

DOI: 10.11779/CJGE20220360

变分极限平衡法对土质边坡稳定性的精确分析

周凤玺^{1,2}, 朱顺望¹, 梁玉旺¹, 赵文沧¹

(1. 兰州理工大学土木工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 兰州理工大学西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 基于变分法和极限平衡法的基本原理, 对土质边坡的稳定性分析进行了理论研究。首先, 通过极限平衡法建立了问题的基本平衡方程, 通过引入拉格朗日乘子构造出约束条件下等周问题的辅助泛函; 其次, 联合欧拉方程得到了以潜在滑动面、滑面正应力、滑动体内力、安全系数以及拉格朗日乘子为基本未知量的一阶常微分方程组, 并通过引入辅助变量将边坡稳定性分析转化为固定边界条件下的两点边值问题; 最后, 利用打靶法对算例进行了数值求解, 得到了滑动面位置、滑面上正应力分布以及边坡稳定性系数的精确解答, 并与条分法和有限元强度折减法得到的结果进行了比较, 验证了所提方法的有效性。分析结果表明, 提出的土质边坡稳定性分析方法可有效避免传统计算中对滑面位置的搜索优化过程, 能精确得到边坡滑面形状、滑面上的法向应力以及条间力分布, 可为边坡的稳定性分析提供科学合理的计算方法。

关键词: 均质土坡; 稳定性; 变分极限平衡法; 打靶法

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2023)07-1341-06

作者简介: 周凤玺(1979—), 博士, 教授, 主要从事岩土力学和复合材料结构力学方面的研究工作。E-mail: geolut@163.com。

Exact analysis of soil slope stability by using variational limit equilibrium method

ZHOU Fengxi^{1,2}, ZHU Shunwang¹, LIANG Yuwang¹, ZHAO Wencang¹

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2. Engineering Research Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering of Ministry of Education, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: Based on the basic principles of the variational method and the limit equilibrium method, the stability analysis of soil slopes is conducted theoretically. Firstly, the basic equilibrium equation for the problem is established by using the limit equilibrium method, and the auxiliary functional for the isoperimetric problem under constraints is constructed by introducing the Lagrange multiplier. In addition, the first-order ordinary differential equations with potential sliding surface, normal stress of sliding surface, internal force of sliding body, safety factor and Lagrange multiplier as the basic unknowns are obtained by combining the Euler equation, and the slope stability analysis is transformed into a two-point boundary value problem under fixed boundary conditions by introducing the auxiliary variables. Finally, the numerical solution of the example is carried out by using the shooting method, and the accurate solutions of the position of the sliding surface, the normal stress distribution on the sliding surface and the slope stability coefficient are obtained. The results are compared with those obtained by the slice method and the finite element strength reduction method to verify the effectiveness of this method. The analysis results show that the proposed analysis method for soil slope stability can effectively avoid the search and optimization process of the sliding surface position in the traditional calculation, and can accurately obtain the shape of the slope sliding surface, the normal stress on the sliding surface and the inter-strip force distribution, which may provide a scientific and reasonable calculation method for the stability analysis of slopes.

Key words: homogeneous soil slope; stability; variational limit equilibrium method; shooting method

0 引言

边坡稳定性分析是岩土工程领域的一个经典且重要课题, 目前已有大量的研究成果, 形成了多种分析方法, 如极限平衡法、强度折减法以及极限分析法等。其中, 以条分法为代表的极限平衡原理由于其物理概念明确、方法简洁且参数易于获取而在实践中得到

了广泛的应用^[1], 但是极限平衡法对条间力和潜在滑动面形状等参数的假设导致其理论严谨性和计算结果可靠性不足。为了克服传统极限平衡法的不足,

基金项目: 国家自然科学基金项目(51978320, 11962016); 甘肃省基础研究创新群体项目(20JR5RA478); 兰州理工大学红柳杰出青年人才支撑计划项目

收稿日期: 2022-03-27

Kopacy^[2]首次提出基于 Euler 方程的整体极限平衡法, 开启了变分原理在边坡稳定性分析中的应用研究。此后, 变分极限平衡法得到了学者们的广泛关注^[3-8]。其中, Baker 等^[3]将边坡稳定问题转变成变分法中标准的等周问题, 将其描述为在所有潜在滑动面函数和滑动面上法向应力函数中, 找到使得安全泛函达到极小值的问题。最近, 同样运用变分原理, 陈建功等^[9]将土坡稳定分析的泛函极值问题转化为根据 4 个非线性方程求解 4 个未知数的代数求解问题, 通过优化搜索方法得到滑动面位置及安全系数大小。Sarkar 等^[10]基于极限平衡法, 利用变分微积分将安全系数定义为滑面及其上法向应力的方程, 构造拉格朗日辅助函数将方程最小化, 通过与滑动面与斜坡连接处的边界条件和横截条件以及滑动面自由边界条件求解方程, 最后通过不同内摩擦角和坡角组合来反映安全系数值变化。

通过文献调研发现, 由于变分极限平衡法涉及到可动的横截界条件, 通常采用搜索优化算法进行数值求解, 使得如何避免陷入局部最小的错误成为必须要面对的问题。本文以均质的简单土坡为例, 将变分极限平衡法得到的基本方程转化为具有固定边界的两点边值问题, 采用打靶法求解该强非线性微分方程组, 可以直接得到边坡临界滑动面、滑动面上的法向应力和条间力分布的精确解。通过算例与条分法和有限元强度折减法的计算结果进行比较, 验证了方法的有效性。

1 变分极限平衡法的数学模型

1.1 基本方程

考虑如图 1 所示的简单土坡, 其潜在滑坡体以边坡坡面函数 $y_p(x)$ 和潜在滑动面 $y(x)$ 为边界。在 Mohr-Coulomb 强度准则下引入安全系数 F_s , 则有

$$\tau = \frac{\sigma \tan \varphi + c}{F_s} \quad . \quad (1)$$

式中: τ 和 σ 分别为滑动面上的切向和法向应力; c 为土体的黏聚力; φ 为土体的内摩擦角。

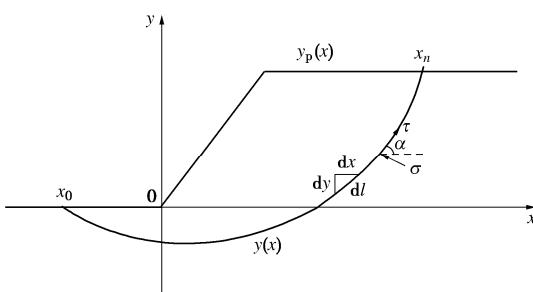


图 1 简单土坡稳定性分析模型

Fig. 1 Simple analysis model for soil slope stability

考虑滑动体的静力平衡条件:

$$\int_l (\tau \cos \alpha - \sigma \sin \alpha) dl = 0 \quad , \quad (2a)$$

$$\int_l (\tau \sin \alpha + \sigma \cos \alpha) dl - \int_{x_0}^{x_n} \gamma_m (y_p - y) dx = 0 \quad , \quad (2b)$$

$$\int_l [(\tau \cos \alpha - \sigma \sin \alpha) y - (\tau \sin \alpha + \sigma \cos \alpha) x] dl + \int_{x_0}^{x_n} \gamma_m (y_p - y) x dx = 0 \quad . \quad (2c)$$

式中: γ_m 为土体重度; α 为滑动面与水平面的夹角; l 为滑动面弧长; x_0 和 x_n 分别为滑动面 $y(x)$ 的两端点。利用几何关系 $\cos \alpha = dx / dl$, $\sin \alpha = dy / dl$, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, 极限平衡方程 (2a) ~ (2c) 可表示为滑动体上水平力 H 、竖向力 V 以及弯矩 M :

$$H(x) = \int_{x_0}^x (c + \sigma \tan \varphi - F_s \sigma y') dx \quad , \quad (3a)$$

$$V(x) = \int_{x_0}^x \{ (c + \sigma \tan \varphi) y' + F_s [\sigma - \gamma_m (y_p - y)] \} dx \quad , \quad (3b)$$

$$M(x) = \int_{x_0}^x \{ (y - xy') (c + \sigma \tan \varphi) + F_s [-\sigma yy' - \sigma x + \gamma_m (y_p - y)x] \} dx \quad . \quad (3c)$$

方程 (3a) ~ (3c) 表明, 滑动面和函数 $y(x)$, $\sigma(x)$ 以及参数 F_s 有关。边坡的稳定分析即为寻找未知函数 $y(x)$ 和 $\sigma(x)$ 在满足平衡方程 (3) 条件下实现安全系数 F_s 的最小值, 即

$$F_s = \min_{y, \sigma} F_s [y(x), \sigma(x)] \quad . \quad (4)$$

由此可知, 危险滑动面的最小安全系数的实质就是求某个泛函的极值问题。为了方便后面的分析和计算, 令

$$H(x) = \int_{x_0}^x (\tau - \sigma y') dx \quad , \quad (5a)$$

$$V(x) = \int_{x_0}^x [\tau y' + \sigma - \gamma_m (y_p - y)] dx \quad , \quad (5b)$$

$$M(x) = \int_{x_0}^x [(\tau - \sigma y') y - (\tau y' + \sigma) x + \gamma_m (y_p - y)x] dx \quad . \quad (5c)$$

由于静力平衡满足坡面上各个点, 故而满足 $H(x_0) = V(x_0) = M(x_0) = H(x_n) = V(x_n) = M(x_n) = 0$ 。从式 (5a) ~ (5c) 可以看出, $H(x)$, $V(x)$ 和 $M(x)$ 分别为土条间的水平力, 竖向力以及力矩。在边坡稳定分析中广泛使用的条分法中, 通过对这些相互作用的不同简化和假设, 就产生了不同的分析方法, 如 Fellenius 忽略了土条之间的作用力, Bishop 条分法假定土条两侧的剪力相互抵消, Price 假定了条分面上剪力和水平推力比值的函数关系, Janbu 虽然考虑了条间力, 但假定了土条两侧法向力的作用点位置^[11]。

1.2 变分分析

方程 (4) 实际上定义了一个变分问题。根据变分法的基本原理, 考虑 3 个极限平衡方程中的一个方程为目标泛函, 同时另两个方程也必须满足所需的积分约束, 这样将问题就转换成标准的等周问题。通过构造含拉格朗日乘子 λ_1 和 λ_2 的辅助泛函 F , 可将有积分约束的等周问题转换成无约束的变分极值问题^[12], 即

$$F = F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \quad \circ \quad (6)$$

式中,

$$\left. \begin{array}{l} F_0 = (y - xy') (c + \sigma \tan \varphi) - \\ F_s [(yy' + x) \sigma - \gamma_m x (y_p - y)] , \\ F_1 = c + \sigma \tan \varphi - F_s \sigma y' , \\ F_2 = (c + \sigma \tan \varphi) y' + F_s [\sigma - \gamma_m (y_p - y)] . \end{array} \right\} \quad (7)$$

此等周问题的极值必须满足欧拉方程, 即

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \sigma'} = 0 , \\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 . \end{array} \right\} \quad (8)$$

由方程(8)可得滑面函数的微分方程

$$y' = \frac{\tan \varphi (y + \lambda_1) - F_s (x - \lambda_2)}{\tan \varphi (x - \lambda_2) + F_s (y + \lambda_1)} , \quad (9)$$

由方程(8)中第二式可得法向应力函数的微分方程

$$\sigma' = \frac{-2(c + \sigma \tan \varphi) + F_s \gamma_m (x - \lambda_2)}{\tan \varphi (x - \lambda_2) + F_s (y + \lambda_1)} . \quad (10)$$

1.3 边界条件与横截条件

到目前为止, 有了3个约束方程(5)以及滑动面方程(9)和应力方程(10), 为获得问题的特定解, 还需要满足下列条件:

$$\left. \begin{array}{l} y|_{x=x_0} = y_p|_{x=x_0} \\ y|_{x=x_n} = y_p|_{x=x_n} \end{array} \right\} \quad (\text{边界条件}), \quad (11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \left[F + (y'_p - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right]|_{x=x_0} = 0 \\ \left[F + (y'_p - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right]|_{x=x_n} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{横截条件}) . \quad (12)$$

式(6)结合式(7)、式(9)~(11), 并代入方程(12), 经过整理可以得到

$$\sigma(x)|_{x=x_0} = -\frac{c(y + \lambda_1) - F_s \gamma_m (y_p - y)(\lambda_2 - x) + y'_p c(\lambda_2 - x)}{\tan \varphi (y + \lambda_1) + F_s (\lambda_2 - x) + y'_p [\tan \varphi (\lambda_2 - x) - F_s (y + \lambda_1)]}|_{x=x_0} , \quad (13a)$$

$$\sigma(x)|_{x=x_n} = -\frac{c(y + \lambda_1) - F_s \gamma (y_p - y)(\lambda_2 - x) + y'_p c(\lambda_2 - x)}{\tan \varphi (y + \lambda_1) + F_s (\lambda_2 - x) + y'_p [\tan \varphi (\lambda_2 - x) - F_s (y + \lambda_1)]}|_{x=x_n} . \quad (13b)$$

至此, 基于变分法的基本原理和极限平衡法, 建立了边坡稳定性问题的控制方程及其相应的边界条件。

1.4 状态方程及打靶法求解

由于问题的控制方程(9)和(10)为非线性的常微分方程, 在一般的边界条件下很难获得其解析解。打靶法是求解非线性常微分方程组边值问题较为简便的方法, 且能按照精度要求满足边界条件, 从而得到方程的精确解答。为此, 将控制方程、约束条件和未

知参数阶转化为一阶微分方程组的形式, 建立相应状态方程。

考虑到与一般的边值问题不同的是滑动面的位置未知, 使得滑动面与坡面的交点 x_0 和 x_n 为自由边界。因此, 不能直接进行数值计算。考虑到临界滑动面与坡面交点是两个与自变量 x 无关的待定常数, 引入未知变量 W_0 和 W_n :

$$\left. \begin{array}{l} W_0(x) = x_0 \\ W_n(x) = x_n \end{array} \right\} \quad (14)$$

由于 x_0 和 x_n 的大小与自变量 x 无关, 则有

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dW_0}{dx} = 0 \\ \frac{dW_n}{dx} = 0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

再引入新自变量 t 并作下列变量变换:

$$x = W_0 + t(W_n - W_0) \quad t \in [0, 1] . \quad (16)$$

以 t 为自变量, 那么微分方程组的自由边界问题就可转换为固定边界问题。这样在引入新的自变量 t 和表示积分弧长区间大小的变量 W_0 和 W_n 后, 问题就转变为 t 在 $[0, 1]$ 上的两点边值问题。选取 $(y, \sigma, H, V, M, F_s, \lambda_1, \lambda_2, W_0, W_n)$ 作为未知量, 结合方程(5)、方程(9)和方程(10)则问题相应状态方程可表示为

$$\frac{dy}{dt} = (W_n - W_0) \frac{\tan \varphi (y + \lambda_1) - F_s (x - \lambda_2)}{\tan \varphi (x - \lambda_2) + F_s (y + \lambda_1)} , \quad (17a)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = (W_n - W_0) \frac{-2(c + \sigma \tan \varphi) + F_s \gamma_m (x - \lambda_2)}{\tan \varphi (x - \lambda_2) + F_s (y + \lambda_1)} , \quad (17b)$$

$$\frac{dH}{dt} = (W_n - W_0) (c + \sigma \tan \varphi - F_s \sigma y') , \quad (17c)$$

$$\frac{dV}{dt} = (W_n - W_0) \{ y'(c + \sigma \tan \varphi) + F_s [\sigma - \gamma_m (y_p - y)] \} , \quad (17d)$$

$$\frac{dM}{dt} = 0 , \quad (17e)$$

$$\frac{dF_s}{dt} = 0 , \quad (17f)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\lambda_2}{dt} = 0 , \quad (17g)$$

$$\frac{dW_0}{dt} = \frac{dW_n}{dt} = 0 . \quad (17h)$$

相应的边界条件为

$$y|_{t=0} = y_p(x_0) , \quad (18a)$$

$$y|_{t=n} = y_p(x_n) , \quad (18b)$$

$$\sigma(x)|_{x=x_0} = \frac{-cy'_p(\lambda_2 - x) - c(y + \lambda_1)}{(\lambda_2 - x)(F_s + y'_p \tan \varphi) + (y + \lambda_1)(\tan \varphi - F_s y'_p)}|_{x=x_0} , \quad (19a)$$

$$\sigma(x)|_{x=x_n} = \frac{-cy_p'(\lambda_2 - x) - c(y + \lambda_1)}{(\lambda_2 - x)(F_s + y_p' \tan \varphi) + (y + \lambda_1)(\tan \varphi - F_s y_p')} \Big|_{x=x_n} \quad (19b)$$

通过打靶法可以将边界方程 (18a), (18b), (19a), (19b) 转化为初值问题, 从而利用 MATLAB 编程可以得到非线性常微分方程组 (17a) ~ (17h) 中所有未知量的数值解。即可以得到滑面位置 $y(x)$ 的数值解。关于打靶法的具体计算过程可参考文献[13, 14], 考虑到篇幅限制这里不再赘述。

2 数值算例

为了验证本文所提出模型和计算方法的有效性, 下面将通过两个算例进行说明。首先选取澳大利亚计算机应用协会 (ACADS) 的一个算例^[15], 边坡的几何形状如图 2 所示, 取土体的黏聚力 $c = 3 \text{ kPa}$, 内摩擦角 $\varphi = 19.6^\circ$, 土体重度 $\gamma_m = 20 \text{ kN/m}^3$ 。

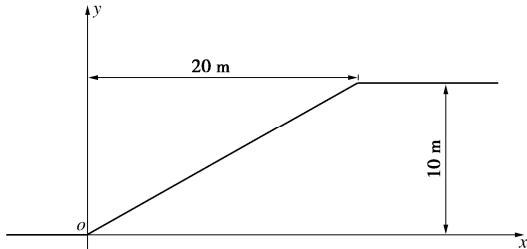


图 2 边坡的计算模型

Fig. 2 Slope model

采用打靶法对上述边坡算例进行数值计算, 所得结果与不同形式的条分法、有限元强度折减法以及使用搜索算法的变分极限平衡法^[16]进行了比较, 结果如表 1 所示。可以看出本文所得结果 0.991 与变分极限平衡法和 M-P 法的安全系数相等, 此外与条分法和有限元强度折减法相比也较为相近。

表 1 不同方法所求安全系数值

Table 1 Values of safety factor obtained by different methods

Bishop 法	Janbu 法	Morgenstern- Price 法	变分极限 平衡法	强度折 减法	本文 方法
0.992	0.964	0.991	0.991	0.993	0.991

变分极限平衡法不仅可以得到最小安全系数值, 还可以得到临界滑动面位置以及其上的应力分布。图 3 给出了临界滑面上法向应力分布情况, 由图 3 可知临界滑面坡角处的法向应力值是 11.23 kPa, 而坡顶出现的法向应力为-3.13 kPa, 表明在坡顶存在张拉应力。图 4 绘出了不同计算方法得到的滑面位置, 可以发现, 各理论的计算结果之间略有差异。值得说明的是本文的方法可以直接得到滑动体各位置的内力分布, 与条分法中的条间力概念相同。图 4 绘出了竖向和水平条间力的分布曲线, 并与 Morgenstern-Price 法

得到的结果进行了比较。从图 4 中可以看出两者存在较大的差别, 这是由于坡顶张力裂缝的出现导致不合理的条间力, 但在坡顶处出现转折, 这与邓东平等^[17]研究结果一致。

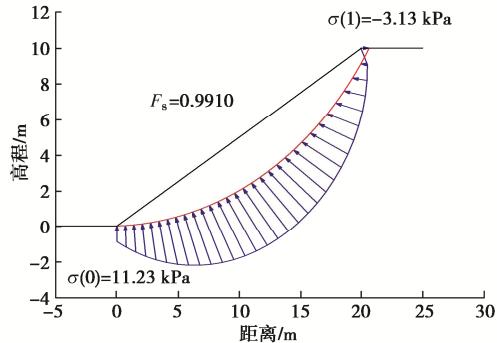


图 3 最危险滑面及正应力分布

Fig. 3 Most dangerous slip surface and normal stress distribution

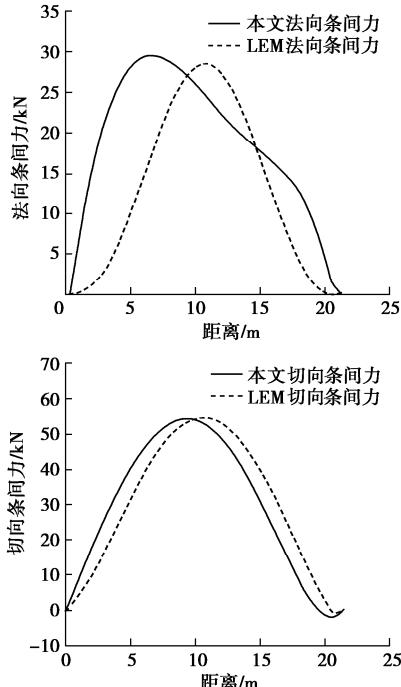


图 4 法向和切向条间力分布曲线

Fig. 4 Distribution curves of normal and tangential inter-strip force

另一个简单土坡算例中, 考虑土体重度 $\gamma_m = 10 \text{ kN/m}^3$, 黏聚力 $c = 10 \text{ kPa}$, 内摩擦角 $\varphi = 20^\circ$, 为了便于与已有结果比较, 参照文献[7], 未知参数用无量纲形式表示, 应力 $S = \sigma/c$, 稳定性因子 $N_s = \gamma h_{cr}/c$, h_{cr} 为边坡临界高度。图 5 给出了滑动面上法向应力的分布, 由图 5 可知临界滑动面对应的最小安全系数为 1.0084, 这与摩根斯坦-普莱斯法所得到的 1.008 结果极为接近, 且滑面上的法向应力在坡顶同样出现了拉应力。图 6 绘出了不同计算方法得到的滑动面的位置和形状, 可以看出本文的计算结果与采用变分微积分给出的结果^[1]基本一致, 这也进一步验证了本文模型和计算方法的有效性。同样, 图 7 给出了条分法和本文方法所得条间力分布曲线。图 8 绘制了 ACADS 算

例题在不同优化算法所得到的滑面分布情况。从图 8 可以发现本文方法所得滑面位与另外两种方法基本一致。存在的些许差异是由于坡顶存在张拉裂缝。根据边坡的实际破坏模式来看, 将张拉裂缝的因素考虑进去, 边坡会趋于失稳。

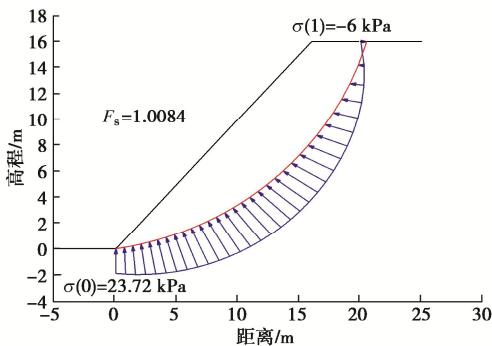


图 5 最危险滑面及正应力分布

Fig. 5 Most dangerous slip surface and normal stress distribution

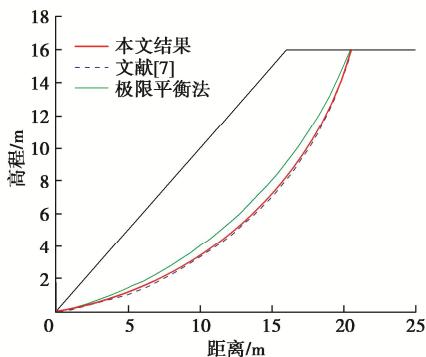


图 6 本文方法与其他方法滑面位置对比

Fig. 6 Comparison of sliding surface positions between proposed and other methods

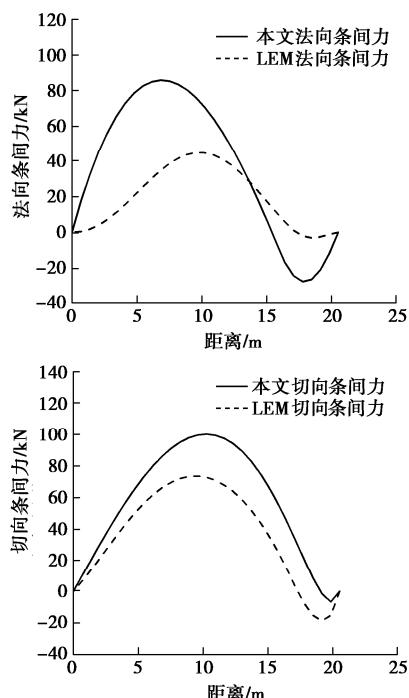


图 7 法向和切向条间力分布曲线

Fig. 7 Distribution curves of normal and tangential inter-strip force

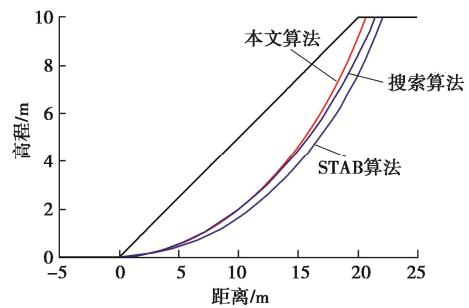


图 8 ACADS 算例滑面位置比较

Fig. 8 Comparison of slip surface positions of ACADS example between proposed and other methods

3 结 论

结合边坡稳定性分析中的极限平衡法, 利用变分原理将边坡稳定性问题转化为具有约束条件的泛函极值问题, 并建立了问题的状态方程, 采用变量替换将问题最终转化为固定边界下的两点边值问题。结合数值算例, 采用打靶法获得了问题的精确解答, 并与已有结果进行比较, 验证了本文模型和计算方法的有效性。

(1) 与传统的极限平衡法相比较, 变分极限平衡法在数学上更为严谨, 结果更加正确可靠。

(2) 打靶法可以对问题的控制方程进行有效的求解, 能够准确快捷地获得满足精度要求的安全系数、滑动面位置和形状、滑动面上的法向应力以及条间力的分布。文中虽然以简单土坡为例, 但本文方法同样适用于其它复杂的二维边坡分析。

参考文献:

- [1] CHENG Y M, LANSIVAARA T, WEI W B. Two-dimensional slope stability analysis by limit equilibrium and strength reduction methods[J]. Computers and Geotechnics, 2007, 34(3): 137-150.
- [2] KOP'ASCY J. Three-dimensional stress distribution and slip surfaces in earth works at rupture[C]// Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, 1957(1): 339-342.
- [3] BAKER R, GARBER M. Theoretical analysis of the stability of slopes[J]. Géotechnique, 1978, 28(4): 395-411.
- [4] CASTILLO E, LUCEÑO A. A critical analysis of some variational methods in slope stability analysis[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1982, 6(2): 195-209.
- [5] 栾茂田, 金崇磐, 林 奠, 等. 层状非均质土坡抗震稳定性的变分解法[J]. 地震工程与工程振动, 1993, 13(4): 73-80.

- [5] LUAN Maotian, JIN Chongpan, LIN Gao, et al. Variational procedure for aseismic stability of layered soil slopes[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1993, **13**(4): 73-80. (in Chinese))
- [6] LESHCHINSKY D. Slope stability analysis: generalized approach[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1990, **116**(5): 851-867.
- [7] CHEN R L M T, HE Z H. Critical height of slopes in homogeneous soil: The variational solution[J]. Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **14**: 1-12.
- [8] LI X, LIU W. Study on the action of the active earth pressure by variational limit equilibrium method[J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **34**(10): 991-1008.
- [9] 陈建功, 李会, 贺自勇. 基于变分法的均质土坡稳定性分析 [J]. 岩土力学, 2019, **40**(8): 2931-2937. (CHEN Jiangong, LI Hui, HE Ziyong. Homogeneous soil slope stability analysis based on variational method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, **40**(8): 2931-2937. (in Chinese))
- [10] SARKAR S, CHAKRABORTY M. Pseudo-static slope stability analysis for cohesive-frictional soil by using variational method[M]// Lecture Notes in Civil Engineering. Singapore: Springer Singapore, 2020: 159-171.
- [11] FILIPOV S M, GOSPODINOV I D, FARAGÓ I. Replacing the finite difference methods for nonlinear two-point boundary value problems by successive application of the linear shooting method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, **358**: 46-60.
- [12] 钱伟长. 变分法及有限元-上册[M]. 北京: 科学出版社, 1980. (QIAN Weichang. Variational Method and Finite Element Method-Volume I[M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese))
- [13] ZHOU F X, LI S R, LAI Y M. Three-dimensional analysis for transient coupled thermoelastic response of a functionally graded rectangular plate[J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, **330**(16): 3990-4001.
- [14] ZHOU F X, MA Q. Exact solution for capillary interactions between two particles with fixed liquid volume[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, **37**(12): 1597-1606.
- [15] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析: 原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zuyu. Soil Slope Stability Analysis[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2003. (in Chinese))
- [16] 黄晓锋, 石崇, 朱珍德, 等. 基于粒子群优化算法的边坡临界滑动面搜索方法[J]. 防灾减灾工程学报, 2014, **34**(6): 751-757. (HUANG Xiaofeng, SHI Chong, ZHU Zhende, et al. Determination method of critical slip surface based on PSO Algorithm[J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2014, **34**(6): 751-757. (in Chinese))
- [17] 邓东平, 李亮. 水平条分法下边坡稳定性分析与计算方法研究[J]. 岩土力学, 2012, **33**(10): 3179-3188. (DENG Dongping, LI Liang. Analysis of slope stability and research of calculation method under horizontal slice method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(10): 3179-3188. (in Chinese))