得临界状态土体的屈服面和流动法则。但由于对试样临界状态的预估和保持非常困难, 难以通过试验手段实现试样临界状态特性的测量。Wheeler 等^[3]、Yang 等^[15]和 Li 等^[16]假设在临界状态下土体达到恒定的各向异性组构; Dafalias 等^[14]推测临界状态下各向异性或各向同性组构存在的可能性; Zhao 等^[17]和 Fu 等^[18]采用离散元数值方法对临界状态条件下的土体组构进行研究。然而, 这些研究并未得出一致的结论。

在描述各向异性土体变形时, 运用单一形式的屈服面和塑性势面预测的三轴不排水试验的应力路径不准确^[19], 许多模型通过采用非关联流法则^[7, 13, 15]实现

了对模型预测结果的改进。但是由于增加了需要标定的塑性势面参数, 使模型比较复杂。可以选择合适屈服面形态来避免使用非相关联流动法则, 发展简单的各向异性模型。

基于以上论述, 在假定相关联流动法则的前提下, 本文通过引入参数 n , 建立了一个可以描述屈服面形态变化的率无关各向异性模型。在该模型中, 假定当剪切变形达到临界状态时, 土的各向异性变量为 0, 即临界状态时, 屈服面会旋转至与静水压力轴同轴, 并保持不变。该模型在 $n=1$ 且不考虑屈服面旋转时, 可以退化为经典的修正剑桥模型。运用显示积分算法实现模型的数值化并通过模型预测结果与恒定应力比加载试验、变换应力路径试验、排水三轴压缩试验、不排水三轴压缩试验和不排水三轴伸长试验的试验结果对比, 验证模型的准确性。

1 各向异性模型

1.1 通用的各向异性土屈服面表达式

(1) 恒定应力比固结阶段, 各向异性土的压缩特性

恒定应力比固结即在固结过程中等比例增加平均有效应力 p' 和偏应力 q 到目标围压, 并保持 $\eta=q/p'$ ($K=\sigma'_3/\sigma'_1=(3-\eta)/(2\eta+3)$) 不变, 其中, σ'_1 , σ'_2 和 σ'_3 为有效应力分量。在恒定应力比固结路径下, 可以产生稳定的初始各向异性组构。试验结果表明, 如图 3 (c), 在比体积-平均有效应力半对数 $v - \ln p'$ 空间, 恒定应力比固结的土体变形行为可以通过一组与正常固结线斜率相同, 近似平行的压缩曲线簇表示^[14], 其斜率与应力比大小无关, 仅截距受应力比影响。因此可假设各向异性土在恒定应力比固结作用下的比体积 ($v=1+e$, e 为孔隙比) 变化量为

$$de = dv = -\lambda d(\ln p') \quad , \quad (1)$$

式中, λ 为土的压缩指数, 通过压缩曲线的斜率获得。

(2) 恒定应力比固结后, 保持 p' 不变的排水剪切阶段, 各向异性土的体积变形特性

对于正常固结土或弱超固结土, 土体只发生剪切体缩。在平均净应力 p' 相同时, 恒定应力比 $\eta=\alpha$ 固结结束时, 土体的孔隙比 e_α 最大; 各向异性土剪切到临界状态时, 保持体应变不变, 设临界状态时土体的孔隙比为 e_M , 其值最小。因此等平均有效应力剪切过程中土体的孔隙比可采用插值形式表示为

$$e = e_\alpha - (e_\alpha - e_M)\psi \quad , \quad (2)$$

式中, ψ 为关于 η 和 α 的函数, 且满足 $0 \leq \psi \leq 1$, 即当 $\eta=\alpha$ 时, $\psi=0$; 当 $\eta=M$ 时, $\psi=1$ 。在修正剑桥模型中, $\psi=\ln(1+\eta^2/M^2)/\ln 2$; 在 Ohno 等^[20]给出的各向同性土本构模型中, $\psi=\ln(1+\eta^n/M^n)/\ln 2$, 实质上是采用

了对数型插值函数描述剪胀方程, 使各向同性模型可以适应多种形态的屈服面, 且当 $n=2$ 时可退化为修正剑桥模型; 在 Dafalias^[4]给出的各向异性土的屈服面中, $\psi=\ln[1+(\eta-\alpha)^2/(M^2-\alpha^2)]/\ln[1+(M-\alpha)/(M+\alpha)]$ 。对于各向异性土, 可假设

$$\psi=\ln\left(1+\frac{((\eta-\alpha)^2)^n}{(M+\alpha)^n(M-\alpha)^n}\right)/\ln\left(1+\frac{(M-\alpha)^n}{(M+\alpha)^n}\right), \quad (3)$$

式中, M 为临界状态应力比, n 为控制屈服面形状的参数。当 $n=1$ 时, $\psi=\ln[1+(\eta-\alpha)^2/(M^2-\alpha^2)]/\ln[1+(M-\alpha)/(M+\alpha)]$, 即退化为 Dafalias^[4]的模型形式; 当 $\alpha=0$ 时, $\psi=\ln(1+\eta^{2n}/M^{2n})/\ln 2$, 即为 Ohno 等^[20]的模型形式; 当 $n=1$ 且 $\alpha=0$ 时, $\psi=\ln(1+\eta^2/M^2)/\ln 2$, 即为修正剑桥模型 (MCC) 的形式。

对方程 (2) 求导可得

$$de=-(e_\alpha-e_M)d\psi \quad . \quad (4)$$

(3) 任意应力作用下, 各向异性土的变形特性

各向异性土在任意应力状态下的体积变形可分解为恒定应力比固结和等 p' 剪切作用下的体积变形, 其固结作用使土体密实并保持稳定的各向异性组构; 而剪切作用可以改变土体内部的孔隙、颗粒或团粒排列方向, 使颗粒之间发生摩擦滑动, 最终导致土体失稳破坏。因此任意应力作用下各向异性土的孔隙比变化量为

$$de=-\lambda d(\ln p')-(e_\alpha-e_M)d\psi \quad , \quad (5)$$

积分得

$$e-e_{\alpha 0}=-\lambda \ln \frac{p'}{p'_{\alpha 0}}-(e_\alpha-e_M)\psi \quad , \quad (6)$$

式中, $e_{\alpha 0}$ 为形成稳定各向异性组构时的初始孔隙比, 相应的平均有效应力为 $p'_{\alpha 0}$ 。

因此各向异性土的总体积应变为 $\varepsilon_v=\frac{e_{\alpha 0}-e}{1+e_{\alpha 0}}$, 即

$$\varepsilon_v=\frac{\lambda}{1+e_{\alpha 0}} \ln \frac{p'}{p'_{\alpha 0}}+\frac{e_\alpha-e_M}{1+e_{\alpha 0}}\psi \quad . \quad (7)$$

(4) 弹性变形特性

本文假设各向异性组构对土体弹性变形的影响可以忽略不计, 土体的弹性行为是各向同性的, 弹性体积应变和弹性剪切应变增量与修正剑桥模型 (MCC) 相同:

$$d\varepsilon_v^e=\frac{\kappa}{1+e_{\alpha 0}} \frac{dp'}{p'}=\frac{dp'}{K} \quad , \quad (8)$$

$$d\varepsilon_s^e=\frac{dq}{3G} \quad , \quad (9)$$

式中, κ 为土体在 $e-\ln p'$ 空间回弹线斜率 - 回弹指数。

$K=\frac{1+e_{\alpha 0}}{\kappa} p'$ 为体积应变模量。 $G=3K(1-2\mu)/(2+2\mu)$ 为剪切应变模量, μ 为泊松比。

(5) 各向异性土屈服面

由式 (7), (8) 得各向异性土的弹塑性体应变为

$$\varepsilon_v^p=\frac{\lambda-\kappa}{1+e_{\alpha 0}} \ln \frac{p'}{p'_{\alpha 0}}+\frac{e_\alpha-e_M}{1+e_{\alpha 0}}\psi \quad . \quad (10)$$

因此各向异性土屈服面为

$$f(p',q,\varepsilon_v^p,\alpha)=\frac{\lambda-\kappa}{1+e_{\alpha 0}} \ln \frac{p'}{p'_{\alpha 0}}+\frac{e_\alpha-e_M}{1+e_{\alpha 0}}\psi-\varepsilon_v^p \quad , \quad (11)$$

当土体到达临界状态 $|\eta|=M$ 时, $\varepsilon_v^p=0$, 此时,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial p'}\right|_{|\eta|=M}=\frac{\lambda-\kappa}{1+e_{\alpha 0}} \frac{1}{p'}+\frac{e_\alpha-e_M}{1+e_{\alpha 0}} \left.\frac{\partial \psi}{\partial p'}\right|_{|\eta|=M}=0 \quad , \quad (12)$$

因此,

$$\frac{e_\alpha-e_M}{1+e_{\alpha 0}}=-\left(\frac{\lambda-\kappa}{1+e_{\alpha 0}}\right) \left.p'\right| \left.\frac{\partial \psi}{\partial p'}\right|_{|\eta|=M} \quad . \quad (13)$$

对式 (3) 求导并带入临界状态条件 $|\eta|=M$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial p'}=\frac{-M}{p' \ln \left(1+\frac{(M-\alpha)^n}{(M+\alpha)^n}\right)} \frac{2n(M-\alpha)^{2n-1}}{(M^2-\alpha^2)^n+(M-\alpha)^{2n}} \quad , \quad (14)$$

令

$$\zeta=\frac{(M^2-\alpha^2)^n+(M-\alpha)^{2n}}{2nM(M-\alpha)^{2n-1}}=\frac{(M-\alpha)}{2nM}\left(1+\frac{(M+\alpha)^n}{(M-\alpha)^n}\right) \quad , \quad (15)$$

则

$$\frac{e_\alpha-e_M}{1+e_{\alpha 0}}=\left(\frac{\lambda-\kappa}{1+e_{\alpha 0}}\right) \zeta \ln \left(1+\frac{(M-\alpha)^n}{(M+\alpha)^n}\right) \quad , \quad (16)$$

因此屈服面为

$$f(p',q,\varepsilon_v^p,\alpha)$$

$$=\frac{\lambda-\kappa}{1+e_{\alpha 0}} \ln \frac{p'}{p'_{\alpha 0}}+\left(\frac{\lambda-\kappa}{1+e_{\alpha 0}}\right) \zeta \ln \left(1+\frac{((\eta-\alpha)^2)^n}{(M^2-\alpha^2)^n}\right)-\varepsilon_v^p \quad , \quad (17)$$

令

$$p'_{\alpha m}=p'_{\alpha 0} \exp \left(\frac{1+e_{\alpha 0}}{\lambda-\kappa} \varepsilon_v^p\right) \quad , \quad (18)$$

则屈服函数可变为

$$f(p',q,\alpha,p'_{\alpha m})=\left(1+\frac{((\eta-\alpha)^2)^n}{(M^2-\alpha^2)^n}\right)^{\zeta}-\frac{p'_{\alpha m}}{p'}=0 \quad , \quad (19)$$

式中, α 为具有应力比类型的变量, 满足 $\alpha < M$, 控制着屈服面倾角的变化; $p'_{\alpha m}$ 为 $\eta=\alpha$ 时的 p' 值, 控制着屈服面的大小。临界状态线通过屈服函数的最高点, 即当 $\eta=M$ 时, $\partial f / \partial p'=0$ 。

当 $n=1$ 时, $\zeta=1$, 屈服函数还可表示为

$$f(p',q,\alpha,p'_{\alpha m})=\left(1+\frac{(\eta-\alpha)^2}{M^2-\alpha^2}\right)-\frac{p'_{\alpha m}}{p'} \quad , \quad (20)$$

式 (20) 与 Dafalias^[4]和 Wheeler 等^[3]提出的各向异性模型屈服面一致。

当 $\alpha=0$ 时, $\zeta=1/n$, $p'_{\alpha m}$ 即为屈服面与 p' 轴的交点, 表示为 p'_0 , 各向同性土屈服函数为

$$f(p', q, \alpha, p'_{\text{am}}) = \left(1 + \frac{\eta^{2n}}{M^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{p'_0}{p'} = 0 \quad (21)$$

因此, 新的屈服面的最大特点就是通过参数 n 的不同值, 改变屈服面的形状。该方法的实质为土体在各向同性体积应变和临界状态体积应变之间选择不同的插值方式, 屈服面的形状则不同, 如图 1 所示, 当 $n < 1$ 时, 屈服面为子弹型, 当 $n=1$ 时, 屈服面为椭圆形, 当 $n > 1$ 时, 屈服面呈现泪滴型, 而且屈服面的形状也会因各向异性参数 α 的变化而变化。

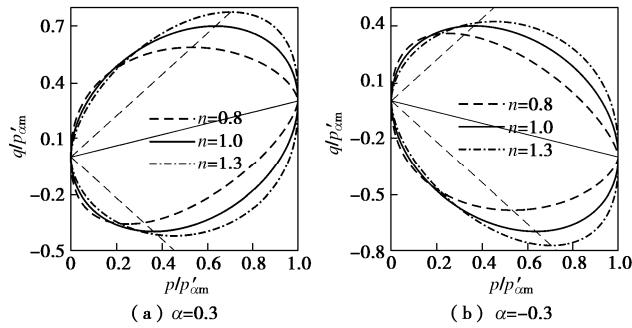


图 1 $M=1.1$, 屈服面的形状

Fig. 1 Shapes of yield surface varying with parameter n

1.2 各向异性土演化法则

(1) 各向同性硬化

各向异性模型的内变量由 p'_{am} 和 α 组成, 分别包含了模型的各向同性硬化和旋转硬化。各向同性硬化描述了屈服面形状随着土体密度的变化产生的伸缩变化, 可通过 $e - \ln p'$ 空间的正常固结线求得, 现有的各向异性模型^[3, 15, 21]大多采用与 MCC 类似的各向同性硬化法则:

$$\dot{p}'_0 = \langle L \rangle \frac{1+e}{\lambda - \kappa} \frac{\partial g}{\partial p} p'_0 \quad (22)$$

式中, L 为塑性乘子, $\langle \cdot \rangle$ 为 Macauley 括号, $\langle L \rangle$ 可以通过一致性 $\dot{f} = 0$ 条件获得, $\langle L \rangle \partial g / \partial p$ 是塑性体积应变速率。

但由于旋转硬化法则的引入, 各向异性土的先期固结应力 p'_{am} 随着 α 的变化并不总是沿着 p' 轴的, 仅采用式 (22) 作为各向异性土的各向同性硬化准则而不做变化, 计算的误差较大。Leroueil 等^[22]利用当前孔隙比和当前应力状态定义了土的无结构的状态, 修正的剑桥模型各向同性椭圆表示了这种材料状态, Burland^[23]又将这种材料状态描述为材料的本征状态。本文引入与各向异性方程 (19) 相对应的各向同性椭圆方程 (21) 作为各向异性土的本征屈服面, 则无需引进新的参数即可建立如下关系:

$$p'_0 = p'_{\text{am}} (1 + \alpha^{2n} / M^{2n})^{1/n} \quad (23)$$

p'_0 的硬化直接采用式 (22)。通过式 (22), (23)

把对 p'_{am} 的硬化转化为对各向同性屈服面的硬化, 确保屈服面在旋转时没有过度伸长积累, 尤其可以避免即将达到临界状态时屈服面回转到与静水压力轴 p' 一致时的不断膨胀。

(2) 旋转硬化

土体的当前组构依赖于应力历史, 控制着土体的力学行为。土体所受应力比的变化可引起土体组构的变化, 并产生不可逆的土体变形。塑性各向异性变形引起的组构的变化可用 α 的变化表示。

α 增量可表示为^[5]

$$\dot{\alpha} = \langle L \rangle c \frac{1}{p_{\text{at}}} \frac{p'}{p'_{\text{am}}} [\alpha_e(\eta) - \alpha] \quad (24)$$

式中, p_{at} 为标准大气压。 $\alpha_e(\eta)$ 为恒定应力比加载时 α 的平衡值, 当 $\alpha = \alpha_e(\eta)$, $\dot{\alpha} = 0$ 。 c 为常数, 控制 α 的旋转速率。在当前应力比下, 旋转速率依赖于当前组构与平衡组构之间的差值。这个差值越大, 旋转速率就越快。

$\alpha_e(\eta)$ 的形式可通过恒定应力比加载试验数据和临界状态破坏时的土体组构获得。尽管临界状态时, 土体是否有组构存在争议。微观试验^[24]和数值模拟^[16]表明, 在接近临界状态时, 土颗粒的片状结构平行于剪切面, 这是高度各向异性的; 而在一维加载阶段, 黏土颗粒的方向逐渐垂直于加载方向。因此, 在土体从一维固结到剪切至临界状态破坏时, 土体组构张量的主方向并不一致, 组构张量发生了主轴旋转。在不考虑土体组构张量主轴旋转的模型中, 假设在临界状态时, 土体各向异性组构的边界值为 0 似乎更简单。即假定当应力水平等于或大于临界状态应力水平时, 土体结构最终不再是各向异性的。这也被 Chen 等^[25]证明是热力学允许的。

这意味着临界状态时旋转硬化法则不再发生变化, 即当 $\eta=M$ 时, $\dot{\alpha}=0$ 且 $\alpha_e(M)=0$; 当 $\eta=0$ 时, $\alpha_e(0)=0$, 即各向同性应力作用下, 最终土体组构也是各向同性的。因此可假设:

$$\alpha_e(\eta) = \eta m_L \left(\exp \left(1 - \frac{|\eta|}{M} \right) - 1 \right)^{n_L} \quad (25)$$

即当 $0 < \eta < M$ 时, $\alpha_e(\eta) = \eta m_L \left[\exp \left(1 - \frac{\eta}{M} \right) - 1 \right]^{n_L}$, 当 $-M < \eta < 0$

时, $\alpha_e(\eta) = \eta m_L \left[\exp \left(1 + \frac{\eta}{M} \right) - 1 \right]^{n_L}$, 当 $|\eta| > M$ 时, $\alpha_e(\eta) = 0$ 。

式中, $m_L > 0$ 和 $n_L > 0$ 为模型常数, 且 $\alpha_e(0)=0$ 。图 2 为 Otabiemi clay 的 α_e 值随 η/M 的变化图, 其中倾斜三角形点为 Wheeler 等^[3]计算所得, 因此所给出的曲线形式能较好地拟合 α_e 在压缩侧的变化规律。

表1 Lower Cromer Till (LCT) 和 Kaolin 土的力学参数

Table 1 Mechanical parameters of LCT and Kaolin clay

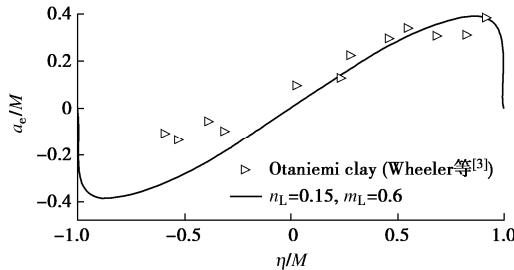
试样	M_c	M_e	λ	κ	μ	c	m_L	n_L	n
LCT	1.18	0.95	0.066	0.0077	0.258	80	0.5	0.02	1.8
Kaolin	1.05	0.85	0.140	0.0500	0.300	100	1.0	0.15	1.5

1.3 加载指数和塑性模量

采用相关联流动法则, 通过一致性条件 $\dot{f} = 0$ 和式 (23) ~ (25) 可得到加载指数 $\langle L \rangle$ 和塑性模量 K_p :

$$\langle L \rangle = \frac{\frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq}{K_p}, \quad (26)$$

$$K_p = - \left(\frac{\partial f}{\partial p'_{am}} \frac{1+e}{\lambda - \kappa} \frac{\partial g}{\partial p} p'_0 / A + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{c}{p_{at}} \frac{p'}{p'_{am}} [\alpha_e(\eta) - \alpha] \right). \quad (27)$$

图2 恒定应力比加载时 α_e 的值Fig. 2 Values of α_e at constant stress ratio

1.4 模型参数确定

提出的各向异性本构模型需要 8 个参数: 4 个修正剑桥模型参数 (λ , κ , G 或 μ , M), 1 个用于表示屈服面形状变化的增加参数 n , 另外 3 个参数 (c , m_L , n_L) 描述土体各向异性硬化。这些参数都可以通过常规室内试验得到。例如固结试验可以确定参数 (λ , κ , G 或 μ), 三轴剪切试验可以确定土样的抗剪强度参数和 M (在压缩侧和伸长侧的 M 分别表示为 M_c , M_e); 完全各向同性固结试样屈服面的最佳拟合或者通过各向同性固结试样的不排水抗剪强度可求得参数 n ; 变换应力比的加载 - 卸载 - 再加载试验可以确定参数 c , m_L , n_L ^[13-14]。模型还包括 3 个状态参数, 初始比体积 v_0 、初始固结压力 p'_{am} 和初始倾角 α_0 , 是描述试样初始状态的参数。土体屈服面的大小和初始倾角由先期应力和应变历史决定。

2 模型验证

为了验证各向异性模型的预测能力, 运用 matlab 软件和 Sloan 等^[26]提出的带有自动误差控制的显式修正欧拉法(modified Euler method with automatic error control)实现所建立的各向异性模型的数值化。对不同

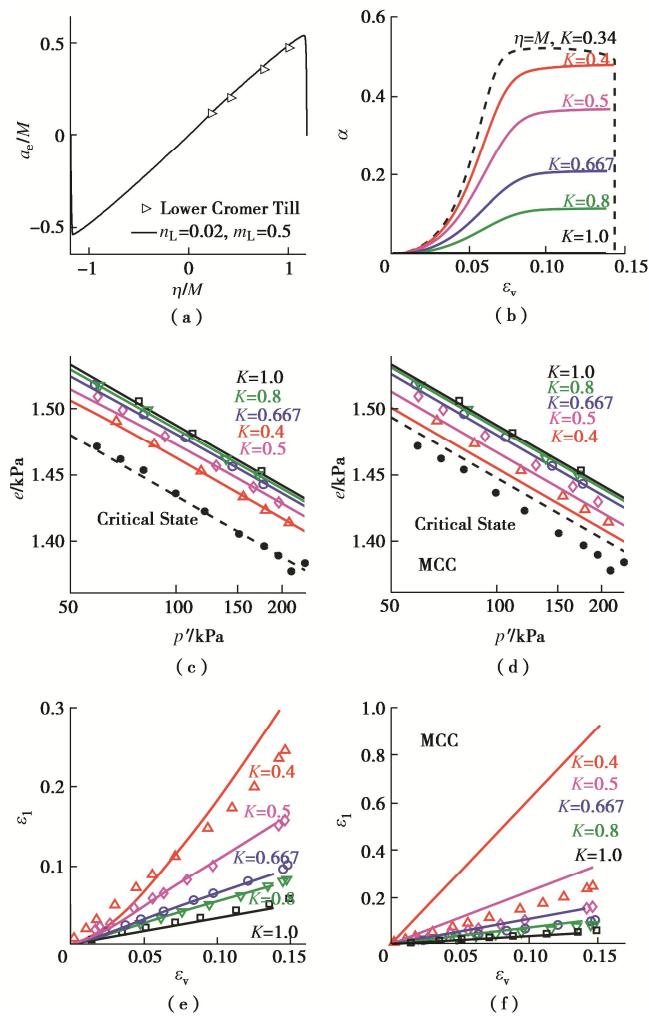
应力路径、排水条件的 Lower Cromer Till (简化为 LCT)^[27]试验和 Kaolin 黏土^[28]不排水试验的力学响应进行预测。试验模型参数的取值如表 1。首先, 通过模拟结果与原始恒定应力比固结试验对比, 验证该模型对固结特性的预测能力。其次, 通过改变应力比的固结试验, 验证所提出的旋转硬化法则。然后, 对比不同固结路径下 LCT 试样的排水和不排水三轴压缩或伸长试验结果和预测结果。最后, 为了说明模型对于黏性土的适用性, 对 Kaolin 黏土不排水试验进行补充验证。图中线代表预测结果, 点为试验结果。

2.1 恒定应力比 K 固结试验

图 3 (a) 为不同应力比固结试样的 α_e 值的拟合结果, 图 3 (b) 为不同应力比固结过程中 α 值的变化, 从图中可以看出固结结束, α 值均趋向 α_e 值。图 3 (c), (e) 分别为 $e - \ln p'$ 空间和轴向应变 - 体积应变空间 ($\varepsilon_1 - \varepsilon_v$), 恒定应力比取不同值 (K 为 0.4, 0.5, 0.667, 0.8, 1) 固结到应力 $p' = 233.33$ kPa 时, 固结试验结果和所建模型预测结果对比图。在参数 $c=0$, $n=1$ 时, 所建立的模型退化为经典的修正剑桥模型 MCC, 图 3 (d), (f) 同时给出了修正剑桥模型的预测结果。Gens^[27]所给的固结试验结果表示在 $w - \ln p'$ 空间, 其中 w 为含水率, 通过 $w = wG_s/S_r$ ($G_s = 2.65$ 为土颗粒比重, $S_r = 1$ 为饱和度) 将试验结果变换为 $e - \ln p'$ 空间。由图可知, MCC 模型明显高估了土体的体积应变和竖向应变, 且未能准确预测土体的临界状态; 所建模型的预测结果与 Gens^[27]的试验数据之间一致性较好, 尤其是 $e - \ln p'$ 空间, 较好地再现了恒定应力比固结时, 土体的体积变形特性, 压缩空间沿着临界状态线 ($\eta = M$, $K = 0.34$) 固结的预测也达到了理想的效果; 在 $\varepsilon_1 - \varepsilon_v$ 空间, 由于采用了相关联流动法则, 当 K 值较小时, 所提出的模型的预测结果与试验结果存在较小偏差, 但对应变变化趋势的预测效果较好。只有在各向同性固结 $K = 1$ 时, 由于土体结构不发生旋转硬化, $\varepsilon_1 - \varepsilon_v$ 是线性的; 在各向异性固结 K 为 0.4, 0.5, 0.667, 0.8 时, $\varepsilon_1 - \varepsilon_v$ 是向上弯曲的曲线, 且 K 值越小, 各向异性程度越大, 曲线向上弯曲越多, 这与试验结果的变化趋势一致。

2.2 应力比变化的再固结试验

变化应力比的再固结试验, 是验证旋转硬化法则正确性较直观的方法。Gens^[27]对 LCT 土进行了大量

图 3 K 固结试验结果^[27]和预测结果对比图Fig. 3 Comparison between model predictions and test data for K consolidation tests

的变化应力比再固结试验, 可分为各向同性固结到各向异性固结、各向异性固结到各向同性固结、各向异性固结到各向异性固结三类变化应力路径的加载方式。在本节所有试验路径中, AB 段表示第一阶段加载(初始固结), BC 段表示卸载, CD 段表示第二阶段再加载(再固结, K_2 加载), P 点表示屈服点。

(1) 各向同性固结到各向异性固结试验

试样 IN-4 和 IN-5 的应力路径如图 4 (a) 所示。图 4 (b) 及其后面的图中相对体积变化是以卸载结束时(C 点)试样的状态为参考计算得到的。在加载的第二阶段由于假定弹性卸载不改变土体组构, 因此试验能直观地揭示恒定应力比加载路径下土体的各向异性的演化过程。图 4 (b) 中可以观察到, 预测结果和试验结果的一致性较好, 在 K_2 加载屈服后($P'D'$)的初始阶段, 曲线发生了一定程度的弯曲, 说明所提出的旋转硬化法则能够较好地反映各向同性固结到各向异性固结土体组构的变化, 且加载到一定程度时, 土

体的组构稳定, 不再发生演化, 此时不同 K_2 值加载的 ΔV - $\ln p'$ 近似平行, 与图 3 (c) 所示的恒定应力比固结试验的结果一致。图 4 (c) 描述了大主应变增量和体积应变增量比 $d\varepsilon_1/d\varepsilon_v$ 的演化过程。虽然试验测得的应变增量比 $d\varepsilon_1/d\varepsilon_v$ 具有一点的离散性, 模型的预测结果较好地捕捉了应变增量比 $d\varepsilon_1/d\varepsilon_v$ 的变化趋势。与初始各向同性状态下的 $d\varepsilon_1/d\varepsilon_v = 1/3$ 相比, $d\varepsilon_1/d\varepsilon_v$ 的值随着再固结应力比的增大而急剧增大, 并逐渐减小趋于稳定。应力比变化越大, 应变比增量 $d\varepsilon_1/d\varepsilon_v$ 的变化就越明显, 这是由于施加的应力各向异性使土体的组构向相应的组构平衡状态发生较大的调整。所提出的模型可以较好地再现 IN-4 和 IN-5 试样的力学性能。

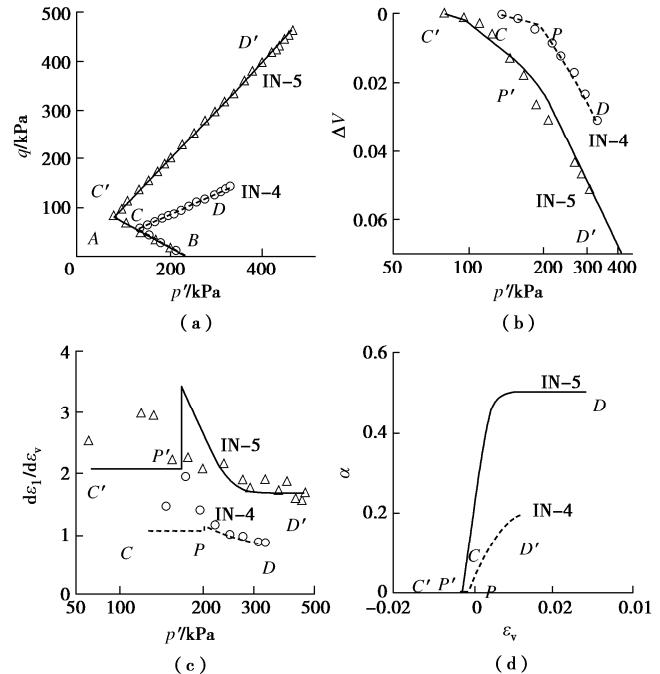
图 4 IN-4 和 IN-5 预测结果和试验结果^[27]对比

Fig. 4 Comparison between model predictions and test data for reconsolidation tests IN-4 and IN-5

(2) 各向异性固结到各向同性固结试验

Gens^[27]进行的试验 K-4、AM-3 和 K-2 的应力路径如图 5 (a) 所示。上文已分析过 K 固结试验, 这里仅对各向同性再固结阶段进行预测。如图 5 (b) 所示的体积变形为再固结阶段的初始弹性变形(CP)和不可逆塑性(PD)变形。从弹性状态过渡到弹塑性状态对应着图 5 (c) 中应变增量比的突然下降, 即塑性应变增量方向的迅速变化。在再固结路径结束时, 压缩线(5 (b))、应变增量比(5 (d))均接近渐近状态, 基本达到稳定的各向同性状态。在体积变化中观察到的一些离散点(5 (b))实际上是由试样 K-4, AM-3 和 K-2 在各向同性再固结过程中弹性区域不同所引起

的。在各向同性固结应力作用下, 各向异性固结试样颗粒重新排列以适应应力变化, 形成新的各向同性组构。因此, 所提出的模型能较好地再现 K-4、AM-3 和 K-2 试验的再固结过程。

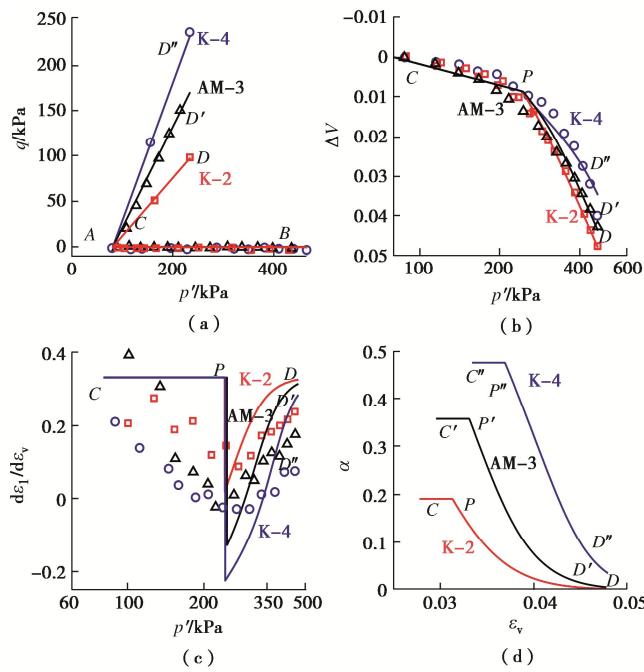


图 5 K-4、AM-3 和 K-2 预测结果和试验结果^[27]对比

Fig. 5 Comparison between model predictions and test data for reconsolidation tests K-4, AM-3 and K-2

(3) 各向异性固结到各向异性固结试验

试验 AX-3 和 AN-2 的应力路径如图 6 (a) 所示。图 6 (b) 为 AX-3 和 AN-2 再固结阶段的体积变化图。图 6 (c) 为 AX-3 和 AN-2 在再固结阶段的应变增量比随平均应力 p' 的变化图。图 6 (d) 为 AX-3 和 AN-2 在再固结阶段的屈服面倾角随体积应变的变化图。从图中可以看出, 与前文分析一致, 试样一旦开始屈服, 应变速率增量就会急剧变化。再固结比 K_2 值越小, 各向异性程度越强, 屈服面和塑性势面向目标倾角连续旋转, 土体组构逐渐发生变化直至稳定。再固结至较大应力时, 试样在第一阶段固结时形成的初始组构完全发生变化, 形成新的稳定组构。对比试验结果和预测结果, 所提出的模型能够准确地预测 LCT 在恒定应力比加载应力路径变化时的力学响应。

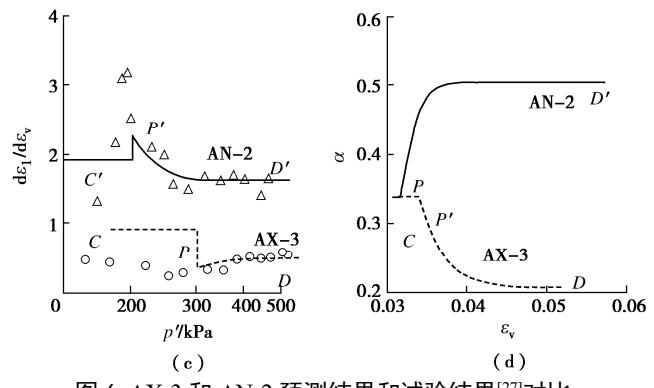
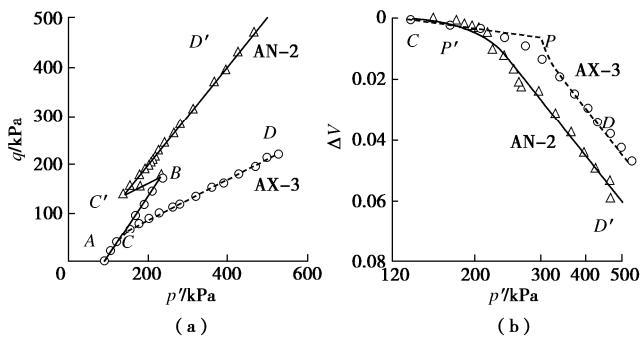
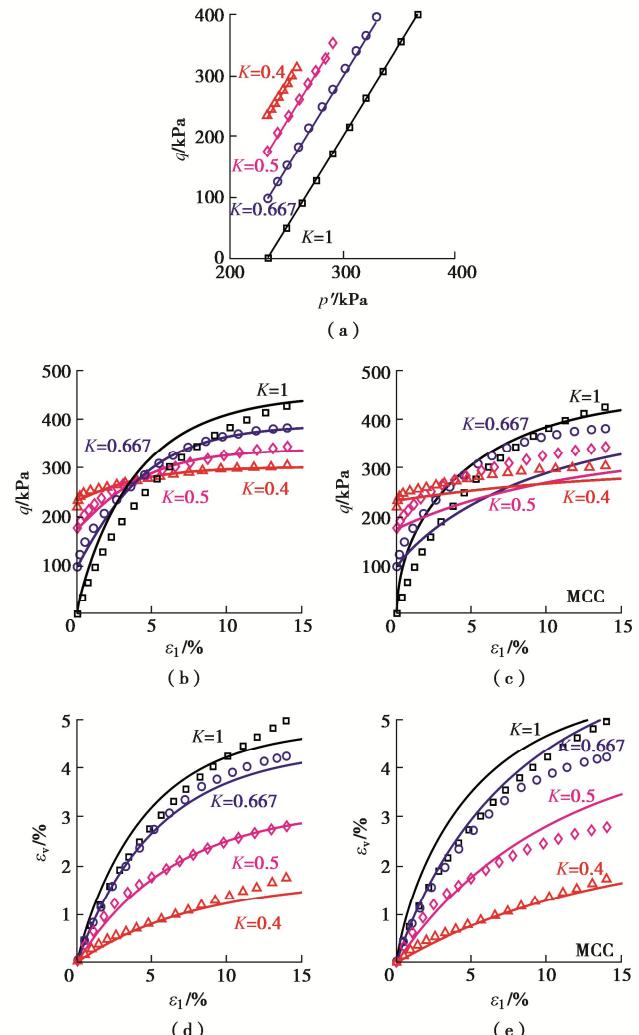


图 6 AX-3 和 AN-2 预测结果和试验结果^[27]对比

Fig. 6 Comparison between model predictions and test data for reconsolidation tests AX-3 and AN-2

2.3 排水试验

图 7 对比了恒定应力比 K 固结下形成的各向异性试样的排水三轴压缩试验的试验结果和模型预测结果。图 7 (a) 为试验的剪切应力路径, 在剪切开始时这些试样均处于正常固结状态, 平均有效固结应力为 $p_0=233.3$ kPa, K 分别为 0.4, 0.5, 0.667, 0.8, 1。图 7 (b), (d), (f) 分别从剪切应力应变、体积应变剪切应变和应力比偏应变的角度对比了所建模型的预测结果。图 7 (c), (e), (g) 为剑桥模型的预测结果。



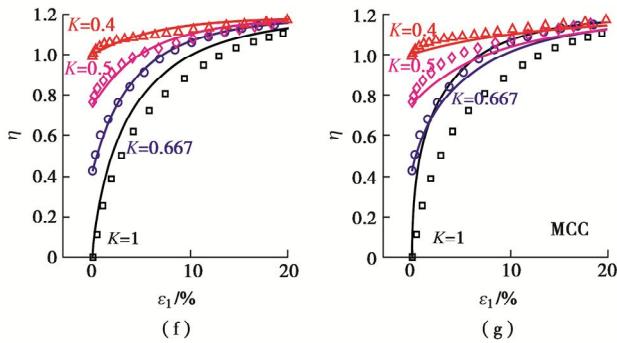


图 7 各向异性土排水试验结果^[27]与预测结果对比图

Fig. 7 Comparison between model predictions and test data for drained triaxial compression tests with different consolidation stress ratios K for Lower Cromer Till

通过对对比可知, 所建模型较剑桥模型能够更好地预测正常固结的各向异性土的排水强度、体积应变和剪切应变。

2.4 不排水试验

图 8 为初始状态与排水试验一致的各向异性 LCT 试样的不排水三轴压缩和伸长试验的结果图。所建模型较 MCC 能够更合理地对各向异性不排水应力路径 (图 8 (a)) 和剪应力发展 (图 8 (c)) 进行预测。所建模型预测的伸长试验应力路径, 特别是对于 K 值较低的固结试样, 不排水应力路径初始保持恒定的 p' 值, 表现为剪切启动时的瞬时弹性变形, 直到应力点到达屈服面, 这与试验结果的差距较大, 但较 MCC 误差较小。这种不一致的结果源于旋转硬化弹塑性理论框架, 在该理论框架中, 旋转角起“双重”作用, 并存在过度的弹性变形^[23]。而且在压缩侧, 模型未能预测出低 K 固结试样的应变软化特性 (图 8 (c))。这些可能与试验测试技术或模型框架有关, 由于在不排水试验中, 土体颗粒的平移、滚动和翻转等运动所受的影响因素较多, 弹性变形较小且屈服面和塑性势面的差异较大, 可以尝试采用非关联流动法则和边界面模型改进模型的预测结果。在伸长试验接近临界状态时, 所提出的模型能够表现出试验测得的“钩”型应力路径。

Stipho^[28]对 Kaolin 黏土的各向同性和各向异性正常固结和超固结试样进行了一系列不排水三轴试验。由于超固结土具有应变软化特性, 需要在模型的基础上建立新的边界面模型。为了简便起见, 本文只考虑正常固结试样。选择 K 为 0.57, 0.667, 0.8, 1 等 4 种固结试样进行不排水三轴压缩试验, 应力路径如图 9 (a) 所示。图 9 对比了 Kaolin 黏土试样的应力路径、偏应力 - 应变 ($q - \varepsilon_1$) 响应和孔隙水压力 - 偏应变 ($u_a - \varepsilon_d$) 关系的试验结果与所建模型和 MCC 的预

测结果。与 LCT 相比, 所提出的模型能更好的模拟 Kaolin 黏土在不排水三轴应力路径下的力学响应。模型较好地预测了 Kaolin 黏土在低 K 固结试验中表现出应变硬化特性。该模型在 Kaolin 黏土模拟中仍存在伸长侧的不足。

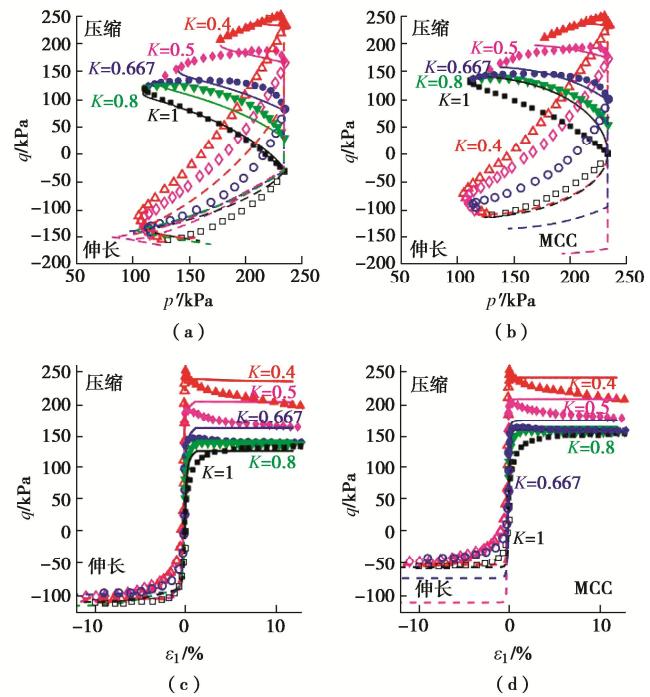
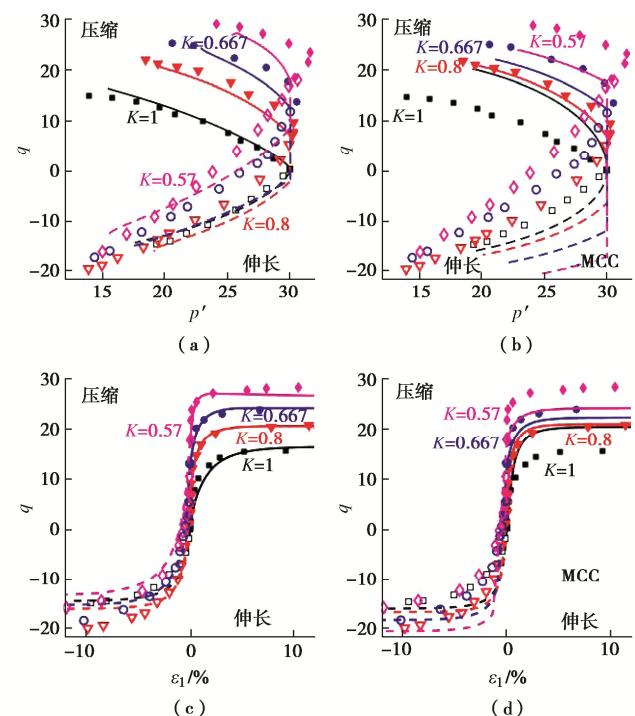


图 8 各向异性 Lower Cromer Till 不排水试验结果^[27]与预测结果对比图

Fig. 8 Comparison between model predictions and test data for undrained triaxial compression/extension tests with different consolidation stress ratios K for Lower Cromer Till



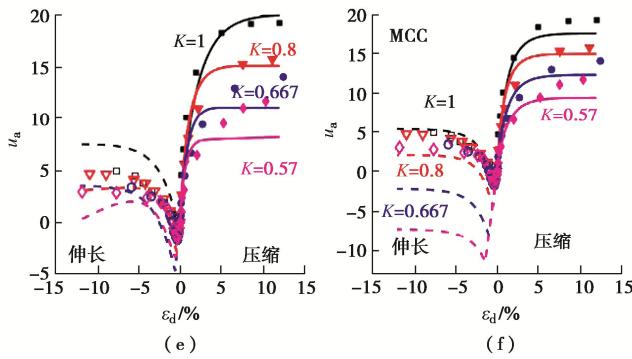


图9 各向异性 Kaolin 不排水试验结果^[28]与预测结果对比图
Fig. 9 Comparison between model predictions and test data for undrained triaxial compression/extension tests with different consolidation stress ratios K for Kaolin

3 结语

通过合理的假设各向异性土的各向同性体积应变和临界状态体积应变之间的插值函数和恒定应力比加载土体形成的稳定各向异性结构表达式, 特别是假定临界状态时土体不再具有各向异性结构, 使用相关联流动法则, 建立了黏性土的各向异性本构模型。该模型的主要特点是, 通过适当调整参数 n , 可以获得广泛的屈服面形状, 屈服面可以呈现泪滴形、子弹头形和椭圆形, 且该参数可以通过拟合三轴试验的试验结果获得。在各向同性和临界状态下, 旋转硬化法则边界值表达式为 0。所提出的模型在 $n=1$ 且不考虑屈服面旋转时, 可以退化为经典的修正剑桥模型。

采用显示积分算法实现了所建立的黏性土各向异性模型的预测功能。验证了 LCT 在恒定应力比加载试验、变换应力路径试验、排水三轴压缩试验、不排水三轴压缩试验及不排水三轴伸长试验和 Kaolin 黏土在不排水三轴伸长、压缩试验中的响应特性, 结果表明所建立的模型对于黏性土具有较强的适用性。

参考文献:

- [1] 尹振宇. 土体微观力学解析模型: 进展及发展[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(6): 993–1009. (YIN Zhen-yu. Micromechanics-based analytical model for soils: review and development[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(6): 993–1009. (in Chinese))
- [2] 张坤勇, 殷宗泽, 梅国雄. 土体各向异性研究进展[J]. 岩土力学, 2004, 25(9): 1503–1509. (ZHANG Kun-yong, YIN Zong-ze, MEI Guo-xiong. Development of soil's anisotropy study[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(9): 1503–1509. (in Chinese))
- [3] WHEELER S J, NÄÄTÄNEN A, KARSTUNEN M, et al. An anisotropic elastoplastic model for soft clays[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(2): 403–418.
- [4] DAFALIAS Y F. An anisotropic critical state soil plasticity model[J]. Mechanics Research Communications, 1986, 13(6): 341–347.
- [5] DAFALIAS Y F, TAIEBAT M. Anatomy of rotational hardening in clay plasticity[J]. Géotechnique, 2013, 63(16): 1406–1418.
- [6] PESTANA J M, WHITTLE A J. Formulation of a unified constitutive model for clays and sands[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, 23(12): 1215–1243.
- [7] YANG C, LIU X L, LIU X F, et al. Constitutive modelling of Otaniemi soft clay in both natural and reconstituted states[J]. Computers and Geotechnics, 2015, 70: 83–95.
- [8] 李海潮, 童晨曦, 马博, 等. 基于双参数屈服函数的黏土和砂土非正交单屈服面模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, 39(11): 2319–2327. (LI Hai-chao, TONG Chen-xi, MA Bo, et al. A non-orthogonal single yield surface model for clays and sands based on a two-parameter yield function[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2020, 39(11): 2319–2327. (in Chinese))
- [9] 陈艳妮, 杨仲轩. 基于热力学理论的超固结黏土边界面模型[J]. 岩土工程学报, 2017, 39(3): 547–553. (CHEN Yan-ni, YANG Zhong-xuan. Thermodynamics-based bounding surface model for overconsolidated clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2017, 39(3): 547–553. (in Chinese))
- [10] CHEN Y N, YANG Z X. A family of improved yield surfaces and their application in modeling of isotropically over-consolidated clays[J]. Computers and Geotechnics, 2017, 90: 133–143.
- [11] LAGIOIA R, PUZRIN A M, POTTS D M. A new versatile expression for yield and plastic potential surfaces[J]. Computers and Geotechnics, 1996, 19(3): 171–191.
- [12] NEWSON T A, DAVIES M C R. A rotational hardening constitutive model for anisotropically consolidated clay[J]. Soils and Foundations, 1996, 36(3): 13–20.
- [13] DAFALIAS Y F, MANZARI M T, PAPADIMITRIOU A G. SANICLAY: simple anisotropic clay plasticity model[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, 30(12): 1231–1257.
- [14] DAFALIAS Y F, TAIEBAT M. Rotational hardening with and without anisotropic fabric at critical state[J]. Géotechnique, 2014, 64(6): 507–511.
- [15] YANG C, SHENG D C, CARTER J P, et al. Modelling the plastic anisotropy of lower Cromer till[J]. Computers and

Geotechnics, 2015, **69**: 22 – 37.

[16] LI X S, DAFALIAS Y F. Anisotropic critical state theory: role of fabric[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2012, **138**(3): 263 – 275.

[17] ZHAO J, GUO N. Unique critical state characteristics in granular media considering fabric anisotropy[J]. Géotechnique, 2013, **63**(8): 695 – 704.

[18] FU P C, DAFALIAS Y F. Fabric evolution within shear bands of granular materials and its relation to critical state theory[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2011, **35**(18): 1918 – 1948.

[19] YILDIZ A, KARSTUNEN M, KRENN H. Effect of anisotropy and destructuration on behavior of Haarajoki test embankment[J]. International Journal of Geomechanics, 2009, **9**(4): 153 – 168.

[20] OHNO S, IIZUKA A, OHTA H. Two categories of new constitutive model derived from non-linear description of soil contractancy[J]. Journal of Applied Mechanics, 2006, **9**: 407 – 414.

[21] SIVASITHAMPARAM N, CASTRO J. An anisotropic elastoplastic model for soft clays based on logarithmic contractancy[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2016, **40**(4): 596 – 621.

[22] LEROUEIL S, VAUGHAN P R. The general and congruent effects of structure in natural soils and weak rocks[J]. Géotechnique, 1990, **40**(3): 467 – 488.

[23] BURLAND J B. On the compressibility and shear strength of natural clays[J]. Géotechnique, 1990, **40**(3): 329 – 378.

[24] DELAGE P, LEFEBVRE G. Study of the structure of a sensitive Champlain clay and of its evolution during consolidation[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1984, **21**(1): 21 – 35.

[25] CHEN Y N, YANG Z X. A bounding surface model for anisotropically overconsolidated clay incorporating thermodynamics admissible rotational hardening rule[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2020, **44**(5): 668 – 690.

[26] SLOAN S W, ABBO A J, SHENG D C. Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control[J]. Engineering Computations, 2001, **18**(1/2): 121 – 194.

[27] GENS A. Stress-strain and Strength of A Low Plasticity Clay[D]. London: University of London, 1982.

[28] STIPHO A S. Theoretical and Experimental Investigation of the Behavior of Anisotropically Consolidated Kaolin[D]. Wales: Cardiff University, 1978.

第七届全国工程安全与防护学术会议 暨中国岩石力学与工程学会工程安全与防护分会理事会换届会议 (2号通知)

主办单位: 中国岩石力学与工程学会工程安全与防护分会; 江苏省岩土力学与工程学会。

承办单位: 苏州科技大学。

协办单位: 中国岩石力学与工程学会岩石动力学专业委员会; 中国地震学会岩土防灾减灾专业委员会; 北京建筑大学湘潭大学; 三峡大学; 江苏省隧道与地下工程技术研究中心; 江苏东华测试技术股份有限公司; 昆山市建设工程质量检测中心。

会议主题: 爆炸冲击防灾减灾新理论、新技术。

会议专题: ①深部工程建设灾变机理及其动力学; ②岛礁工程长期安全保障理论与技术; ③城市地下空间安全评估与民防技术; ④偶然爆炸冲击致灾机理与灾害防控; ⑤爆炸冲击量测新技术新设备与应用; ⑥工程防震新材料、新结构和新技术; ⑦新型常规武器毁伤效应与防护技术; ⑧地下工程结构与介质相互作用机理。

会议论文内容、格式要求与发表: 论文内容要围绕大会主

题, 提倡实用性、创新性和前瞻性, 且在国内外未正式发表过的研究成果, 请严格按照《岩石力学与工程学报》征文要求规范编辑全文。会议学术委员会将组织专家对所提交的论文进行审查, 并精选一定数量的优秀论文推荐到《岩石力学与工程学报》正刊和增刊 (EI收录) 等期刊, 通过审稿程序的论文, 将在上述期刊正刊或增刊发表。本次学术会议仍对优秀论文进行评奖。

会议重要日程: 2022年4月30日论文投稿截止; 2022年7月22日报到; 2022年7月22日晚上召开会员代表大会及分会常务理事会议; 2021年7月22~24日大会学术报告。

会议秘书处联系方式: 王源 (13951989919), 杨露 (13601453240), 丁雪 (17551099920), 李晓照 (15811102679), 夏晨 (17701370715), 李思为 (18020269202), E-mail: aqfhfh@163.com, 地址: 南京市秦淮区永智路6号中国云计算创新基地B座318 (210001)。