

DOI: 10.11779/CJGE202204018

基于分数阶黏弹性地基模型的群桩时效行为研究

艾智勇^{1,2}, 叶梓坤^{1,2}, 刘文杰^{1,2}

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 基于有限单元法, 将群桩划分为有限个 2 节点单元, 从而构建了竖向受荷群桩的有限元求解方程; 为了模拟饱和软黏土的流变特性, 通过 Laplace 变换, 推导了分数阶导数 Merchant 模型中的应力-应变关系; 引入弹性-黏弹性对应原理, 得到横观各向同性分数阶黏弹性饱和软土地基的边界元解答; 考虑桩-土界面处的位移协调, 将群桩有限元求解方程和地基边界元解答进行耦合, 推导出群桩-土相互作用方程; 再根据群桩承台的位移协调条件, 求解得到群桩基础状态量的时变解答; 基于以上理论, 设计了数值算例, 以验证方法的正确性, 并分析了分数阶对群桩时效行为的影响。

关键词: 分数阶导数; 黏弹性; 横观各向同性; 多层饱和软土地基; 轴向受荷群桩; 边界元-有限元耦合法

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2022)04-0749-06

作者简介: 艾智勇(1966—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土及地下工程方面的教学与研究工作。E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn。

Time-behavior of pile groups based on fractional derivative soil model

AI Zhi-yong^{1,2}, YE Zi-kun^{1,2}, LIU Wen-jie^{1,2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering, Ministry of Education, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the finite element method, the finite element equations for the vertically loaded pile groups are established by dividing the pile groups into a number of 2-node elements. To simulate the rheologic properties of saturated soft soils, the stress-strain relationship of the fractional Merchant model is derived by the Laplace transform. The elastic-viscoelastic correspondence principle is introduced to obtain the boundary element solutions for the fractional transversely isotropic viscoelastic saturated soft soils. In light of the displacement continuity of pile-soil interfaces, the governing equation for the interaction between the pile groups and the soils is derived by coupling the finite element equations for the pile groups and the boundary element ones for the soils. Later, the time behaviors of each state variable for the pile groups can be solved by introducing the displacement conditions of the pile cap. Based on the foregoing theory, numerical examples are given to verify the rationality of the proposed method, and then the influences of fractional numbers on the time-dependent behaviors of the pile groups are discussed.

Key words: fractional derivative; viscoelasticity; transverse isotropy; layered saturated soft soils; axially loaded piles; boundary element-finite element coupling method

0 引言

群桩基础已成为软土地区广泛采用的基础形式之一。目前, 诸多学者已对群桩基础进行深入的研究, 例如程泽海等^[1]、崔春义等^[2]、梁发云等^[3]。但已有的研究^[1-3]仅针对饱和地基固结效应, 无法考虑其长期流变性质。实际上, 软土骨架在应力作用下, 颗粒的重新排列和骨架错动具有明显的时间效应, 土体变形和内部应力重新调整, 表现为土体的流变现象^[4-5]。饱和软黏土中群桩基础的固结流变效应十分显著, 为了避免过大的长期沉降和不均匀沉降, 研究饱和软黏土中

群桩基础的固结流变效应具有重要意义。针对群桩基础与黏弹性地基共同作用问题, 陆建飞等^[6]利用边界积分方程法求解了黏弹性均质饱和半空间中的竖向受荷群桩。曾庆有等^[7]采用 Mesri 蠕变模型模拟土体的流变性质, 提出了一种计算桩基长期沉降的方法。Ai 等^[8]采用有限元-边界元耦合的方法, 对层状黏弹性饱和土中竖向受荷群桩的时变行为进行了研究。然而, 这些研究^[6-8]均基于经典整数阶导数模型来描述土的

基金项目: 国家自然科学基金项目 (41672275, 50578121)

收稿日期: 2021-01-06

流变特性。近来,一些试验结果^[9-10]表明分数阶导数模型能以少量的参数准确描述软土蠕变曲线;为此凭借分数阶导数模型的优势,Ai等^[11-12]采用精细积分法求得了多层分数阶黏弹性地基的三维固结解答。

在作者已有工作的基础^[11-12]上,本文引入分数阶导数 Merchant 模型描述饱和软黏土的固结流变效应,再耦合边界元法与有限元法,对多层饱和软土与群桩相互作用进行研究,并讨论分数阶次对群桩时效行为的影响。

1 竖向受荷群桩的有限元求解方程

对于本文所研究的桩基,桩长要远大于截面尺寸,因此本文将桩基础简化为一维有限元模型,以避免将桩基假设为三维模型时繁杂的运算。将轴向受荷单桩模拟为一维单元杆件时,2节点轴力杆中单元 e 的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_p^{(e)} = \frac{E_p A_p}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中, E_p 和 A_p 分别代表单桩的弹性模量和横截面积, $L^{(e)}$ 为桩单元 e 的长度。

考虑 N 根群桩中轴向受荷单桩的受力平衡条件,采用以下总集刚度矩阵可求得第 j 根桩的节点位移^[8]:

$$\mathbf{K}_{pj} \mathbf{U}_{pj}(t) = \mathbf{F}_{pj}(t) - \mathbf{Q}_{pj}(t), \quad (2)$$

式中 $\mathbf{U}_{pj} = \sum_e \mathbf{U}_{pj}^{(e)}$, $\mathbf{Q}_{pj} = \sum_e \mathbf{Q}_{pj}^{(e)}$ 和 $\mathbf{K}_{pj} = \sum_e \mathbf{K}_{pj}^{(e)}$

分别代表了单桩总的节点位移向量、总的等效边界力向量和总集刚度矩阵; \mathbf{F}_{pj} 为外荷载等效节点向量; $\mathbf{U}_{pj}^{(e)} = [u_{z1} \ u_{z2}]^T$ 和 $\mathbf{Q}_{pj}^{(e)} = [Q_{z1} \ Q_{z2}]^T$ 分别为单元节点位移向量和等效节点向量,下标 $z1$ 和 $z2$ 分别对应单元 e 上下节点坐标; t 为时间。

Laplace 变换及其逆变换定义为^[13]

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (3)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds, \quad (4)$$

式中, $\tilde{f}(s)$ 是 $f(t)$ 经过 Laplace 变换的函数, s 为 Laplace 变换的参数, i 为单位虚数。

对式(2)进行 Laplace 变换,并总集 N 根桩的平衡控制方程可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{p1} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{pj} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_{pN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_{p1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{U}}_{pj} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{U}}_{pN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{p1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_{pj} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_{pN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{p1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{pj} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{pN} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

将式(5)写为矩阵形式,即得竖向受荷群桩的有限元求解方程:

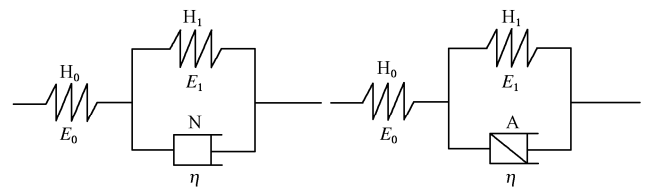
$$\mathbf{K}_g \tilde{\mathbf{U}}_g(s) = \tilde{\mathbf{F}}_g(s) - \tilde{\mathbf{Q}}_g(s), \quad (6)$$

式中, $\tilde{\mathbf{U}}_g(s)$ 和 \mathbf{K}_g 分别为 Laplace 变换域内群桩总集位移向量和群桩总集刚度矩阵, $\tilde{\mathbf{F}}_g(s)$ 和 $\tilde{\mathbf{Q}}_g(s)$ 分别为 Laplace 变换域内群桩所受外荷载和等效边界力向量。

2 分数阶黏弹性地基的边界元解

2.1 分数阶黏弹性模型

为描述土的流变固结特性,常采用元件模型以模拟土的松弛蠕变现象,而 Merchant 模型是岩土工程中应用最广泛的黏弹性模型之一^[11-12]。如图1(a)所示,经典的整数阶 Merchant 模型由弹簧元件和 Kelvin 元件串联而成。该模型含有两个胡克弹性体 H_0 和 H_1 以及一个牛顿黏壶 N 。其中, E_0 和 E_1 分别为弹簧元件和 Kelvin 元件对应的弹性模量, η 为黏滞系数。



(a) 经典Merchant模型 (b) 分数阶Merchant模型

图1 黏弹性本构模型

Fig. 1 Viscoelastic constitutive model

经典 Merchant 模型的应力-应变关系为^[8]

$$\sigma' + \frac{\eta}{E_0 + E_1} \frac{d\sigma'}{dt} = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \varepsilon + \frac{\eta E_0}{E_0 + E_1} \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (7)$$

式中, σ' 为有效应力量, ε 为应变变量。

如图1(b)所示,将牛顿黏壶 N 替换为 Abel 黏壶 A 后,改进的分数阶 Merchant 模型应力-应变关系为^[11]

$$\sigma' + \frac{\eta}{E_0 + E_1} \frac{d^\alpha \sigma'}{dt^\alpha} = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \varepsilon + \frac{\eta E_0}{E_0 + E_1} \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha}, \quad (8)$$

式中, d^α / dt^α 为 α 阶分数阶导数($0 < \alpha \leq 1$)。

此处分数阶导数采用 Riemann-Liouville 定义^[14]:

当 $t \in (0, T)$ 时,函数 $f(t)$ 的分数阶导数为

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right] \quad (m-1 < \alpha \leq m, m \in N^+) \quad (9)$$

式中, $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数,其定义如下:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0, \quad (10)$$

$$\Gamma(1+x) = x \cdot \Gamma(x). \quad (11)$$

根据分数阶导数的定义(9),Laplace 变换域内的式(8)可写为

$$\frac{\tilde{\varepsilon}(s)}{\tilde{\sigma}(s)} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + \eta s^\alpha}. \quad (12)$$

2.2 饱和软土地基的黏弹性解答

竖向荷载 V 作用下群桩-土相互作用问题如图 2 (a) 所示。假定刚性承台连接各桩, 且未与地基相接触; 地基划分为 n 层横观各向同性黏弹性土层, 底部为固定不透水边界。其中, α , E_0 , E_1 和 η 为式 (8) 中的分数阶黏弹性模型参数; ν_h 为水平向应力引起竖向应变的泊松比; ν_{vh} 为竖向向应力引起水平向应变的泊松比; k_v 和 k_h 分别为竖向向和水平向的渗透系数; L 和 D 分别为桩长和桩直径。

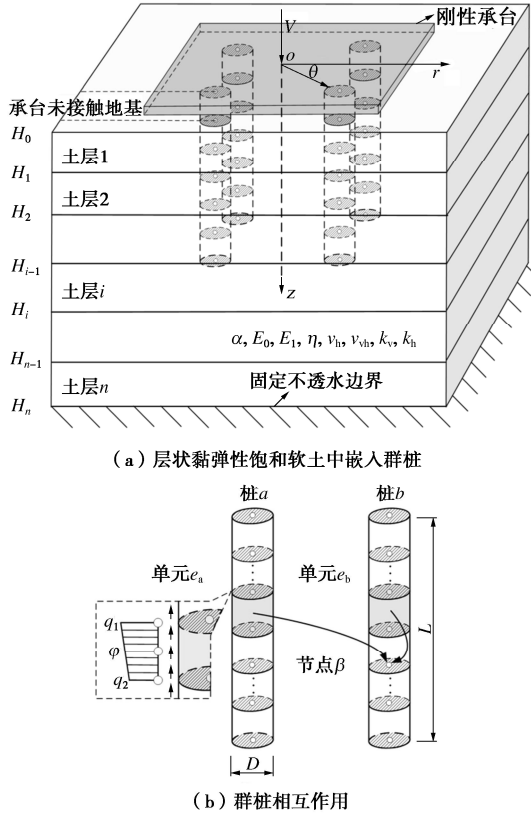


图 2 层状地基与群桩模型示意图

Fig. 2 Diagram of layered soils and pile groups

根据弹性-黏弹性对应原理^[15], 式 (12) 所获得的应力-应变关系参数替换弹性地基中相关弹性参数, 即可获得横观各向同性分数阶黏弹性饱和软土地基的解答^[11-12]。基于该解答, 可导出地基内 Laplace 变换域内的柔度系数, 即地基中 φ 处作用一 z 向单位环向荷载引起节点 β 处 Laplace 变换域内的竖向位移 $\tilde{G}(\varphi, \beta, s)$ 和超孔压 $\tilde{R}(\varphi, \beta, s)$ 。

如图 2 (b) 所示, 本文基于有限单元法划分竖向受荷群桩, 桩-土界面也被划分为相应的空间环状曲面单元。对于单元 e , 利用拉格朗日插值, 环状表面上 φ 点的侧摩阻力 $\tilde{q}^{(e)}$ 可表示为^[8]

$$q^{(e)}(\varphi, t) = N^{(e)} q^{(e)}(t) \quad (13)$$

式中, $N^{(e)} = [N_1 \ N_2]$ 为两节点拉格朗日单元插值函数构成的向量, $q^{(e)} = [q_1 \ q_2]^T$ 为单元 e 环状表面上下

边缘所受到的边界力所构成的向量。

结合变换域内的柔度系数 $\tilde{G}(\varphi, \beta, s)$ 和 $\tilde{R}(\varphi, \beta, s)$, 本文利用边界元法的基本思想, 将桩-土界面上侧摩阻力的作用表达为边界积分方程, 再将积分区间离散为桩单元 e 的长度 $L^{(e)}$, 以便与群桩有限元解答 (6) 相互耦合。每一根桩含有 M 个 $L^{(e)}$ 段单元, 则对于 N 根桩中所有单元 e 上的侧摩阻力 $\tilde{q}^{(e)}$ 引起 β 处的位移 $\tilde{u}_z(\beta, s)$ 和超孔压 $\tilde{\sigma}(\beta, s)$, 可通过如下积分求和得到^[8]

$$\tilde{u}_z(\beta, s) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{L^{(e)}} s \tilde{G}(\varphi, \beta, s) \tilde{q}_{ij}^{(e)}(\varphi, s) dL^{(e)} \quad (14a)$$

$$\tilde{\sigma}(\beta, s) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{L^{(e)}} s \tilde{R}(\varphi, \beta, s) \tilde{q}_{ij}^{(e)}(\varphi, s) dL^{(e)} \quad (14b)$$

对式 (13) 进行 Laplace 变换, 代入式 (14) 可得

$$\tilde{u}_z(\beta, s) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{L^{(e)}} s \tilde{G}(\varphi, \beta, s) N^{(e)} \tilde{q}_{ij}^{(e)}(s) dL^{(e)} \quad (15a)$$

$$\tilde{\sigma}(\beta, s) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_{L^{(e)}} s \tilde{R}(\varphi, \beta, s) N^{(e)} \tilde{q}_{ij}^{(e)}(s) dL^{(e)} \quad (15b)$$

式 (15) 按照式 (1) ~ (6) 的组装方式转化为矩阵表达:

$$\tilde{W}_g(s) = \tilde{G}_g \tilde{q}_g(s) \quad (16a)$$

$$\tilde{\sigma}_g(s) = \tilde{R}_g \tilde{q}_g(s) \quad (16b)$$

式中, $\tilde{W}_g(s)$, $\tilde{\sigma}_g(s)$ 和 $\tilde{q}_g(s)$ 分别为群桩节点竖向位移、超孔压和边界力向量, \tilde{G}_g 和 \tilde{R}_g 分别是群桩地基对应的总位移柔度矩阵和总孔压柔度矩阵。

3 有限元与边界元耦合

边界元方程 (16) 中的边界力向量 $\tilde{q}_g(s)$ 代表了节点处的侧摩阻力值, 而为了将连续分布的侧摩阻力等效至节点处, 单元 e 上的等效节点力向量 $\tilde{Q}^{(e)}$ 可通过单元转换矩阵得到^[8]

$$\tilde{Q}^{(e)}(s) = T^{(e)} \tilde{q}^{(e)}(s) \quad (17)$$

式中, $T^{(e)} = \int_{L^{(e)}} N^T N dL^{(e)}$ 代表单元 e 的转换矩阵。

借鉴组装有限元总刚度矩阵的方法, 群桩有限元方程 (6) 中 $\tilde{Q}_g(s)$ 可根据式 (17) 建立与边界元方程 (16) 中 $\tilde{q}^{(e)}(s)$ 的联系, 即

$$\tilde{Q}_g(s) = T_g \tilde{q}_g(s) \quad (18)$$

式中, T_g 为群桩总体转换矩阵。

由桩-土界面处的位移连续条件可知

$$W_g(t) = U_g(t) \quad (19)$$

于是联立式 (6), 式 (16a), 式 (18) 和 Laplace 变换后的式 (19), 可将有限元方程 (6) 与边界元方程 (16a) 耦合成群桩-土相互作用方程:

$$(K_g + T_g \tilde{G}_g^{-1}) \tilde{U}_g(s) = \tilde{F}_g(s) \quad (20)$$

4 群桩承台中的位移协调

求解群桩-土相互作用方程 (20) 得

$$\tilde{U}_g(s) = \tilde{D}_g \tilde{F}_g(s) \quad , \quad (21)$$

式中, 逆矩阵 $\tilde{D}_g = (\mathbf{K}_g + \mathbf{T}_g \tilde{G}_g^{-1})^{-1}$ 。

群桩的荷载 V 直接作用于承台, 再由承台再分配给各基桩桩顶, 因此只考虑 $\tilde{U}_g(s)$ 中桩顶节点的位移; 消去 $\tilde{F}_g(s)$ 中的零值, 同时缩减矩阵 $\tilde{D}_g(s)$, 那么式 (21) 可以改写为各基桩桩顶位移与桩顶力之间的关系:

$$\tilde{U}_d(s) = \tilde{D}_d \tilde{F}_d(s) \quad , \quad (22)$$

式中, $\tilde{U}_d(s)$ 和 $\tilde{F}_d(s)$ 分别为各基桩桩顶位移和桩顶力向量, \tilde{D}_d 中保留了矩阵 \tilde{D}_g 中桩顶节点所对应行列的元素。

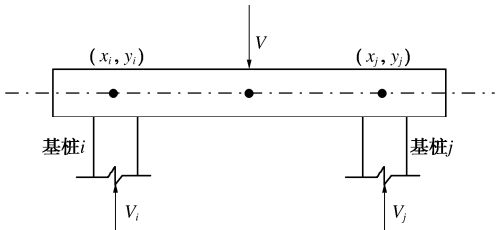


图 3 群桩承台受力变形示意图

Fig. 3 Stresses and deformations of cap for pile group

如图 3 所示, 刚性承台受到竖向集中荷载 V 时, 各基桩的桩顶力有如下关系:

$$\tilde{V}(s) = \mathbf{B} \tilde{F}_d(s) \quad , \quad (23)$$

式中, $\mathbf{B} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]$ 为 N 维行向量。

由承台底部与各基桩桩顶的位移协调条件可得

$$\tilde{U}_d(s) = \mathbf{B}^T \tilde{U}_a(s) \quad , \quad (24)$$

式中, $\tilde{U}_a(s)$ 为 Laplace 变换域内承台的竖向位移。

联立式 (22) ~ (24) 得到

$$\tilde{U}_a(s) = (\mathbf{B} \mathbf{D}_d^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \tilde{V}(s) \quad . \quad (25)$$

式 (25) 求得承台位移 $\tilde{U}_a(s)$, 然后利用式 (24) 求得各基桩的桩顶位移 $\tilde{U}_d(s)$; 进而通过式 (22) 即可获得各基桩的桩顶反力 $\tilde{F}_d(s)$ 。以上均为 Laplace 变换域内的解, 通过数值逆变换^[16], 可求得其在物理域内的解。

5 数值计算与分析

目前, 分数阶黏弹性饱和地基与群桩共同作用研究鲜有报道。陆建飞等^[6]采用边界积分方程法推导出整数阶 Merchant 模型黏弹性饱和地基与群桩共同作用解答, 显然该解答可视为本文分数阶黏弹性地基的特殊情况 ($\alpha = 1.0$)。鉴于 Ai 等^[11-12]已验证了分数阶黏弹性饱和地基解答的正确性, 故本文仅对整数阶黏

弹性地基中的群桩解答进行验证, 以表明本文理论的正确性。验证算例中, 泊松比 $\nu = 0.49$, 渗透系数 $k = 1.0 \times 10^{-7} \text{ m/s}$, 桩间距与桩径比 $s_p / D = 5$, 长径比 $L / D = 15$, $R_p = 0.5D$, $E_p / E_0 = 250$, $E_p / E_1 = 1000$, $R_p E_p / k\eta = 5.0 \times 10^4$ 。无量纲时间 $\tau = 2\zeta_v E_1 k t / \gamma_w R_p^2$, $\zeta_v = (1 - \nu) / (1 - 2\nu)$, 水重度 $\gamma_w = 0.01 \text{ MN/m}^3$; 第 i 根桩的无量纲轴力为 $V_i^* = 9V_i / V$; 承台无量纲位移 $U_a^* = 9E_1 R_p U_a / V$ 。

表 1 列举了不同时刻群桩刚性承台的位移, 而各桩沿深度变化的轴力见图 4。由图 4 可知, 本文基于边界元-有限元耦合法求解群桩时效行为(桩单元离散数量 $M = 10$), 与文献[6]积分方程法所得结果吻合得较好, 这也证明本文将桩模拟为一维杆件的合理性。

表 1 不同时刻下刚性承台无量纲位移

Table 1 Non-dimensional displacements at different time		
文献	$\tau_1 = 5.1 \times 10^{-3}$	$\tau_2 = 5.1 \times 10^4$
陆建飞等 ^[6]	0.0384	0.1737
本文	0.0402	0.1749

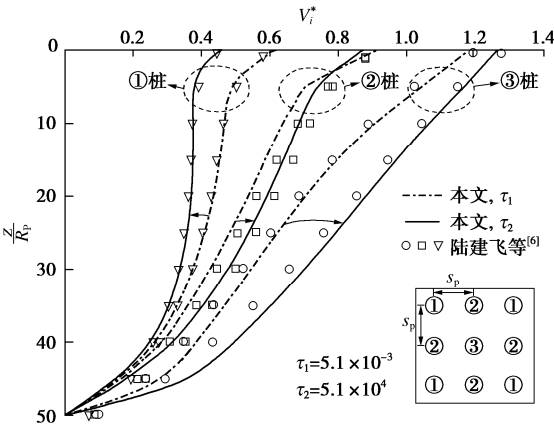


图 4 不同时刻下黏弹性地基中桩身轴力

Fig. 4 Axial forces of each pile in viscoelastic soils

Ai 等^[8]研究了基于整数阶黏弹性地基模型中群桩时效行为, 并分析了地基黏滞系数、横观各向同性参数、分层性、群桩长径比和桩间距的影响, 因此, 本文仅对分数阶次的影响进行研究。关于分数阶黏弹性参数如何选取, 可参考文献[9, 10]中的试验方法: 利用三轴固结试验获得土的蠕变曲线, 再根据应力松弛公式拟合分数阶黏弹性模型参数。为了研究分数阶次的影响, 本文采用 3 个不同阶次的分数阶黏弹性地基模型 ($\alpha = 0.7, 0.8, 1.0$) 模拟饱和软土的固结流变特性。算例考虑竖向荷载 V 作用在群桩承台上, 群桩布置如图 4 所示。三层饱和软土地基参数如表 2 所示, 厚度分别为 $h_1 = h_2 = 15D$, $h_3 = 200D$, 桩直径 $D = 0.5 \text{ m}$, 桩间距 $s_p / D = 4$, 桩身模量 $E_p / E_{ov1} = 2000$, 长径比 $L / D = 30$, 泊松比分别为 $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 =$

0.3889 和 $v_3 = 0.3158$, 无量纲时间 $\tau^* = E_{0vi}k_1t/\gamma_w D^2$, 无量纲孔压 $\sigma(z)\pi DL/V$, 无量纲承台位移 $w^* = 9DE_{0vi}U_a/V$ 。其它参数为: $k_1 = 2.0 \times 10^{-7} \text{ m/s}$, $k_2 = 6.0 \times 10^{-8} \text{ m/s}$, $k_3 = 1.0 \times 10^{-7} \text{ m/s}$, $\zeta_G = G_v/E_v$, $\zeta_E = E_h/E_v$ 。

表 2 多层黏弹性地基参数

Table 2 Parameters of layered viscoelastic soils					
土层	ζ_E	ζ_G	E_{0vi}/MPa	E_{1vi}/MPa	$\eta_{li}/(\text{MPa}\cdot\text{s}^{-1})$
1	2.0	0.40	10	8	2×10^7
2	1.5	0.36	20	5	5×10^7
3	1.7	0.38	25	5	1×10^8

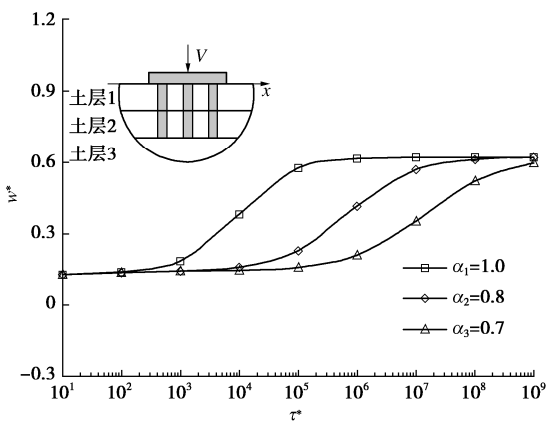


图 5 承台竖向位移随时间的变化

Fig. 5 Variation of vertical displacement of the pile cap with time

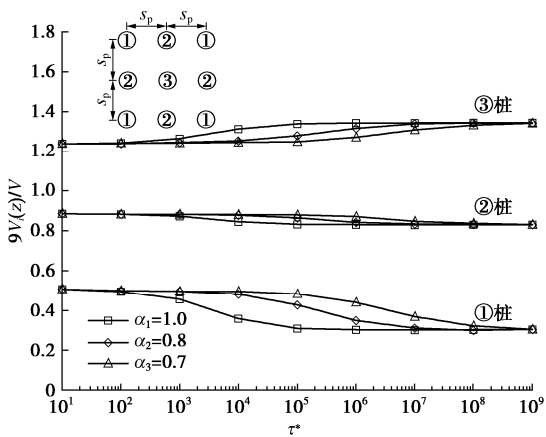


图 6 群桩桩顶轴力分配随时间的变化

Fig. 6 Variation of distribution of axial force at pile top with time

图 5、6 分别给出了承台竖向位移和群桩桩顶轴力分配随时间的变化。相较于整数阶黏弹性地基 ($\alpha = 1.0$)，本文理论可根据软土蠕变曲线确定分数阶地基参数，从而更好地预测饱和和软黏土的蠕变对群桩基础时效行为的影响。随着时间的变化，承台竖向位移逐渐增大，而边桩与中心桩的轴力逐渐转移由角桩承担；同时，随着分数阶次减小，固结流变所需时间呈指数级增长，而且软土蠕变过程的时间越长，承台竖向位移和轴力分配达到稳定的时间就越长；此外，

不同的分数阶次不影响初始阶段和最终阶段承台竖向位移和各基桩桩顶的轴力。现有的建筑桩基技术规范^[17]对桩基础的设计计算进行了简化，只考虑了最终阶段的沉降和桩顶轴力，而本文方法能够考虑沉降和桩顶轴力随时间的变化，在各个时间段对群桩基础进行沉降和受力分析。显然，这对工程精细化设计以及全过程质量监测具有重要的指导意义。图 7 表明，超孔隙水压力的消散不受分数阶次的影响，这是因为饱和和软黏土中超孔隙水压力的消散集中在固结过程；而蠕变过程由分数阶次描述，故图 7 中不同分数阶次同一时刻的超孔隙水压力曲线重合。

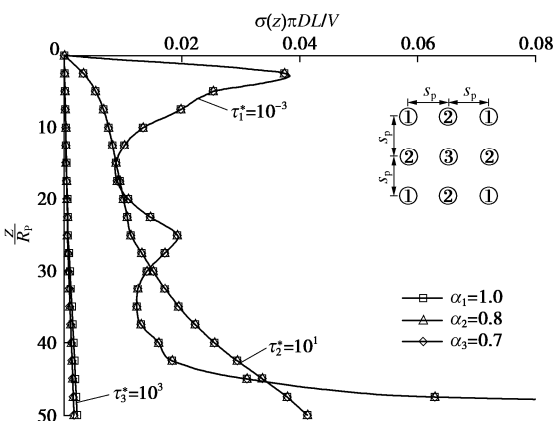


图 7 超孔隙水压力沿中心桩轴线变化情况

Fig. 7 Distribution of pore water pressure along axis of central pile

6 结 论

为了更好地模拟饱和和软黏土的蠕变对群桩基础时效的影响，本文引入分数阶导数 Merchant 模型研究层状饱和和软黏土中群桩基础的时效行为，数值算例的结果表明：

- (1) 分数阶次的大小显著影响了土体固结流变的进程。分数阶次越小，软土流变过程的时间越长，群桩轴力分配达到稳定所需要的时间越长。
- (2) 对于分数阶 Merchant 模型而言，分数阶次的改变，不影响初始阶段和最终阶段的桩顶轴力值。
- (3) 相较于现有规范^[17]，本文方法能够综合考虑软土固结流变过程对群桩基础沉降和各基桩轴力变化的影响，这有助于工程精细化设计以及全过程的质量监测。

参考文献：

[1] 程泽海, 凌道盛, 陈云敏. 桩筏基础在竖向荷载作用下的时间效应[J]. 土木工程学报, 2004, 37(2): 73 - 77. (CHENG Ze-hai, LING Dao-sheng, CHEN Yun-min. Time effects on piled raft foundation under vertical loading[J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(2): 73 - 77. (in Chinese))

- [2] 崔春义, 栾茂田, 杨 庆, 等. 结构-桩筏-地基体系时间效应的三维数值分析[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(8): 1244 - 1250. (CUI Chun-yi, LUAN Mao-tian, YANG Qing, et al. 3D numerical analysis of time effect of superstructure-piled raft-foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(8): 1244 - 1250. (in Chinese))
- [3] 梁发云, 宋 著, 郭蔚东. 考虑固结群桩竖向应力相互作用的积分方程分析方法[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(5): 847 - 854. (LIANG Fa-yun, SONG Zhu, GUO Wei-dong. Integral equation method for interaction effect of stress of vertically loaded pile groups considering consolidation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(5): 847 - 854. (in Chinese))
- [4] 陈宗基, 刘恢先. 黏土层沉陷(由于固结和次时间效应)的二维问题[J]. 力学学报, 1958(1): 1 - 10. (CHEN Zong-ji, LIU Hui-xian. Two dimensional problems of settlements of clay layers due to consolidation and secondary time effects[J]. Acta Mechanica Sinica, 1958(1): 1 - 10. (in Chinese))
- [5] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 2版. 北京: 中国水利水电出版社, 1996. (QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Geotechnical Principle and Calculation[M]. Beijing: China Water Power Press, 1996. (in Chinese))
- [6] 陆建飞, 王建华, 沈为平. 考虑固结和流变的群桩的积分方程解法[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(6): 650 - 653. (LU Jian-fei, WANG Jian-hua, SHEN Wei-ping. The integral equation method to solve pile group problem considering the consolidation and rheology of soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **22**(6): 650 - 653. (in Chinese))
- [7] 曾庆有, 周 健, 屈俊童. 考虑应力应变时间效应的桩基长期沉降计算方法[J]. 岩土力学, 2005, **26**(8): 1283 - 1287. (ZENG Qing-you, ZHOU Jian, QU Jun-tong. Method for long-term settlement prediction of pile-foundation in consideration of time effect of stress-strain relationship[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(8): 1283 - 1287. (in Chinese))
- [8] AI Z Y, GUI J C, CHENG Y C. Performance of vertically loaded pile group embedded in layered transversely isotropic saturated viscoelastic soils[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2020, **110**: 112 - 123.
- [9] 何利军, 孔令伟, 吴文军, 等. 采用分数阶导数描述软黏土蠕变的模型[J]. 岩土力学, 2011, **32**(增刊 2): 239 - 243, 249. (HE Li-jun, KONG Ling-wei, WU Wen-jun, et al. A description of creep model for soft soil with fractional derivative[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(S2): 239 - 243, 249. (in Chinese))
- [10] YIN D S, WU H, CHENG C, et al. Fractional order constitutive model of geomaterials under the condition of triaxial test[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, **37**(8): 961 - 972.
- [11] AI Z Y, ZHAO Y Z, LIU W J. Fractional derivative modeling for axisymmetric consolidation of multilayered cross-anisotropic viscoelastic porous media[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2020, **79**(5): 1321 - 1334.
- [12] AI Z Y, HU K X, LI P C. Fractional non-axisymmetric consolidation of stratified cross-anisotropic visco-poroelastic media[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, **87**: 372 - 388.
- [13] SNEDDON I N. The Use of Integral Transforms[M]. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [14] 陈 文, 孙洪广, 李西成. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京: 科学出版社, 2010. (CHEN Wen, SUN Hong-guang, LI Xi-cheng. Fractional Derivative Modeling of Mechanics and Engineering Problems[M]. Beijing: Science Press, 2010. (in Chinese))
- [15] 魏培君, 张双寅, 吴永礼. 黏弹性力学的对应原理及其数值反演方法[J]. 力学进展, 1999, **29**(3): 317 - 330. (WEI Pei-jun, ZHANG Shuang-yin, WU Yong-li. Correspondence principles and numerical methods of inverse integral transformation in viscoelastic mechanics[J]. Advances in Mechanics, 1999, **29**(3): 317 - 330. (in Chinese))
- [16] SCHAPERY R A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis[J]. 4th U S National Congress Applied Mechanics, 1962, **2**: 1075 - 1085.
- [17] 建筑桩基技术规范: JGJ 94—2008[S]. 2008. (Technical Code for Building Pile Foundations: JGJ 94—2008[S]. 2008. (in Chinese))