

DOI: 10.11779/CJGE20220463

# 基于分形维数特征的岩石介质气-水相对渗透率预测模型研究

孔德森<sup>1,2</sup>, 赵明凯<sup>\*1,2</sup>, 时健<sup>1,2</sup>, 滕森<sup>1,2</sup>

(1. 山东科技大学土木工程与建筑学院, 山东 青岛 266590; 2. 山东科技大学山东省土木工程防灾减灾重点实验室, 山东 青岛 266590)

**摘要:** 相对渗透率是表征岩石介质两相流动特征的重要力学参数, 如何快速有效地获取相对渗透率是当前研究的热点问题。采用分形方法将岩石孔隙等效为尺寸不规则的毛细管, 基于动量平衡原理建立气-水两相流动的平衡关系式, 开发了一种预测相对渗透率的分形解析模型。然后, 基于孔径尺度和流动路径的迂曲度特征, 研究了岩石的孔隙结构对两相流体渗流特性的影响。该模型得出的相对渗透率曲线与相关试验数据吻合程度高, 验证了模型的合理性。研究表明: 该模型相比于其他相对渗透率模型准确性更高。岩石的渗流特性与流体性质和孔隙结构有关, 表征孔径尺度的分形维数  $D_f$  和迂曲度分形维数  $D_T$  越小, 两相流的渗透率越大, 而  $D_T$  的值增大会降低水相的相对渗透率, 增大气相的相对渗透率。该模型无需使用任何经验常数计算相对渗透率, 避免了数据处理的繁琐过程, 可有效应用于页岩气开采等工程领域。

**关键词:** 岩石; 两相流; 分形维数; 动量平衡; 相对渗透率

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)07-1421-09

**作者简介:** 孔德森(1977—), 男, 山东滕州人, 教授, 博士生导师, 主要从事岩石裂隙渗流、海洋岩土工程、桩基工程等领域的研究工作。E-mail: dskong828@163.com。

## A model for predicting gas-water relative permeability of rock media based on fractal dimension characteristics

KONG Desen<sup>1,2</sup>, ZHAO Mingkai<sup>1,2</sup>, SHI Jian<sup>1,2</sup>, TENG Sen<sup>1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China;

2. Shandong Key Laboratory of Civil Engineering Disaster Prevention and Mitigation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

**Abstract:** The relative permeability is an essential mechanical parameter characterizing the two-phase flow of rock media, and how to obtain the relative permeability quickly and effectively has become a critical issue to be solved in the current studies. A fractal analytical model for predicting the relative permeability of two-phase flow is developed using the fractal method to equate the rock pores as the capillaries with varying sizes and establish the equilibrium equation for gas-water phase flow based on the momentum balance. Then, the influences of the pore structure of the rock media on the permeability characteristics of the two-phase flow are studied based on the pore size scale and the tortuosity characteristics of the flow path. The relative permeability curves obtained by the model are in good agreement with the relevant experimental data, which verifies the reasonableness of the model. The results show that the model has better accuracy than other relative permeability models. The permeability characteristics of the rock media are related to fluid properties and pore structure. The smaller the fractal dimension  $D_f$  and the tortuous fractal dimension  $D_T$ , the larger the permeability of two-phase flow. In addition, increasing the value of  $D_T$  decreases the relative permeability of the water phase and increases the relative permeability of the gas phase. The model does not use any empirical constants to calculate the relative permeability, which avoids tedious data processing and can be effectively used in engineering fields such as shale gas extraction.

**Key words:** rock; two-phase flow; fractal dimension; momentum balance; relative permeability

## 0 引言

岩石介质中的两相渗流问题已经在油气开发和

基金项目: 山东省自然科学基金项目 (ZR2019MEE027)

收稿日期: 2022-04-18

\*通信作者 (E-mail: mikia\_07@163.com)

储存、核废料处理、煤层气回收、注浆封堵等诸多工程领域引起了高度关注<sup>[1-2]</sup>。其中,相对渗透率可以有效反映两相流的渗流规律和基本特征,是揭示两相流动机制的关键参数。然而,有关气-水两相流运移的研究重点多集中在宏观渗透率的试验测试方面,忽略了孔隙的微观结构对两相渗流特性的影响。此外,岩石孔隙的极度复杂性使获取相对渗透率的过程变得更加困难<sup>[3]</sup>。因此,如何建立一种简单有效的模型来描述岩石介质的两相渗流能力并获取相对渗透率,成为当前亟待解决的问题。

在两相流研究中,模型试验是获取相对渗透率最常见的方法。*Romm*<sup>[4]</sup>最早通过平行玻璃板模型试验测量了煤油和水的相对渗透率,提出了“X”型相对渗透率模型。X模型表明,相对渗透率是饱和度的线性函数,煤油和水的相对渗透率之和为1。然而,更多的研究表明饱和度和相对渗透率之间是一种非线性关系。*Nicholl*等<sup>[5]</sup>基于有效介质理论估算了两相流的相对渗透率,并指出两相流动路径的迂曲性是影响相对渗透率的重要因素。*Watanabe*等<sup>[6]</sup>通过癸烷-水和氮-水两相流试验测量了裂隙的相对渗透率,发现各流动相之间存在强烈的扰动行为,提出用“v”型相对渗透率曲线描述两相流的渗流特征。*Chen*等<sup>[7]</sup>使用特定的试验装置实现了两相流动的可视化,并揭示了不同流动模式下水相和气相的相对渗透率随饱和度的变化规律。结果表明,孔隙结构和两相流动形态是影响相对渗透率的重要因素。*张鹏伟*等<sup>[8]</sup>和*Song*等<sup>[9]</sup>通过构建三维孔隙网络模拟了气-水两相流在岩石介质中的动态渗流过程,并且基于孔隙网络模型研究了两相流的相对渗透率与饱和度的相关性。*Ghanbarian*等<sup>[10]</sup>基于有效介质近似的概念和渗流理论中的幂律比例关系,建立了页岩和致密多孔岩石的相对渗透率模型,指出孔隙度、孔隙尺度分布和孔隙连通性是影响流体流动特性的重要因素。尽管有关相对渗透率的研究主要是在模型试验的基础上进行,但是目前还没有标准的试验程序用于测量岩石的相对渗透率。此外,现有的试验方法非常昂贵、费时,更需要对试验数据进行准确的计量和分析,这进一步增大了相对渗透率的估算难度。因此,建立一种简单有效的相对渗透率解析模型具有重要意义。

由于岩石中的天然孔隙数量庞大、形态结构复杂,因此,很难定量地描述其结构特征。然而,许多研究表明岩石介质中的微观颗粒和孔隙分布满足统计上的自相似性<sup>[11-12]</sup>,这意味着可以使用分形方法来表征岩石复杂的孔隙结构。*Kruhl*<sup>[13]</sup>综述了分形方法在复杂岩石结构中的应用。*丁自伟*等<sup>[14]</sup>采用分形理论和数值模拟相结合的方法研究了砂岩微观颗粒的孔隙分布特征

对力学强度的影响,建立了岩石强度的快速评估模型。其中,分形维数是分形理论中度量岩石孔隙复杂性和不规则性的主要指标,也是反映孔隙分布自相似程度的重要参数。*Lai*等<sup>[15]</sup>使用分形维数表征非常规储层的孔隙结构特征,结合毛细管渗流模型,推导了储层的渗透率表达式,并评估了不同孔隙结构对储层孔隙度和渗透率的影响。*Wang*等<sup>[16]</sup>建立了分形维数与孔隙结构参数之间的关系,并考虑实际气体效应提出了一种气-水相对渗透率预测模型,研究了不同孔隙结构参数对相对渗透率的影响。此外,分形理论在描述多孔介质的两相流体输运方面已取得一定成果。*Yu*等<sup>[17]</sup>基于孔隙分布的自相似性,建立了一种预测相对渗透率的分形解析模型。研究表明,相对渗透率不仅与饱和度相关,还与表征孔隙几何特征的分形维数相关。*Su*等<sup>[18]</sup>使用分形维度表征了孔隙的迂曲度特征,并基于分形多孔介质的研究成果建立了预测油-水相对渗透率的分形解析模型。*Miao*等<sup>[19]</sup>在*Chima*等<sup>[20]</sup>的研究基础上,使用分形方法和平行板模型推导了岩石裂隙的相对渗透率表达式。这些研究为分形理论在岩石介质两相流中的应用提供了理论依据。

本文基于分形理论和动量平衡原理,引入两个分形维度 $D_f$ 和 $D_T$ 来表征岩石的孔隙结构特征,建立了一种预测岩石介质气-水相对渗透率的分形模型。然后,将提出的预测模型与相关试验结果和相对渗透率模型进行比较,验证了模型的有效性。该模型提供了一个更详尽的描述,可以有效表征岩石介质中的两相流动特性,得到更可靠的相对渗透率曲线。

## 1 岩石分形特征

岩石介质中复杂的孔隙结构使两相流的流动路径出现明显的迂曲性。因此,流体的实际流动长度要大于表观长度。将岩石孔隙等效为孔径不规则的毛细管,毛细管的有效孔径为 $\lambda$ ,表观长度为 $L_0$ ,实际流动长度为 $L_1$ ,两相流的流动特征如图1所示。

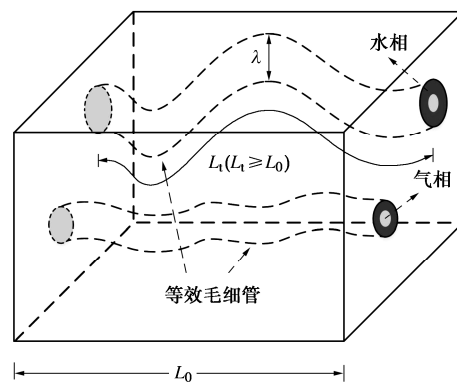


图1 两相流动模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of two-phase flow model

由于分形岩石的孔隙分布具有自相似性, 因此, 等效毛细管的分布特征遵循分形定律, 岩石介质中孔径大于或等于  $\lambda$  的毛细管累积分布可以表达为<sup>[21]</sup>

$$N(D \geq \lambda) = \left( \frac{\lambda_{\max}}{\lambda} \right)^{D_f}. \quad (1)$$

式中:  $N$  为孔径大于或等于  $\lambda$  的总毛细管数;  $\lambda_{\max}$  为最大毛细管孔径;  $D_f$  为孔径分布的分形维数, 在二维条件下,  $0 < D_f < 2$ 。

由于岩石孔隙的尺度具有高度不均匀性, 等效毛细管孔径可以视为在  $\lambda \sim \lambda + d\lambda$  的无限小范围内变化。因此, 式(1)可以视为连续可微函数, 对  $\lambda$  求微分可以得到

$$-dN(\lambda) = D_f \lambda_{\max}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)} d\lambda, \quad (2)$$

式中,  $-dN > 0$ ,  $-dN$  表示毛细管的数量随着其孔径的增大而减少。式(1)建立了岩石介质中毛细管数量与孔径尺度比的分形关系。用  $\lambda_{\min}$  取代式(1)中的  $\lambda$ , 可以得到孔径在  $\lambda_{\min} \sim \lambda_{\max}$  范围内的毛细管总数为

$$N_a(D \geq \lambda) = \left( \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{D_f}. \quad (3)$$

将式(2)除以式(3)可以得到

$$-\frac{dN}{N_a} = D_f \lambda_{\min}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)} d\lambda. \quad (4)$$

定义  $f(\lambda) = D_f \lambda_{\min}^{D_f} \lambda^{-(D_f+1)}$ ,  $f(\lambda)$  为毛细管孔径分布的概率密度函数, 满足

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f(\lambda) d\lambda = 1 - \left( \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{D_f} \approx 1. \quad (5)$$

因此, 式(5)应满足  $(\lambda_{\min}/\lambda_{\max})^{D_f} \approx 0$ , 这表明毛细管的最大孔径应远远大于其最小孔径。否则, 岩石将是一种非分形介质。定义比例尺度  $\varepsilon = \lambda_{\min}/\lambda_{\max}$ , 式(5)可以简化为

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f(\lambda) d\lambda = 1 - \varepsilon^{D_f} \approx 1. \quad (6)$$

此外, 考虑两相流动的迂曲性, 建立流体的实际流动长度  $L_t$  与表观长度  $L_0$  之间的尺度关系。Yu 等<sup>[22]</sup>在对分形多孔介质的研究中指出, 流体在多孔介质中的实际流动长度与表观长度之间同样遵循分形定律。由于岩石是一种典型的多孔介质, 假设这种尺度关系在岩石介质的两相渗流过程中仍然适用。因此, 流体的实际流动长度可以表达为

$$L_t = \lambda^{1-D_T} L_0^{D_T}. \quad (7)$$

式中:  $D_T$  为迂曲度分形维数, 表征孔隙的迂曲程度。在二维条件下,  $1 < D_T < 2$ 。  $D_T$  的值越大, 表明毛细管越弯曲。当  $D_T = 1$  时, 表示在流动过程忽略了流动路径的迂曲性, 毛细管可以看作一根直管, 在  $D_T = 2$  的极限

条件下, 表明毛细管处于高度弯曲的状态, 流动路径占据整个平面。

分形维数  $D_f$  和  $D_T$  可以分别用来表征孔隙的孔径大小和流动路径的迂曲度, 其数值可以通过多种方式获得。Peleg 等<sup>[23]</sup>基于 Mandelbrot 提出的“分形”思想建立了 Blanket 方法, 通过寻找灰度图像强度的表面积来计算分形维数。Panigrahy 等<sup>[24]</sup>综述了差分盒计数法在估算灰度图像分形维数中的应用。Saafan 等<sup>[25]</sup>将分形理论和图像处理方法相结合, 通过提取二维岩石剖面图像的几何信息来描述孔隙结构特征, 并使用盒计数法计算了孔隙的迂曲度分形维数。此外, Yu 等<sup>[22, 26]</sup>在对分形多孔介质的研究中建立了分形维数与孔隙度的关系表达式, 并将公式的计算结果与盒计数法的计算结果进行比较, 验证了公式的准确性。其中, 分形维数  $D_f$  和  $D_T$  与孔隙度的关系可以表示为

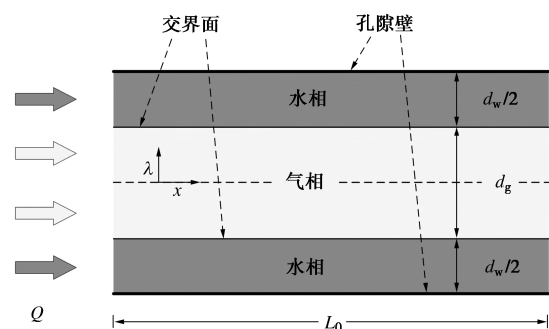
$$D_f = d - \frac{\ln \phi}{\ln \varepsilon}, \quad (8)$$

$$D_T = 1 + \frac{\ln(1 + \sqrt{1 - \phi})}{\ln(L_0/\lambda_{\min})}. \quad (9)$$

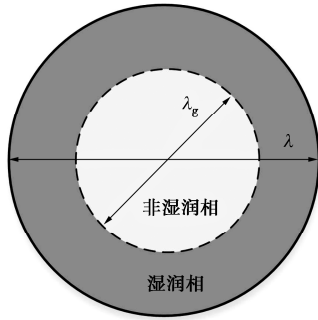
式中:  $\phi$  为岩石的孔隙度;  $d$  为欧几里得维数, 在二维条件下,  $d = 2$ 。因此, 在对分形岩石的两相渗流研究中, 可以分别使用式(8), (9)来表征孔隙的孔径分布特征和流动路径的迂曲度。

## 2 相对渗透率模型的建立

岩石复杂的孔隙结构会影响两相流的渗流特性。由于岩石孔隙被等效为尺寸不规则的毛细管, 可以通过描述两相流在毛细管内的流动特征来研究孔隙结构对渗流的影响。假设两相流在岩石中的流动行为符合以下条件: ①岩石孔隙内的两相流都是牛顿流体; ②两相流在孔隙中的流动形式是层流, 并且处于稳定状态; ③气体和水的性质是恒定的, 两者之间不发生相变; ④两相流的流动方向是水平的, 忽略重力和温度的影响; ⑤水沿孔隙壁流动, 气体占据孔隙内部。两相流在岩石孔隙内的流动模型如图2所示。



(a) 毛细管剖面



(b) 毛细管截面 (以圆截面为例)

图 2 两相流动结构示意图

Fig. 2 Schematic diagram of two-phase flow structure

由图 2 可以看出两相流在岩石孔隙中的流动形态。基于动量平衡原理<sup>[27]</sup>, 岩石孔隙 (等效毛细管) 内的两相流动行为应满足以下平衡条件:

$$(\tau_{\lambda x} \cdot C \cdot L_1)_\lambda - (\tau_{\lambda x} \cdot C \cdot L_1)_{\lambda+\Delta\lambda} + C \cdot \Delta\lambda \cdot (P_1 - P_2) = 0. \quad (10)$$

式中:  $\tau_{\lambda x}$  为流体经过毛细管时受到的剪应力;  $P_1$  和  $P_2$  分别为毛细管两端的压力;  $C$  为毛细管截面的周长, 满足  $C = \alpha\lambda$ ;  $\alpha$  为形状因子系数, 当毛细管为圆截面时,  $\alpha = \pi$ 。

考虑到岩石介质中两相流动路径的迂曲性, 将式 (7) 代入式 (10) 可以得到两相流的平衡关系表达式为

$$(\tau_{\lambda x} \cdot \lambda^{2-D_T} L_0^{D_T})_{\lambda+\Delta\lambda} - (\tau_{\lambda x} \cdot \lambda^{2-D_T} L_0^{D_T})_\lambda = \lambda \cdot \Delta\lambda \cdot (P_1 - P_2). \quad (11)$$

整理式 (11) 可以得到

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{(\tau_{\lambda x} \lambda^{2-D_T})_{\lambda+\Delta\lambda} - (\tau_{\lambda x} \lambda^{2-D_T})_\lambda}{\Delta\lambda} \right] = \frac{(P_1 - P_2)}{L_0^{D_T}} \cdot \lambda. \quad (12)$$

将式 (12) 改写为微分形式:

$$\frac{\partial(\tau_{\lambda x} \lambda^{2-D_T})}{\partial\lambda} = \frac{(P_1 - P_2)}{L_0^{D_T}} \cdot \lambda. \quad (13)$$

对式 (13) 积分可以分别得到水和气体受到的剪应力, 即

$$\tau_{\lambda x}^w = \frac{(P_1 - P_2)}{2L_0^{D_T}} \cdot \lambda^{D_T} + \frac{C_1^w}{\lambda^{2-D_T}}, \quad (14a)$$

$$\tau_{\lambda x}^g = \frac{(P_1 - P_2)}{2L_0^{D_T}} \cdot \lambda^{D_T} + \frac{C_1^g}{\lambda^{2-D_T}}. \quad (14b)$$

式中, 上标 w 和 g 分别代表水相和气相。此外, 流体受到的剪应力应满足牛顿黏性定律。因此, 基于牛顿黏性定律可以建立流速与毛细管孔径的定量关系, 式

(14a) 和式 (14b) 可以改写为

$$-\mu_w \frac{\partial v_x^w}{\partial\lambda} = \frac{(P_1 - P_2)}{2L_0^{D_T}} \cdot \lambda^{D_T} + \frac{C_1^w}{\lambda^{2-D_T}}, \quad (15a)$$

$$-\mu_g \frac{\partial v_x^g}{\partial\lambda} = \frac{(P_1 - P_2)}{2L_0^{D_T}} \cdot \lambda^{D_T} + \frac{C_1^g}{\lambda^{2-D_T}}. \quad (15b)$$

对式 (15a) 和式 (15b) 积分可以分别得到水和

气体的流速为

$$v_x^w = -\frac{M}{\mu_w} \cdot \lambda^{D_T+1} + \frac{C_1^w}{(D_T-1)\mu_w} \lambda^{D_T-1} + C_2^w, \quad (16a)$$

$$v_x^g = -\frac{M}{\mu_g} \cdot \lambda^{D_T+1} + \frac{C_1^g}{(D_T-1)\mu_g} \lambda^{D_T-1} + C_2^g, \quad (16b)$$

式中,  $M = (P_1 - P_2)/2(D_T + 1)L_0^{D_T}$ 。根据图 2 (a) 给出的两相流动模型可知, 当两相流体在毛细管内流动时, 应满足以下边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\lambda x}^w|_{\lambda=d_g} &= \tau_{\lambda x}^g|_{\lambda=d_g}, \\ v_x^w|_{\lambda=d_w+d_g} &= 0, \\ v_{\lambda x}^w|_{\lambda=d_g} &= v_{\lambda x}^g|_{\lambda=d_g} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中,  $d_w$  和  $d_g$  分别为水和气体流经毛细管时的剖面高度。将式 (17) 给出的边界条件代入式 (16) 可以分别得到式 (16) 中的常数值为

$$C_1^w = C_1^g = 0, \quad (18a)$$

$$C_2^w = \frac{M}{\mu_w} \cdot (d_w + d_g)^{D_T+1}, \quad (18b)$$

$$C_2^g = \frac{M}{\mu_w \mu_g} \cdot [-\mu_g d_g^{D_T+1} + \mu_g (d_w + d_g)^{D_T+1} + \mu_w d_g^{D_T+1}]. \quad (18c)$$

将式 (18a) ~ (18c) 代入式 (16) 并整理, 可以得到水和气体的流速分别为

$$v_x^g = \frac{M}{\mu_w} \cdot [-\lambda^{D_T+1} + (d_w + d_g)^{D_T+1}], \quad (19a)$$

$$v_x^g = \frac{M}{\mu_g} \left\{ -\lambda^{D_T+3} + \frac{\mu_g}{\mu_w} \cdot (d_w + d_g)^{D_T+1} - d_g^{D_T+1} \right\}. \quad (19b)$$

两相流通过毛细管的平均速度可以表达为

$$\bar{v}_x^w = \frac{\int_{d_g}^{d_w+d_g} \alpha \lambda v_x^w d\lambda}{\int_{d_g}^{d_w+d_g} \alpha \lambda d\lambda}, \quad (20a)$$

$$\bar{v}_x^g = \frac{\int_0^{d_g} \alpha \lambda v_x^g d\lambda}{\int_0^{d_g} \alpha \lambda d\lambda}. \quad (20b)$$

因此, 两相流通过单根毛细管的流量分别为

$$q_w = A_g \bar{v}_x^g = \frac{MA_w}{\mu_w} \left[ -\frac{2}{(D_T+3)} \cdot \frac{(d_w + d_g)^{D_T+3} - d_g^{D_T+3}}{(d_w + d_g)^2 - d_g^2} + (d_w + d_g)^{D_T+1} \right], \quad (21a)$$

$$q_g = A_g \bar{v}_x^g = \frac{MA_g}{\mu_g} \left\{ \frac{\mu_g}{\mu_w} \left[ (d_w + d_g)^{D_T+1} - d_g^{D_T+1} \right] + \frac{D_T+1}{D_T+3} d_g^{D_T+1} \right\}. \quad (21b)$$

根据图 2 (b) 可以得到水和气体的饱和度与毛细管孔径之间的关系, 即

$$S_g = \frac{V_g}{V_w + V_g} = \frac{d_g^2}{(d_g + d_w)^2}, \quad (22a)$$

$$S_w = \frac{V_w}{V_w + V_g} = \frac{(d_g + d_w)^2 - d_g^2}{(d_g + d_w)^2}. \quad (22b)$$

式中,  $S_w$  和  $S_g$  分别为含水饱和度和含气饱和度, 满足  $S_w + S_g = 1$ 。因此, 结合图 2 (a) 可以看出水和气体流经毛细管时的截面面积分别为

$$A_w = \alpha S_w (d_g + d_w)^2, \quad (23a)$$

$$A_g = \alpha S_g (d_g + d_w)^2. \quad (23b)$$

因此, 将式 (23) 代入式 (21) 可以分别得到水和气体的流量与饱和度的关系式为

$$q_w = \frac{2\alpha M \lambda^{D_T+3}}{(D_T+3)\mu_w} \cdot \left[ \frac{(D_T+3)}{2} S_w - 1 + (1-S_w)^{\frac{D_T+3}{2}} \right], \quad (24a)$$

$$q_g = \frac{\alpha M \lambda^{D_T+3}}{\mu_g} \cdot \left[ \frac{D_T+1}{D_T+3} \cdot S_g^{\frac{D_T+3}{2}} + \frac{\mu_g S_g}{\mu_w} \left( 1 - S_g^{\frac{D_T+1}{2}} \right) \right]. \quad (24b)$$

当忽略两相流动路径的迂曲性时,  $D_T = 1$ , 则式 (24) 可以简化为

$$q_w = \frac{\alpha(P_1 - P_2)S_w^2 \cdot \lambda^4}{8\mu_w L_0^{D_T}}, \quad (25a)$$

$$q_g = \frac{\alpha(P_1 - P_2)S_g [\mu_w S_g + 2\mu_g (1 - S_g)] \cdot \lambda^4}{8\mu_w \mu_g L_0^{D_T}}. \quad (25b)$$

由式 (25a), (25b) 可以分别计算水和气体通过单根毛细管的流量。其中, 流量与等效毛细管孔径之间为四次方关系。由此可知, 孔隙的孔径大小是影响岩石渗流特性的重要因素。

由于岩石介质中毛细管等效孔径的尺度范围是在  $\lambda_{\min} \sim \lambda_{\max}$  变化。因此, 对式 (25a), (25b) 积分可以得到两相流体通过岩石孔隙的总流量, 即

$$Q_w = - \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} q_w dN, \quad (26a)$$

$$Q_g = - \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} q_g dN, \quad (26b)$$

式中,  $Q_w$  和  $Q_g$  分别为水和气体通过岩石孔隙的总流量。基于两相流在岩石介质中流动行为的假设, 可以使用广义达西定律计算岩石的渗透率。其中, 两相流在岩石介质中流动的横截面积可以表达为

$$A = - \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \alpha \lambda^2 dN = \frac{\alpha D_f \lambda_{\max}^2}{(2-D_f)} \cdot (1 - \varepsilon^{2-D_f}). \quad (27)$$

结合式 (26a), (26b), (27) 可以得到两相流的渗透率为

$$K_w = \frac{Q_w S_w \mu_w L_0}{A(P_1 - P_2)} = \frac{(2-D_f) \lambda_{\max}^{1+D_f} L_0^{1-D_f} S_w}{(D_T+1)(D_T+3)(3+D_T-D_f)}.$$

$$\left( \frac{1 - \varepsilon^{3+D_T-D_f}}{1 - \varepsilon^{2-D_f}} \right) \left[ \frac{(D_T+3)}{2} \cdot S_w - 1 + (1-S_w)^{\frac{D_T+3}{2}} \right], \quad (28a)$$

$$K_g = \frac{Q_g S_g \mu_g L_0}{A(P_1 - P_2)} = \frac{(2-D_f) \lambda_{\max}^{1+D_f} L_0^{1-D_f} S_g^2}{2(D_T+1)(3+D_T-D_f)} \left( \frac{1 - \varepsilon^{3+D_T-D_f}}{1 - \varepsilon^{2-D_f}} \right) \cdot \left[ \left( \frac{D_T+1}{D_T+3} \right) \cdot S_g^{\frac{D_T+1}{2}} + \frac{\mu_g}{\mu_w} \left( 1 - S_g^{\frac{D_T+1}{2}} \right) \right]. \quad (28b)$$

式中:  $K_w$  和  $K_g$  分别为水相和气相的渗透率;  $\mu_w$  和  $\mu_g$  分别为水和气体的黏度。由于分形维数  $D_f$  和  $D_T$  在二维条件下应满足  $0 < D_f < 2$ ,  $1 < D_T < 2$ 。因此,  $3 + D_T - D_f > 2$ ,  $2 - D_f > 0$ 。基于式 (5) 给出的分形岩石的基本性质可知  $\lambda_{\min} \ll \lambda_{\max}$ , 因此,  $\varepsilon^{3+D_T-D_f} \ll 1$ ,  $\varepsilon^{2-D_f} \ll 1$ , 式 (28a), (28b) 可以简化为

$$K_w = \frac{(2-D_f) \lambda_{\max}^{1+D_f} L_0^{1-D_f} S_w}{(D_T+1)(D_T+3)(3+D_T-D_f)} \cdot \left[ \frac{(D_T+3)}{2} \cdot S_w - 1 + (1-S_w)^{\frac{D_T+3}{2}} \right], \quad (29a)$$

$$K_g = \frac{(2-D_f) \lambda_{\max}^{1+D_f} L_0^{1-D_f} S_g^2}{2(D_T+1)(3+D_T-D_f)} \cdot \left[ \left( \frac{D_T+1}{D_T+3} \right) \cdot S_g^{\frac{D_T+1}{2}} + \frac{\mu_g}{\mu_w} \left( 1 - S_g^{\frac{D_T+1}{2}} \right) \right]. \quad (29b)$$

由式 (29a), (29b) 可知: 水相和气相的渗透率与岩石介质的最大孔径直径之间存在  $1 + D_T$  次方关系。当  $S_w = 1$  时,  $S_g = 0$ , 则  $K_g = 0$ , 表示在岩石孔隙中只含有水; 当  $S_w = 0$  时,  $S_g = 1$ , 则  $K_w = 0$ , 表示在岩石孔隙中只存在气体。根据式 (29a), (29b) 建立的水相和气相的渗透率表达式, 可以得到两相流的绝对渗透率为

$$K = \frac{(2-D_f) \lambda_{\max}^{1+D_f} L_0^{1-D_f}}{2(D_T+3)(3+D_T-D_f)}. \quad (30)$$

定义  $K_0 = \lambda_{\max}^{1+D_f} L_0^{1-D_f}$ , 分别将  $K_w$  和  $K_g$  除以  $K_0$  可以得到水相和气相的无量纲渗透率分别为

$$K_w^+ = \frac{(2-D_f) S_w}{(D_T+1)(D_T+3)(3+D_T-D_f)} \cdot \left[ \frac{(D_T+3)}{2} \cdot S_w - 1 + (1-S_w)^{\frac{D_T+3}{2}} \right], \quad (31a)$$

$$K_g^+ = \frac{(2-D_f) S_g^2}{2(D_T+1)(3+D_T-D_f)} \cdot \left[ \left( \frac{D_T+1}{D_T+3} \right) \cdot S_g^{\frac{D_T+1}{2}} + \frac{\mu_g}{\mu_w} \left( 1 - S_g^{\frac{D_T+1}{2}} \right) \right]. \quad (31b)$$

式中,  $K_w^+$  和  $K_g^+$  分别为水相和气相的无量纲渗透率。由式 (31) 可以看出, 水和气体的无量纲渗透率与流体饱和度、孔径分布分形维数以及迂曲度分形维数相关, 而各相流体的黏度会进一步影响气相渗透率。将

两相流的相对渗透率定义为水相或气相的渗透率与绝对渗透率的比值。因此,将式(29a),(29b)分别除以式(30)可以得到水和气体的相对渗透率为

$$K_{rw} = \frac{2S_w}{(D_T + 1)} \cdot \left[ \frac{(D_T + 3)}{2} \cdot S_w - 1 + (1 - S_w)^{\frac{D_T + 3}{2}} \right], \quad (32a)$$

$$K_{rg} = S_g^2 \cdot \left[ S_g^{\frac{D_T + 1}{2}} + \frac{(D_T + 3)\mu_g}{(D_T + 1)\mu_w} \left( 1 - S_g^{\frac{D_T + 1}{2}} \right) \right]. \quad (32b)$$

式(32a),(32b)表明气-水两相流的相对渗透率与流体饱和度和迂曲度分形维数相关。当忽视流动路径的迂曲性时,式(32a),(32b)可以简化为

$$K_{rw} = S_w^3, \quad (33a)$$

$$K_{rg} = S_g^2 \cdot \left[ S_g + \frac{2\mu_g}{\mu_w} (1 - S_g) \right]. \quad (33b)$$

由式(33a),(33b)可以看出,不考虑流动路径的迂曲性时,水相的相对渗透率与含水饱和度之间是三次方关系。一般来说,气体的黏度比水的黏度小得多,可以认为 $\mu_g \ll \mu_w$ ,在这种情况下,气相的相对渗透率与含气饱和度之间也表现出三次方关系。

### 3 模型的验证和分析

#### 3.1 相对渗透率模型的验证

岩石介质两相流的相对渗透率与饱和度和表征孔隙结构的分形维数密切相关。为研究相对渗透率模型的合理性,分别使用 Harifidy 等<sup>[28]</sup>、Li 等<sup>[29]</sup>得到的气-水两相流试验数据对模型的预测结果进行初步验证。采用 MATLAB 中的 cftool 命令进行数据拟合,基于非线性最小二乘法中的信赖域算法,通过逐步迭代的方式得到近似曲线。将相关试验数据和该模型的预测结果进行比较,结果如图3所示。

由如图3可以看出,水相和气相的相对渗透率预测曲线都具有较好的拟合效果, $R^2$ 分别达到了0.982和0.915。通过比较相对渗透率预测曲线与 Harifidy 等<sup>[28]</sup>、Li 等<sup>[29]</sup>得出的试验数据,可以看出该模型的预测结果与试验数据值吻合程度高,由此可以验证模型的合理性。

为进一步阐明提出的预测模型的准确性,使用 Diomampo<sup>[30]</sup>的气-水两相流试验数据作为检验标准,将该预测模型与其他相对渗透率模型<sup>[4,19,31-32]</sup>进行对比分析,结果如图4所示。

图4中的曲线体现了 $K_{rg}/K_{rw}$ 与 $S_w$ 的相关性。由图4可以看出,该模型绘制的预测曲线处于试验数据的集中区域,模型的预测结果与 Diomampo 得出的试验数据吻合程度更高。从某种程度上讲,Rommm 模型<sup>[4]</sup>和 Fourar 模型<sup>[32]</sup>已经很难有效适用于某些两相流体

的流动特征,提出的预测模型相比于其他相对渗透率模型而言准确性更高。

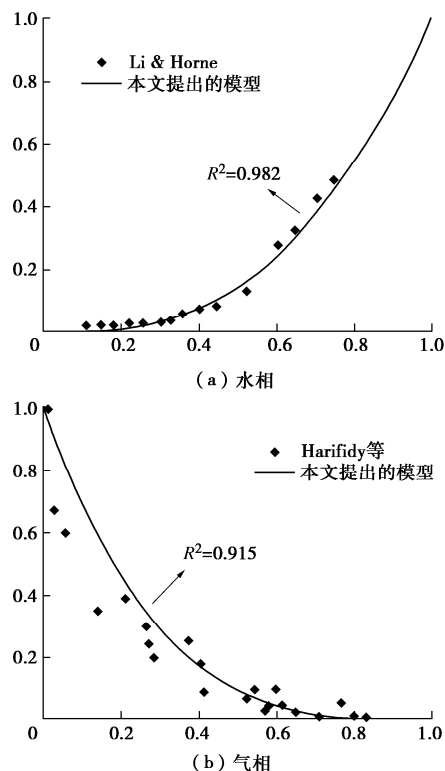


图3 相对渗透率模型的验证

Fig.3 Validation of the relative permeability model

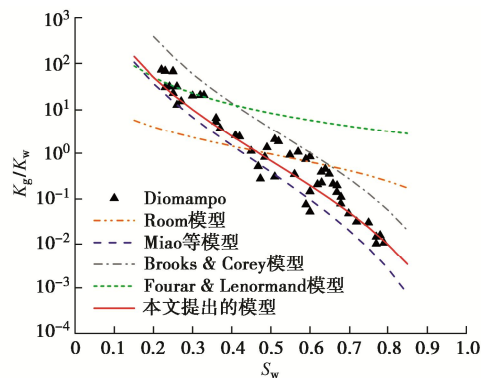


图4 提出的模型与其他相对渗透率模型比较

Fig. 4 Comparison between proposed model and other relative permeability models

#### 3.2 无量纲渗透率的影响因素分析

由水和气体的无量纲渗透率表达式(31a)和(31b)可以看出,岩石的孔隙结构对渗透率的影响是至关重要的。分形维数 $D_f$ 和 $D_T$ 分别表征岩石的孔径分布和孔隙的迂曲度对渗流特性的影响,因此,有必要研究不同分形维数条件下渗透率的变化规律。Wheatcraft 等<sup>[33]</sup>采用蒙特卡洛模拟方法得出在多孔介质的孔隙直径比为 $d_{min}/d_{max} = 0.001$ 的情况下,多孔介质的迂曲度分形维数为1.081。Yu 等<sup>[34]</sup>在对双分散多孔介质的研究中,采用盒计数法得到迂曲度的分形维数为1.1。



Yu 等<sup>[22]</sup>采用盒计数法得到孔隙分布的分形维数的值在 1.5~1.8。由于岩石是一种典型的多孔介质, 因此, 可以基于以上研究结果对岩石的分形维数取值, 分别取  $D_T = 1.3$ ,  $D_f = 1.2, 1.5, 1.8$  和  $D_f = 1.5$ ,  $D_T = 1.1, 1.3, 1.5$  研究分形维数  $D_f$  和  $D_T$  对岩石渗透率的影响。不同分形维数条件下无量纲渗透率随饱和度的变化关系如图 5 所示。

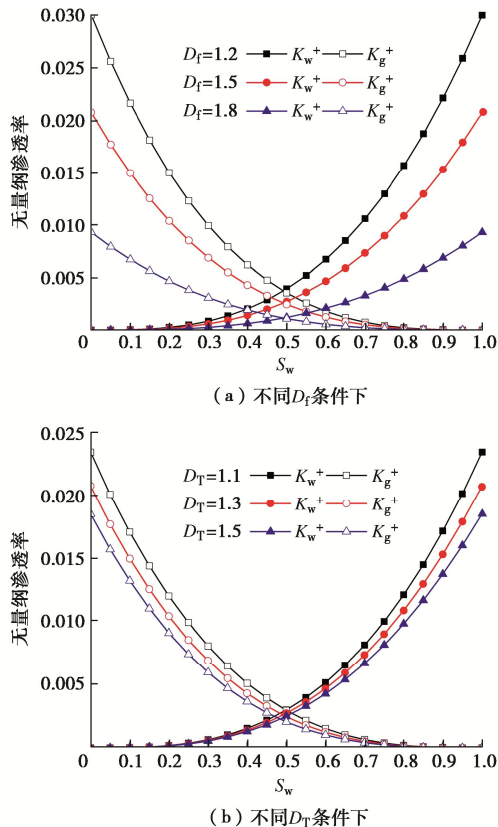


图5 无量纲渗透率随饱和度的变化关系

Fig. 5 Variation of dimensionless permeability in relation to saturation

图 5 所示的无量纲渗透率曲线表明, 随着含水饱和度的增加, 水和气体的渗透率分别表现出递增和递减的趋势。由图 5 (a) 可以看出, 水和气体的渗透率随着分形维数  $D_f$  的增大而减小。从微观角度来解释,  $D_f$  的值越大表明孔隙数目增多, 而岩石的孔隙度减小, 表明较小孔隙占的比例提高。因此, 随着  $D_f$  增大, 通过岩石孔隙的流量有所减少, 从而减小了无量纲渗透率。

由图 5 (b) 可以看出, 水和气体的无量纲渗透率随着分形维数  $D_T$  的增大呈现出逐渐减小的趋势。从微观角度上讲, 分形维数  $D_T$  反映了孔隙的迂曲度特征,  $D_T$  的值越大, 表明两相流的流动路径越迂曲。这也表明, 较大的  $D_T$  值会增大流体的流动路径, 相应地, 两相流的流动阻力会有一定程度的增加, 从而降低了岩石的渗透率。此外, 受到流体黏度的影响, 水

和气体的无量纲渗透率曲线在含水饱和度为 0.5 时并不相交。由于气体黏度远远小于水的黏度, 因此, 当水和气体的渗透率相同的情况下, 两相流的含水饱和度应小于 0.5, 这与实际情况是一致的。

### 3.3 相对渗透率的影响因素分析

在以上分析的基础上, 取  $D_f = 1.5$ ,  $D_T = 1.1, 1.3, 1.5$  绘制相对渗透率曲线, 研究分形维数  $D_T$  对相对渗透率的影响, 结果如图 6 所示。

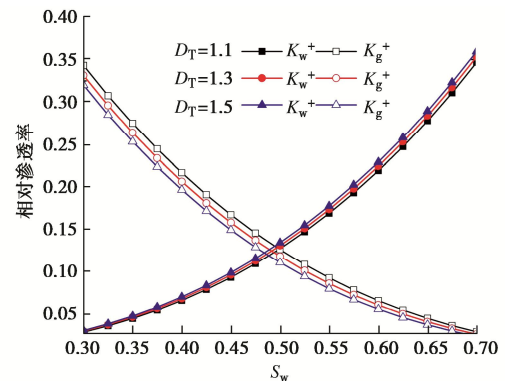


图6 相对渗透率随饱和度的变化关系

Fig. 6 Variation of relative permeability in relation to saturation

由图 6 可以看出, 水和气体的相对渗透率与饱和度之间是一种强烈的非线性关系。随着分形维数  $D_T$  增大, 气相的相对渗透率逐渐增大, 而水相的相对渗透率逐渐减小。此外, 在水和气体的渗透率相同的情况下, 两相流的含水饱和度小于 0.5, 并且随着  $D_T$  值的增大, 对应的含水饱和度逐渐增大。与分形维数  $D_T$  对渗透率的影响类似,  $D_T$  值越大表明两相流动路径的迂曲度越大, 流动路径越长, 流动阻力越大。因此, 岩石的渗透率随着  $D_T$  值的增大而减小, 相应地, 水相的相对渗透率减小。而气体拥有更强的流动能力, 流动路径的迂曲性对气体的影响更小, 因此, 气相的相对渗透率会有一定程度的增大。同样地, 由于  $D_T$  的值增大会降低水相的渗透率, 提高气相的相对渗透率, 因此, 当含水饱和度更大时, 水和气体才会拥有相同的相对渗透率, 这就造成了气相和水相的相对渗透率曲线的交点向含水饱和度更大的方向移动, 这与实际情况相符。

根据以上分析结果可知, 岩石的相对渗透率不仅与两相流体的组分差距有关, 还与孔隙结构相关。孔隙的结构特征会直接影响两相流的流动空间和流动路径, 从而改变相对渗透率的数值, 影响因素主要体现在孔隙的孔径和流动路径的迂曲度两个方面。

## 4 结 论

基于岩石介质的分形特征, 将岩石孔隙等效为尺寸不规则的毛细管, 结合动量平衡原理和达西定律,

建立了一种预测岩石介质气-水两相流相对渗透率的分形模型,主得到以下4点结论。

(1) 饱和度、孔隙结构和流体黏度是影响两相流渗透率的主要因素,岩石的相对渗透率与流体性质和孔隙结构参数相关,饱和度只是影响相对渗透率的因素之一。

(2) 该模型得出的相对渗透率曲线与相关试验数据吻合程度高,相比于其他理论模型而言具有较好的鲁棒性,精确程度更高。从某种程度上讲,目前广泛应用于数值计算和实际油气藏开采等工程领域的Room模型并不能有效描述岩石介质两相流的渗流特性。该模型的另一项优势是在已知分形维数 $D_f$ 和 $D_T$ 的条件下,不需要通过拟合试验数据求解相对渗透率,简单、高效。

(3) 揭示了岩石的孔隙结构对渗透率的影响:分形维数 $D_f$ 增大会增加流体的流动通道,同时增大两相流体在岩石孔隙内的流动空间,从而增大岩石的渗透率;同样地,分形维数 $D_T$ 增大会使流体的流动路径变长,增大流动阻力,从而减小岩石的渗透率。由于气体具有较强的流动性,迂曲度对气体的影响相对较小,因此 $D_T$ 增大会降低液相的相对渗透率,而气相的相对渗透率会有一定程度的提高。

(4) 该模型的各个参数都有明确的物理意义,有效地揭示了气-水两相渗流特性的影响机制,为能源领域的有效开发利用等提供了理论依据。然而,该模型是以分形定律和达西定律为理论基础,仅适用于具有分形特征的岩石并且流动形式为层流的牛顿流体,其有效性得到了初步肯定,如何结合实际工程对预测模型进行应用仍需要进一步研究。

## 参考文献:

- [1] LI R, CHEN Z X, WU K L, et al. An analytical model for water-oil two-phase flow in inorganic nanopores in shale oil reservoirs[J]. *Petroleum Science*, 2021, **18**(6): 1776-1787.
- [2] 李 博, 王 晔, 邹良超, 等. 岩石裂隙内浆液-水两相流可视化试验与驱替规律研究[J]. *岩土工程学报*, 2022, **44**(9): 1608-1616, 2. (LI Bo, WANG Ye, ZOU Liangchao, et al. Displacement laws of grout-water two-phase flow in a rough-walled rock fracture through visualization tests[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2022, **44**(9): 1608-1616, 2. (in Chinese))
- [3] 肖智勇, 王长盛, 王 刚, 等. 基质-裂隙相互作用对渗透率演化的影响: 考虑基质变形和应力修正[J]. *岩土工程学报*, 2021, **43**(12): 2209-2219. (XIAO Zhiyong, WANG Changsheng, WANG Gang, et al. Influences of matrix-fracture interaction on permeability evolution: considering matrix deformation and stress correction[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2021, **43**(12): 2209-2219. (in Chinese))
- [4] ROMM E S. *Fluid Flow in Fractured Rocks*[M]. Moscow: Nedra Publishing House, 1966.
- [5] NICHOLL M J, RAJARAM H, GLASS R J. Factors controlling saturated relative permeability in a partially-saturated horizontal fracture[J]. *Geophysical Research Letters*, 2000, **27**(3): 393-396.
- [6] WATANABE N, SAKURAI K, ISHIBASHI T, et al. New v-type relative permeability curves for two-phase flows through subsurface fractures[J]. *Water Resources Research*, 2015, **51**(4): 2807-2824.
- [7] CHEN C Y, HORNE R N, FOURAR M. Experimental study of liquid-gas flow structure effects on relative permeabilities in a fracture[J]. *Water Resources Research*, 2004, **40**(8): w08301.
- [8] 张鹏伟, 胡黎明, Jay N Meegoda, 等. 基于岩土介质三维孔隙结构的两相流模型[J]. *岩土工程学报*, 2020, **42**(1): 37-45. (ZHANG Pengwei, HU Liming, MEEGODA J N, et al. Two-phase flow model based on 3D pore structure of geomaterials[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2020, **42**(1): 37-45. (in Chinese))
- [9] SONG W H, YAO J, MA J S, et al. Numerical simulation of multiphase flow in nanoporous organic matter with application to coal and gas shale systems[J]. *Water Resources Research*, 2018, **54**(2): 1077-1092.
- [10] GHANBARIAN B, LIANG F, LIU H H. Modeling gas relative permeability in shales and tight porous rocks[J]. *Fuel*, 2020, **272**: 117686.
- [11] LUO M, GLOVER P W J, ZHAO P Q, et al. 3D digital rock modeling of the fractal properties of pore structures[J]. *Marine and Petroleum Geology*, 2020, **122**: 104706.
- [12] 赵明凯, 孔德森. 考虑裂隙面粗糙度和开度分形维数的岩石裂隙渗流特性研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2022, **41**(10): 1993-2002. (ZHAO Mingkai, KONG Desen. Study on seepage characteristics of rock fractures considering fracture surface roughness and opening fractal dimension[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2022, **41**(10): 1993-2002. (in Chinese))
- [13] KRUHL J H. Fractal-geometry techniques in the quantification of complex rock structures: a special view on scaling regimes, inhomogeneity and anisotropy[J]. *Journal of*



- Structural Geology, 2013, **46**: 2-21.
- [14] 丁自伟, 李小菲, 唐青豹, 等. 砂岩颗粒孔隙分布分形特征与强度相关性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, **39**(9): 1787-1796. (DING Ziwei, LI Xiaofei, TANG Qingbao, et al. Study on correlation between fractal characteristics of pore distribution and strength of sandstone particles[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2020, **39**(9): 1787-1796. (in Chinese))
- [15] LAI F P, LI Z P, FU Y K, et al. Investigating the effects of pore-structure characteristics on porosity and absolute permeability for unconventional reservoirs[J]. Energy & Fuels, 2021, **35**(1): 690-701.
- [16] WANG H M, WANG J G, WANG X L, et al. An improved relative permeability model for gas-water displacement in fractal porous media[J]. Water, 2019, **12**(1): 27.
- [17] YU B M, LI J H, LI Z H, et al. Permeabilities of unsaturated fractal porous media[J]. International Journal of Multiphase Flow, 2003, **29**(10): 1625-1642.
- [18] SU H B, ZHANG S M, SUN Y H, et al. A comprehensive model for oil-water relative permeabilities in low-permeability reservoirs by fractal theory[J]. Fractals, 2020, **28**(3): 2050055.
- [19] MIAO T J, CHEN A M, XU Y, et al. A permeability model for water-gas phase flow in fractal fracture networks[J]. Fractals, 2018, **26**(6): 1850087.
- [20] CHIMA A, GEIGER S. An analytical equation to predict gas-water relative permeability curves in fractures[C]// Society of Petroleum Engineers SPE Latin America and Caribbean Petroleum Engineering Conference. Society of Petroleum Engineers, Mexico City, Mexico, 2012.
- [21] YU B M. Analysis of flow in fractal porous media[J]. Applied Mechanics Reviews, 2008, **61**(5): 1.
- [22] YU B M, LI J H. A fractal model for the transverse thermal dispersion conductivity in porous media[J]. Chinese Physics Letters, 2004, **21**(1): 117-120.
- [23] PELEG S, NAOR J, HARTLEY R, et al. Multiple resolution texture analysis and classification[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, **6**(4): 518-523.
- [24] PANIGRAHY C, SEAL A, MAHATO N K, et al. Differential box counting methods for estimating fractal dimension of gray-scale images: a survey[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, **126**: 178-202.
- [25] SAAFAN M, GANAT T, MOHYALDINN M, et al. A fractal model for obtaining spontaneous imbibition capillary pressure curves based on 2D image analysis of low-permeability sandstone[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2022, **208**: 109747.
- [26] YU B M, LI J H. Some fractal characters of porous media[J]. Fractals, 2001, **9**(3): 365-372.
- [27] LI Y S, LI X F, TENG S N, et al. Improved models to predict gas-water relative permeability in fractures and porous media[J]. Journal of Natural Gas Science and Engineering, 2014, **19**: 190-201.
- [28] RANAIVOMANANA H, VERDIER J, SELLIER A, et al. Prediction of relative permeabilities and water vapor diffusion reduction factor for cement-based materials[J]. Cement and Concrete Research, 2013, **48**: 53-63.
- [29] LI K, HORNE R N. Steam-water relative permeability by the capillary pressure method[C]// International Symposium of the Society of Core analysts. Society for Core Analysts, New Brunswick, Canada, 2001, 17-19.
- [30] DIOMAMPO G P. Relative Permeability Through Fractures [D]. Palo Alto: Stanford University, 2001.
- [31] BROOKS R H, COREY A T. Properties of porous media affecting fluid flow[J]. Journal of the Irrigation and Drainage Division, 1966, **92**(2): 61-88.
- [32] FOURAR M, BORIES S. Experimental study of air-water two-phase flow through a fracture (narrow channel)[J]. International Journal of Multiphase Flow, 1995, **21**(4): 621-637.
- [33] WHEATCRAFT S W, TYLER S W. An explanation of scale-dependent dispersivity in heterogeneous aquifers using concepts of fractal geometry[J]. Water Resources Research, 1988, **24**(4): 566-578.
- [34] YU B M, CHENG P. A fractal permeability model for bi-dispersed porous media[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002, **45**(14): 2983-2993.