

DOI: 10.11779/CJGE20220317

# 基于两级光滑边域混合单元的弹塑性二阶锥规划方法

刘锋涛<sup>1</sup>, 周锡文<sup>2</sup>, 张澄博<sup>2</sup>, 戴北冰<sup>3</sup>, 莫红艳<sup>1</sup>

(1. 桂林理工大学土木与建筑工程学院, 广西 桂林 541004; 2. 中山大学地球科学与工程学院, 广东 广州 510275;

3. 中山大学土木工程学院, 广东 广州 510275)

**摘要:** 弹塑性增量分析的数学规划方法是分析岩土工程变形和强度问题的有效途径之一, 在处理非光滑屈服面、接触和多屈服面等复杂问题时具有独特的优势。为进一步简化计算和克服体积锁定问题, 在广义 Hellinger-Reissner (GHR) 变分原理的基础上, 提出一种新型混合常应力-两级光滑边域的三节点三角形单元, 在关联流动法则和 Mohr-Coulomb 屈服准则条件下, 将弹塑性增量问题转化为标准的二阶锥规划问题, 并将黏-摩擦接触条件转化为锥约束条件引入到弹塑性增量分析的二阶锥规划问题中, 随后采用高效的原对偶内点算法对其进行求解。最后将新方法用于岩土工程中两类经典问题的弹塑性数值分析。结果表明: 新方法在计算效率、收敛性和精度方面均优于传统六节点三角形混合单元。  
**关键词:** 弹塑性增量分析; 二阶锥规划; 常应力-光滑应变混合单元; 两级光滑边域

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)05-1045-09

**作者简介:** 刘锋涛(1979—), 男, 博士, 主要从事岩土工程数值计算方法及其应用的教学和科研。E-mail: celiuft@glut.edu.cn。

## Elastoplastic second-order cone programming based on mixed elements using a two-level mesh repartitioning scheme

LIU Fengtao<sup>1</sup>, ZHOU Xiwen<sup>2</sup>, ZHANG Chengbo<sup>2</sup>, DAI Beibing<sup>3</sup>, MO Hongyan<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China; 2. School of Earth Science and

Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China; 3. School of Civil Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou

510275, China)

**Abstract:** The mathematical programming approach of elastoplastic incremental analysis is one of the effective ways to analyze deformation and strength problems in geotechnical engineering and has unique advantages in dealing with the complex problems such as non-smooth yield surface, contact conditions and multi-surface plasticity. To further simplify the computational framework and overcome the volumetric locking, a novel mixed constant stress-smoothed strain three-node triangle element with a two-level mesh repartitioning scheme is proposed to discretize the generalized Hellinger-Reissner (GHR) variational principle, the boundary value problem of elastoplastic problem can be reformulated as a conic programming problem under the constraint of the associated flow rule, and the cohesive-frictional contact condition is treated as a set of conic constraints and introduced into the conic programming problem of the elastoplastic incremental analysis. Then, an efficient primal-dual interior point algorithm is used to solve it. Finally, the proposed method is applied to two classical geotechnical engineering problems. The results show that the new method is superior to the traditional mixed six-node triangular element in terms of the computational efficiency, convergence and accuracy.

**Key words:** elastoplastic incremental analysis; second-order cone programming; mixed constant stress-smoothed strain element; two-level mesh repartitioning scheme

## 0 引言

弹塑性有限元方法是岩土工程中分析强度和变形问题的重要手段之一。岩土材料复杂本构特性, 往往导致弹塑性力学的控制方程产生了高度的非线性, 且对于实际工程而言, 不可避免的面临大规模问题的求解困难。因此研究此类大规模高度非线性问题的高效

方法一直是弹塑性有限元的核心问题。

在传统弹塑性有限元方法中, 首先根据问题的当

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(52078507); 广东省自然科学基金项目(2018A030313897); 桂林理工大学科研启动项目(GUTQDJJ2021083)

**收稿日期:** 2022-03-23

**\*通信作者** (E-mail: daibb@mail.sysu.edu.cn)

前状态计算弹塑性力学边值问题的位移增量,进而在此基础上采用返回映射算法<sup>[1]</sup>在积分点上进行应力状态的更新。由于初始状态与实际状态的差异,会产生整体不平衡力,通常可采用牛顿类算法的迭代将该不平衡力残差最小化。然而此迭代计算不仅依赖于初始状态,收敛性不能得到保证,并对于大规模问题,计算量巨大。此外,在处理非光滑的屈服面时,返回映射算法也难以保证计算的收敛性<sup>[2]</sup>。

另一方面弹塑性力学边值问题还可以利用非线性数学规划方法进行求解。这类方法最早由 Capurso 等<sup>[3]</sup>提出,在应力更新时利用数学规划法自动识别塑性流动区域<sup>[4]</sup>。与返回映射算法相比,数学规划方法具有一些独特的优势,一旦建立了相关的变分原理,它可以适用于各种不同类型的离散方法,也可以将不同本构关系、接触条件和其它约束条件包含在统一的计算框架下<sup>[5]</sup>。在 GHR 变分原理的基础上,弹塑性力学边值问题最终可以转化为二阶锥规划问题,并可以利用高效的原对偶内点算法进行求解<sup>[6-8]</sup>,进而此类方法越来越被重视,并应用于各种岩土工程问题中,如边坡稳定<sup>[9]</sup>、基础极限承载力<sup>[10]</sup>、饱和多孔介质的固结分析<sup>[11-12]</sup>、滑坡中的大变形模拟等<sup>[13-14]</sup>。

在 GHR 变分原理中应力和位移都是自变量函数,一般需要采用应力-位移混合单元进行离散。线性连续位移-常应力混合单元在全塑性阶段容易发生体积锁定和精度损失<sup>[15]</sup>。因此,经常采用高阶混合单元克服上述不足,如六节点三角形混合单元<sup>[5]</sup>和 8 节点的四边形单元<sup>[10-11]</sup>。然而,与低阶混合单元相比,高阶单元离散化难度变大,需要求解问题的规模更大,不可避免地影响计算效率。

将应变光滑方法<sup>[16]</sup>与传统有限元相结合的光滑有限元 (S-FEM)<sup>[17-18]</sup>的提出为解决低阶单元的体积锁定和精度损失提供了一条新的有效途径。如:边光滑域单元 (edge-based S-FEM, ES-FEM)<sup>[19]</sup>,点光滑域单元 (node-based S-FEM, NS-FEM)<sup>[20]</sup>等。NS-FEM 虽然可以避免体积锁定,但却存在“过软”和零能模式问题,易出现精度低和不稳定现象<sup>[18]</sup>。相反地,ES-FEM 不存在 NS-FEM 的缺点,却存在体积锁定的问题<sup>[17]</sup>。在此基础上,一种新型改进的 ES-FEM 方法被提出<sup>[21-22]</sup>,此方法通过构建两级光滑边域增加单元的自由度的策略,解决了体积锁定的问题,同时还继承了传统 ES-FEM 高精度优点。在文献[22]中将改进的 ES-FEM 命名为 selective ES-FEM (sES-FEM),并结合塑性力学上限定理用于计算结构的极限载荷和破坏模式。

本文在结合二阶锥规划方法和 sES-FEM 两者优

点的基础上提出了一种新的常应力-两级光滑边域混合单元 (Mixed sES-FEM),首先采用两级光滑边域的策略构造应变光滑域,并假设光滑域内的应力为常数。在此基础上,利用新混合单元离散考虑黏-摩擦接触<sup>[23-24]</sup>的 GHR 变分原理,最终将弹塑性增量问题的边值问题转化为一个二阶锥规划 (second order cone programming, SOCP) 问题,并通过高效的原对偶内点算法 (Primal-dual interior point algorithm, PDIP)<sup>[25]</sup>进行求解。最后,通过两类典型岩土工程问题的分析,验证了新方法的效率和精度,为岩土工程弹塑性增量分析提供了一种高效和高精度的算法。

## 1 弹塑性增量分析的数学规划模型

根据 GHR 变分原理<sup>[5-7]</sup>,可以证明在关联流动法则的前提下,弹塑性增量边值问题的基本控制方程与下列约束变分原理的驻值条件等价,

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u} \max_{\sigma_{n+1}} & \int_{\Omega} \sigma_{n+1}^T \nabla(\Delta u) d\Omega - \int_{\Omega} b^T(\Delta u) d\Omega - \\ & \int_{\Gamma} t^T(\Delta u) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{1}{2}(\Delta \sigma)^T C(\Delta \sigma) d\Omega \\ \text{s.t. } & F(\sigma_{n+1}) \leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $\Omega$  为弹塑性体的求解域,其边界为  $\Gamma$ ,且满足  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ ,  $\Gamma_u$  为位移边界,  $\Gamma_\sigma$  则是力边界;  $F(\sigma)$  为屈服函数;  $C$  为柔度矩阵;  $\Delta u = u_{n+1} - u_n$  和  $\Delta \sigma = \sigma_{n+1} - \sigma_n$  分别为  $n$  到  $n+1$  步的位移增量和应力增量。

在式 (1) 的基础上,可以引入图 1 所示的黏-摩擦接触模型。

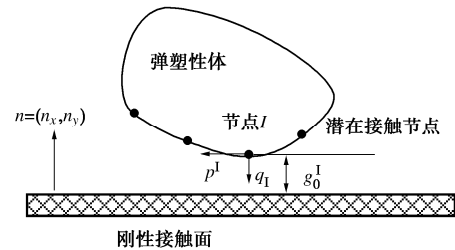


图 1 黏-摩擦接触示意图

Fig. 1 Schematic graph of frictional-cohesive contact

此接触模型包括两类约束,其一为防止节点穿透刚性接触面的约束条件<sup>[23]</sup>,

$$g^I = g_0^I + (\Delta u_{n+1}^I)^T n^I \geq 0 \quad (p^I g^I = 0) \quad (2)$$

式中:  $g^I$  为节点  $I$  与刚性接触面之间的距离;  $g_0^I$  则为此距离的初始值;  $\Delta u_{n+1}^I$  为节点  $I$  处的位移增量;  $n^I$  为接触面的单位外法线;  $p^I$  为节点  $I$  处的切向向量。其次节点接触力还应满足 Mohr-Coulomb 屈服条件的约束<sup>[24]</sup>,

$$F_b(p^I, q^I) = |q^I| - (\tan \varphi^I \cdot p^I + c^I A^I) \leq 0 \quad (3)$$

式中:  $q^l$  为接触力;  $\varphi^l$  为刚性接触面的摩擦角;  $c^l$  为接触面的黏聚力;  $A^l$  为接触面积。上述两个接触约束条件式 (2), (3) 可以直接引入到 GHR 变分原理<sup>[24]</sup>,

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u} \max_{\sigma_{n+1}} & \int_{\Omega} \sigma_{n+1}^T \nabla(\Delta u) d\Omega - \int_{\Omega} b^T(\Delta u) d\Omega - \\ & \int_{\Gamma} t^T(\Delta u) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\Delta \sigma)^T C(\Delta \sigma) d\Omega - \sum_{l=1}^{N_b} p^l g^l, \\ \text{s.t. } & F(\sigma) \leq 0, F_b(p^l, q^l) \leq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

式中:  $N_b$  为接触面的个数。同样式 (4) 的极值条件与考虑黏-摩擦接触的弹塑性增量分析边值问题的所有控制方程等价<sup>[23-24]</sup>。

## 2 应力-光滑应变混合单元

在式 (1), (4) 中, 位移场和应力场都是参与变分的自变函数, 需要应力-位移的混合单元进行离散。为了进一步提高计算效率、精度和克服体积锁定问题, 本文提出了一类新的混合单元 Mixed-sES-FEM。

### 2.1 两级光滑边域有限元 (sES-FEM)

如图 2 所示, 在 sES-FEM 中采用两级网格剖分方案<sup>[21]</sup>, 其中一级网格由三节点三角形单元构成, 二级网格则是在一级网格的基础上, 将每个三角形单元沿形心细分为三个子三角形单元。然后依据一级网格的每条边构建光滑边域, 如图 2 (b) 所示第  $k$  条边所在的光滑域是由与其相邻的两个子三角形组成。在此光滑边域上, 光滑应变为<sup>[21-22]</sup>

$$\tilde{\varepsilon}_k = \frac{1}{A_k^s} \sum_{e=1}^N A_e \varepsilon_e = B_k^s \hat{u} \quad (5)$$

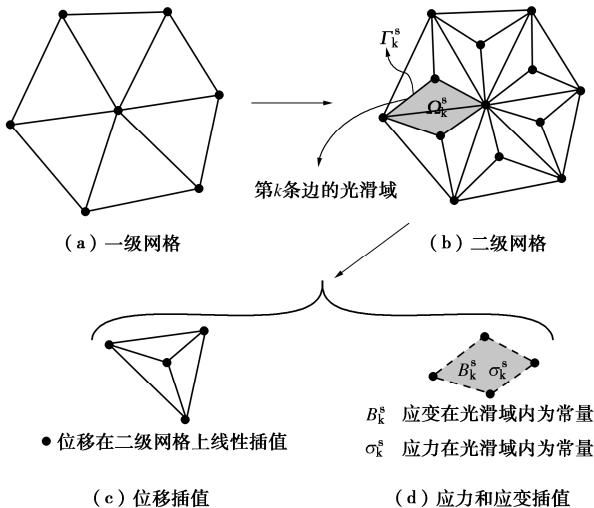


图 2 基于 sES-FEM 的混合常应力光滑应变单元

Fig. 2 Mixed constant stress-smoothed strain element based on sES-FEM

式中:  $\tilde{\varepsilon}_k$  为第  $k$  个光滑边域内的光滑应变,  $N=1$  或  $2$ , 表示组成光滑边域的子三角形个数,  $A_k^s$  为第  $k$  个光滑边域的面积,  $A_i$  为子三角形的面积,  $\varepsilon_e$  为子三角形单

元的应变,  $B_k^s$  为第  $k$  个光滑边域的应变位移矩阵,

$$B_k^s = \frac{1}{A_k^s} \sum_{e=1}^N B_u^e \quad (6)$$

式中:  $B_u^e$  为构成第  $k$  个光滑域的子三角形单元的应变位移矩阵 (与经典有限单元应变位移矩阵相同)。

在 sES-FEM 中位移插值在二级网格中的单元内进行, 如图 2 (c) 所示。在两级网格剖分的基础上, 进行位移插值和应变光滑, 增加了位移方程的个数, 使约束比  $r = n_{\text{FOD}}/n_c$  达到最佳值, 即  $r = 2$ , 从而克服低阶单元的体积锁定问题<sup>[21-22]</sup>。这里  $n_{\text{FOD}}$  表示离散系统的自由度总数,  $n_c$  为不可压缩条件的个数。

### 2.2 常应力-光滑应变混合单元

在 sES-FEM 的基础上, 本文提出了常应力-光滑应变的混合单元, 如图 2 (c), 2 (d) 所示, 它继承 sES-FEM 的位移插值和应变光滑方法, 同时假设光滑边域内的应力为常数,

$$\sigma = \sigma_k^s, \quad \varepsilon = B_k^s u = \varepsilon_k^s \quad (7)$$

式中:  $\sigma_k^s$  为第  $k$  个光滑边域的常应力, 即在图 2(d) 所示的光滑域内的应力为常量。

新单元继承了 sES-FEM 不受体积锁定困扰的优点, 同时实现了应力和应变在每个光滑边域内均为常数。不仅方便了离散过程, 而可以简化数值积分计算, 进而提高了计算的效率和精度。

## 3 sES-FEM 弹塑性二阶锥规划模型

在 Mixed-sES-FEM 的基础上, 分别将一般 GHR 变分原理和考虑黏-摩擦接触的情况进行离散, 并将其表述为标准的 SOCP 问题。

### 3.1 不考虑接触的情况

首先将弹塑性体的求解域剖分成一系列的三节点三角形单元, 在此基础上根据 2.1 节中所述方法构建  $N_s$  个光滑边域, 并完成位移插值、应变光滑和常应力设定, 进而将式 (7) 代入式 (1) 完成 GHR 变分原理的离散,

$$\begin{aligned} \min_{\Delta u} \max_{\sigma_{n+1}} & \sum_{k=1}^{N_s} A_k^s (\sigma_{n+1}^k)^T B_k^s \Delta u - f^T \Delta u - \\ & \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} A_k^s (\Delta \sigma_k)^T C(\Delta \sigma_k), \\ \text{s.t. } & F(\sigma_{n+1}^k) \leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

式中:  $f$  为等效节点荷载向量。对式 (8) 中的位移增量函数  $\Delta u$  使用一次变分极值条件, 则式 (8) 可以表示成如下的数学规划问题<sup>[5-8, 23-24]</sup>,

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k=1}^{N_s} A_k^s h_k \\ \text{s.t. } & \sum_{k=1}^{N_s} A_k^s (B_k^s)^T \sigma_{n+1}^k - f = 0, \\ & F(\sigma_{n+1}^k) \leq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

式中:  $h_k = \frac{1}{2}(\Delta\sigma_k)^T \mathbf{C}_k(\Delta\sigma_k)$ ;  $\mathbf{C}_k$  为第  $k$  个光滑边域的柔度矩阵, 一般为对称的半正定矩阵, 即对任意  $x \neq 0$ , 则有  $x^T \mathbf{C}_k x \geq 0$ , 故可以进行 Cholesky 分解, 即  $\mathbf{C}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k$ , 进而  $h_k$  可以表示为一个旋转的二阶锥约束<sup>[10-12]</sup>,

$$\begin{aligned} \kappa_k &= [h_k \quad y_k \quad \xi_k]^T, \\ \text{s.t. } \kappa_k &\in \mathcal{K}_r, \mathcal{K}_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid 2x_1 x_2 \geq \sum_{m=3}^m x_m^2 \right\}, \\ y_k &= 1, \quad \xi_k = \mathbf{Q}_k \Delta\sigma_k = \mathbf{Q}_k \sigma_{n+1}^k - \mathbf{Q}_k \sigma_n^k. \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $\mathcal{K}_r$  为旋转二阶锥约束集;  $\mathbb{R}^m$  表示一个  $m$  维的实向量空间。在式 (9) 中采用平面应变 Mohr-Coulomb 屈服准则, 其屈服函数可以表示成二次二阶锥<sup>[8]</sup>,

$$\begin{aligned} F(\sigma_{n+1}^k) &= \sqrt{(\rho_k^2)^2 + (\rho_k^3)^2} - \rho_k^1 \leq 0, \\ \rho_{n+1}^k &= [\rho_k^1 \quad \rho_k^2 \quad \rho_k^3]^T, \\ \text{s.t. } \rho_{n+1}^k &= \mathbf{D}^k \sigma_{n+1}^k + \mathbf{d}^k, \\ \rho_{n+1}^k &\in \mathcal{K}_q, \mathcal{K}_q = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 \geq \sqrt{\sum_{j=2}^m x_j^2} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

式中:  $\mathcal{K}_q$  为二次二阶锥集合;  $\rho_{n+1}^k$  为辅助变量;  $\mathbf{D}^k$  和  $\mathbf{d}^k$  分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^k &= \begin{bmatrix} -\sin \varphi_k & -\sin \varphi_k & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{d}^k &= \begin{bmatrix} 2c_k \\ \cos \varphi_k \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

将式 (10) ~ (12) 代入式 (9) 后得到

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k=1}^{N_s} A_k^s h_k \\ \text{s.t. } & \sum_{k=1}^{N_s} A_k^s (\mathbf{B}_k^s)^T \sigma_{n+1}^k - f = 0, \\ & \rho_{n+1}^k = \mathbf{D}^k \sigma_{n+1}^k + \mathbf{d}^k. \end{aligned} \quad (13)$$

在 (13) 中目标函数、第一项和第二项约束条件均为线性方程, 而第三项和第四项约束均为二阶锥约束, 由此可见, 式 (13) 为一个标准的 SOCP 问题。

### 3.2 考虑接触的情况

刚体与变形体的黏-摩擦接触模型式 (4) 已经被引入到 GHR 变分原理中, 此时土体部分求解域内变分原理的离散与 3.1 节中的过程大致相同, 刚体无需离散。因此将式 (7) 代入式 (4) 后可以得到离散后的考虑接触问题的广义变分原理的离散形式,

$$\begin{aligned} \min & \sum_{k=1}^{N_s} A_k^s h_k + \sum_{l=1}^{N_b} g^l p^l \\ \text{s.t. } & \sum_{k=1}^{N_s} A_k^s (\mathbf{B}_k^s)^T \sigma_{n+1}^k - f = 0, \\ & \rho_{n+1}^k = \mathbf{D}^k \sigma_{n+1}^k + \mathbf{d}^k, \\ & \bar{p}^l = \tan \varphi^l \cdot p^l + c^l A^l, \end{aligned}$$

$$p^l = [\bar{p}^l \quad q^l]^T \in \mathcal{K}_q. \quad (14)$$

可以看出式 (14) 也是一个标准的 SOCP 问题。此外上述两种情况中位移边界条件施加可以采用文献 [13] 中的修正变分原理的方法, 最终式 (13), (14) 的 SOCP 都可以采用高效的 PDIP 算法进行求解。

## 4 算 例

首先通过条形浅基础地基承载力分析验证文中提出的新方法, 其次分析了活动门 (trapdoor) 问题。计算的硬件配置为 Intel(R) Core (TM) i5-8265U CPU, 2.7 GHz, 双核, 8GB RAM, 算例中的 SOCP 问题采用商业软件 Mosek<sup>[26]</sup> 中的 PDIP 算法进行求解。

### 4.1 条形浅基础承载力分析

考虑到对称性可取条形基础的一半作为分析对象 (图 3), 基础宽度为  $B = 2$  m, 基底为光滑接触。为了排除边界效应的影响, 取深度为  $H = 10$  m, 宽度为  $W = 30$  m, 其余边界条件如图 3 所示。假设土体服从 Mohr-Coulomb 屈服准则, 不排水抗剪强度  $c_u = 100$  kPa, 弹性模量  $E = 100$  MPa, 泊松比  $\nu = 0.49$ , 忽略土的重度, 即  $\gamma = 0$ , 地基承载力采用极限承载力系数  $N_c$  为

$$N_c = F / c_u B. \quad (15)$$

式中:  $F$  为地基承载力, 即图 3 中所示分布荷载的合力。对此模型地基承载力系数的 Prandtl 的解为<sup>[24]</sup>

$$N_c = \left[ \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) e^{\pi \tan \varphi} - 1 \right] \cot \varphi. \quad (16)$$

当  $\varphi = 0$  时,  $N_c = 2 + \pi$ , 以此作为算例验证依据。

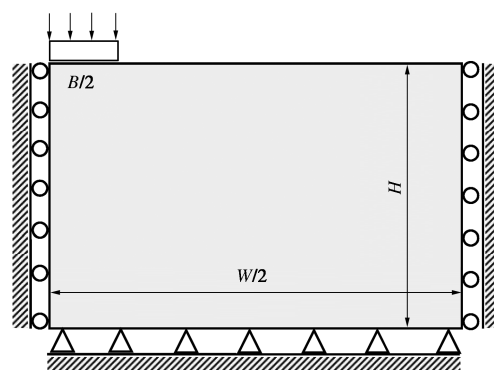


图 3 条形浅基础平面应变模型

Fig. 3 Plane strain model for shallow strip footing

在 Mixed-sES-FEM 的基础上, 建立求解地基承载力分析的二次锥规划模型, 加载过程由刚性地基的位移增量控制, 总的增量为 0.06 m。按不同加载步完成条形基础的总位移增量, 包括 1, 5, 15, 50 步, 如按 50 步加载时, 每一步位移增量为  $0.06/50 = 0.0012$  m。图 4 中是对应不同加载步的荷载-位移曲线, 从图 4

中看出, 除了一步增量解之外, 不同加载步对应的曲线重合, 说明文中的弹塑性问题的二阶锥方法受到加载步长的影响很小。与传统的 Newton-Raphson 方法相比, 具有一定的优势。此外, 本例中泊松比为 0.49 已经非常接近体积不可压缩条件, 但计算结果并未出现体积锁定的问题。

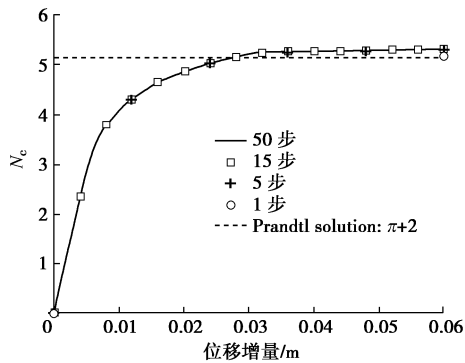


图4 不同加载步的位移-加载曲线

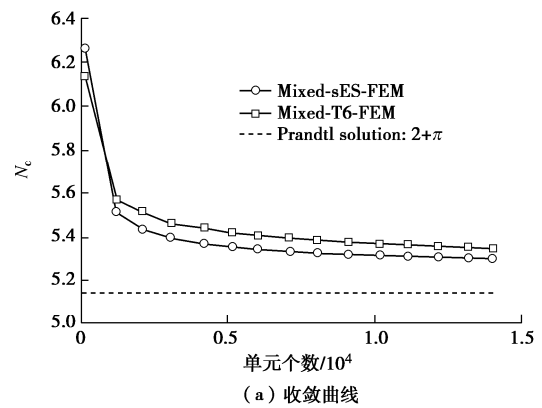
Fig. 4 Load-displacement curves with different loading steps

图5中在相同网格的前提下将新方法与文献[10]中基于混合高阶六节点三角形单元 (Mixed-T6-FEM) 的二阶锥规划方法的结果进行了对比。其中图5(a)为两种方法的收敛曲线, 图5(b)为两种方法的极限荷载系数  $N_c$  分别与相应解析解相对误差, 从图中可以看出文中新方法的计算精度高于 Mixed-T6-FEM。根据文献[27]中分析, Mixed-T6-FEM 单元的约束比  $r = n_{\text{FOD}}/n_c \approx 4/3$ , 而如前文所述, 文中新方法的约束比为  $r = 2$ , 说明文中新方法在克服体积锁定方面优于 Mixed-T6-FEM, 这也是新方法计算精度高于 Mixed-T6-FEM 的原因。图5(c)则是在两种方法中 Mosek 求解器占用 CPU 的耗时。从这些图中可以看出文中所提出的方法在计算精度、收敛速度和效率方法均优于高阶的六节点混合单元。

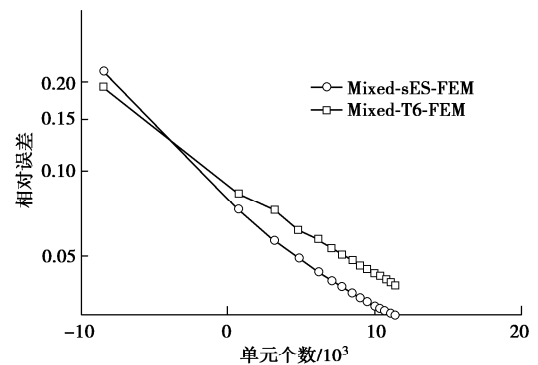
为了说明网格畸变对文中新方法影响, 可以在较高质量单元的网格 (图6(a)) 基础上, 对节点坐标增加一个随机扰动量<sup>[19]</sup>,

$$\begin{cases} x = x_0 + r\Delta x \cdot d, \\ y = y_0 + r\Delta y \cdot d. \end{cases} \quad (17)$$

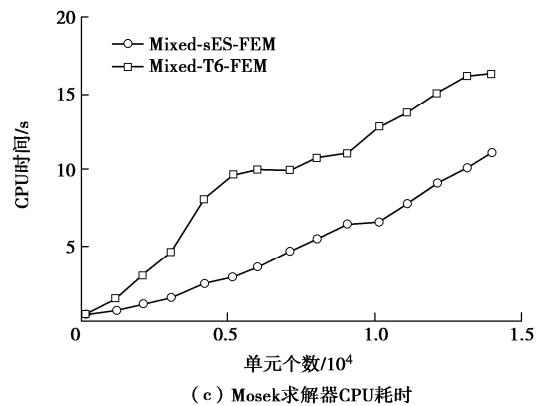
式中:  $(x_0, y_0)$ ,  $(x, y)$  分别为增加随机扰动前后节点坐标;  $r \in [-1, 1]$  为服从均匀分布的随机数;  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  为扰动前网格中单元沿  $x$ ,  $y$  轴方向上的大小 (对于三角形单元即为 3 个顶点沿  $x$  和  $y$  轴方向最大与最小坐标之差);  $d \in [0, 1]$  则为控制扰动水平的参数, 如  $d = 0$  表示未增加任何扰动的初始网格 (通常具有较高的单元质量, 如图6(a)所示),  $d = 0.9$  表示在图6(a)的基础上随机增加了一个较大的扰动, 网格中单元产生了比较大的畸变 (图6(b))。



(a) 收敛曲线



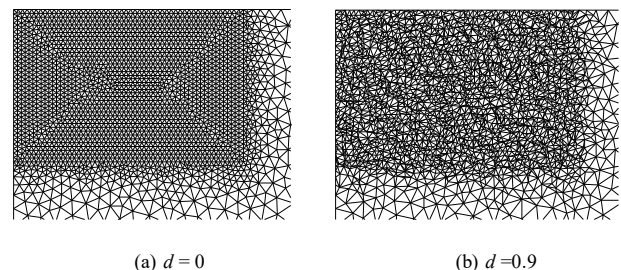
(b) 相对误差



(c) Mosek求解器CPU耗时

图5 不同方法的对比分析

Fig. 5 Comparative analysis of different methods



(a)  $d = 0$

(b)  $d = 0.9$

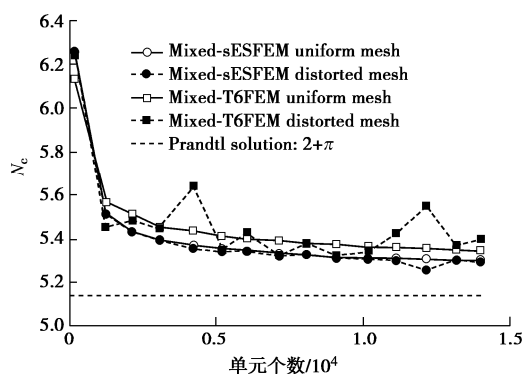
图6 随机畸变网格

Fig. 6 Randomly disturbed meshes

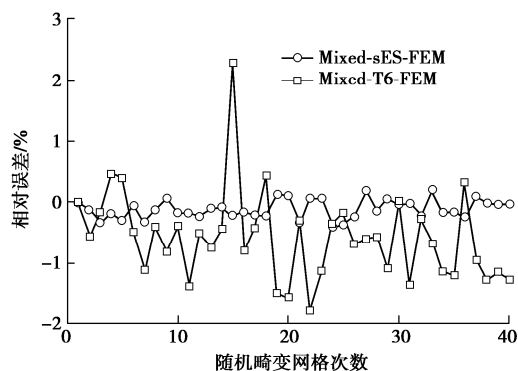
在图6中的随机畸变网格前后的基础上, 分别采用基于 Mixed-sES-FEM 和 Mixed-T6-FEM 两种二阶锥规划方法计算了刚性条形基础的极限荷载系数  $N_c$ , 并与 Prandtl 解进行了对比。如图7(a)所示, 不同方法采用图6(a), 6(b)所示的网格时分别计算出的

$N_c$  随单元数目增加的收敛曲线, 可以看出 Mixed-T6-FEM 受到网格畸变的影响比较明显, 而文中所提出的 Mixed-sES-FEM 却对网格的畸变不敏感。如图 7 (b) 所示, 按均匀分布随机获取 40 组畸变网格, Mixed-sES-FEM 的最大相对误差不超过 0.5%, 而 Mixed-T6-FEM 计算的最大相对误差超过了 2%。综合图 7 的结果可以说明, 文中所提出的新方法受到网格畸变的影响比较小。

综合上述分析可以看出, 文中所提出的基于 Mixed-sES-FEM 的二阶锥规划模型在收敛性、计算精度、网格畸变的敏感性等方面具有一定的优势。



(a) 收敛曲线



(b) 相对误差

图 7 网格敏感性对比

Fig. 7 Comparison of sensitivities to distorted meshes

#### 4.2 活动门 (trapdoor) 问题

活动门或陷阱门 (trapdoor) 试验 (图 8) 最早由 Terzaghi 用于验证土拱效应的存在<sup>[28]</sup>。活动门的稳定性通常采用稳定数表示<sup>[30]</sup>

$$N_c = (\gamma H + \sigma_s - \sigma_t) / c_u \quad (18)$$

式中:  $c_u$  为土层的排水抗剪强度指标;  $\sigma_s$  为土层上表面超载;  $\sigma_t$  为活动门上作用的均匀分布的外荷载,  $H$  为活动门上土层厚度;  $B$  为活动门的宽度。

根据对称性, 选取模型的右半部分作为分析对象, 假设土服从 Mohr-Coulomb 屈服准则, 排水抗剪强度  $c_u = 10 \text{ kPa}$ , 弹性模量  $E = 100 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 土的重度为  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ 。建立基于 Mixed-sES-FEM 的弹塑性增量的 SOCP 模型, 活动门与土之间采用图

1 所示的摩擦接触模型, 接触摩擦角为  $\phi_c$ 。加载过程采用活动门位移控制, 向下总位移增量为  $0.04 \text{ m}$  (分 10 步加载), 即活动门上土层以主动失稳模式进入塑性阶段。

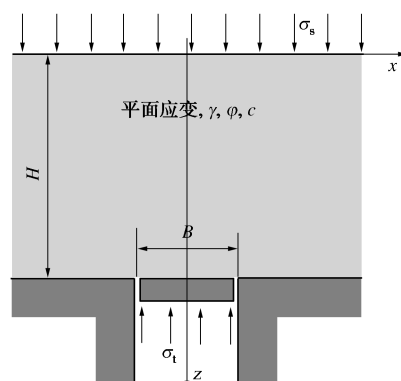


图 8 活动门问题模型

Fig. 8 Trapdoor problem

本文中不排水主动失稳模式的活动门问题的机械分析上限解为<sup>[29]</sup>

$$N_c \leq f(\alpha, \beta, \delta) \quad (19)$$

式中:  $\alpha, \beta, \delta$  为控制运动许可速度场和失稳模式的优化决策变量, 如图 10 (b) 所示。

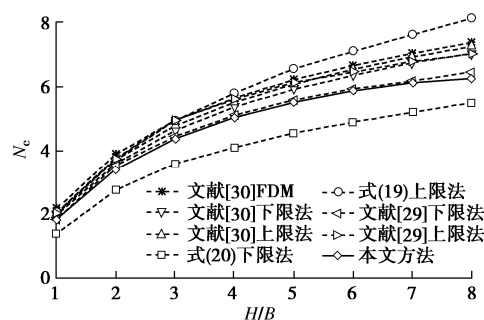


图 9 等效塑性应变增量

Fig. 9 Increments of equivalent plastic strain

通过优化这些决策变量使式 (19) 右端函数 (具体表达式见文献[29]) 取极小值即为稳定数  $N_c$  的上限解。当  $H/B \geq 1/2$  时, 下限解可为<sup>[29]</sup>

$$N_c = 2 \ln(2H/B) \quad (20)$$

在此基础上, 图 9 中对比了采用本文方法、有限差分法、极限分析的上限法和下限法计算得出的稳定数  $N_c$ , 其中, 文献[29, 30]中均采用的是有限元上限和下限法, FDM 是文献[30]中所采用的有限差分法。由图可见, 本文提出的弹塑性增量二阶锥规划方法、文献[29, 30]的稳定数  $N_c$  的计算结果都介于式 (19), (20) 极限分析的上、下限解之间。本文稳定数  $N_c$  的计算结果与文献[29]中的有限元下限解基本一致。图 10 中绘制了  $B=2 \text{ m}$ ,  $H$  分别是 4, 10 m 两种情况下当活动门位移增量达到  $0.04 \text{ m}$  时的等效塑性应变增量分布云图, 同时画出了上限解对应的破坏模式, 红色直线代表了破坏时形成的剪切破坏面。由此可见,

本文方法分析活动门稳定问题的结果是可靠的。

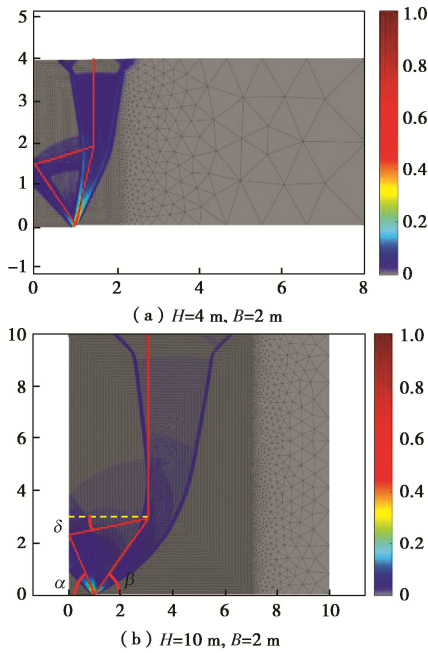


图 10 不同方法计算出的稳定数

Fig. 10 Stability numbers of different methods

图 11 是当  $H=4\text{ m}$ ,  $B=2\text{ m}$  时活动门达到总位移时土层中应力分量的分布情况。图 11 (a) ~ 11 (c) 分别是  $x$  方向正应力  $\sigma_x$ ,  $z$  方向正应力  $\sigma_z$  及剪应力  $\tau_{xz}$  云图。从图 11 中可以看到与活动门接触部分的土体中 3 个应力分量都不是均匀分布的, 这说明活动门在向下位移增加过程中, 原始的自重应力场发生了重分布。

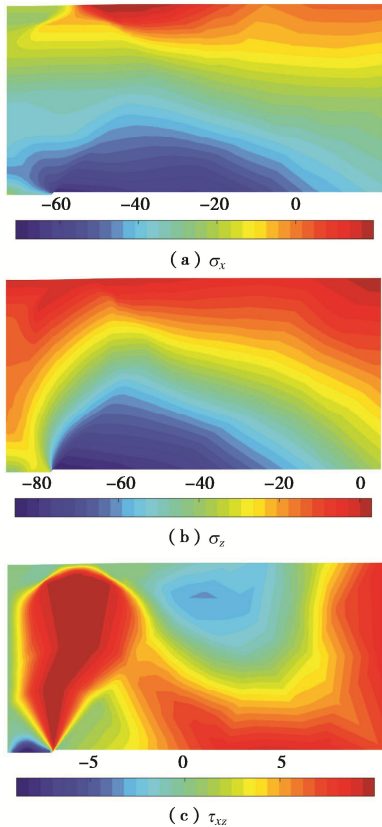


图 11 应力分布云图 ( $H=4\text{ m}$ ,  $B=2\text{ m}$ )

Fig. 11 Contours of stresses ( $H=4\text{ m}$ ,  $B=2\text{ m}$ )

为进一步分析活动门受到土层的压力与接触摩擦角  $\phi_c$  之间的关系, 建立另一个黏-摩擦土的数值模型, 假设土服从 Mohr-Coulomb 屈服准则, 抗剪强度指标为  $\varphi = 10^\circ$ ,  $c = 10\text{ kPa}$ , 弹性模量  $E = 100\text{ MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 土的重度为  $\gamma = 18\text{ kN/m}^3$ , 土与活动门间接接触摩擦角  $\phi_c$  以  $5^\circ$  的等间隔从  $0^\circ$  逐步增加到  $30^\circ$ 。

图 12 (a) ~ 12 (c) 中为活动门达到最终位移时活动门上受到土体的压应力分量  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ , 其中横轴是活动门的归一化位置坐标。从中可见随接触摩擦角的增大, 正应力分量出现逐渐减小的趋势, 而界面上的剪应力则逐渐增大, 由此可说明当接触从光滑变成粗糙的情形时, 接触面上的应力逐步由挤压的状态转向剪切的应力状态。并且当  $\phi_c \geq 20^\circ > \varphi = 10^\circ$  时, 3 个应力分量分布情况基本一致, 不再发生变化, 由

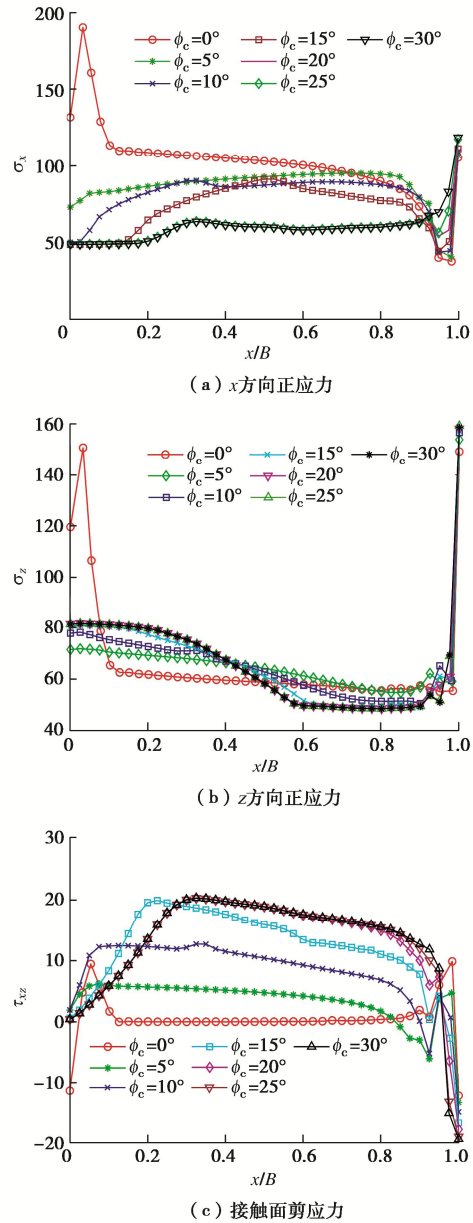


图 12 活动门上应力分布

Fig. 12 Distribution of stress on trapdoor



此可以推断,当接触摩擦角小于土的内摩擦角时,接触界面上土体会出现剪切破坏,而当接触摩擦角大于内摩擦角时接触面的塑性状态则无法启动,导致接触面不会发生剪切破坏。

## 5 结 论

本文在两级光滑边域有限元的基础上提出了一种新型两级光滑边域混合常应力的三节点三角形单元,用于弹塑性增量问题的 GHR 变分原理的离散,最终将弹塑性增量的边值问题转化为二阶锥规划模型,并采用高效的 PDIP 算法进行求解。此外,在新方法中还引入了刚体与变形体之间的黏-摩擦型接触模型,进而可以分析土与结构之间的相互作用。通过两个典型问题的分析,得到 3 点结论。

(1) 在数值计算的收敛性方面,基于二阶锥规划的弹塑性增量分析方法对加载步长的影响不敏感,因此可以通过增加步长减少计算步,从而提高计算效率。

(2) 新型混合三节点三角形单元不仅克服体积锁定问题,而且在网格发生畸变、单元质量变差的情况下也可以保证良好的收敛性,在精度、效率和收敛性方面均优于传统的六节点三角形混合单元。

(3) 通过新方法对活动门与土体的接触分析,发现接触面摩擦角和土层的内摩擦角是控制活动门与土体相互作用的重要因素,它们之间的相对大小决定了接触面上应力状态。

### 参考文献:

- [1] SIMO J C, HUGHES T J R. Computational Inelasticity[M]. New York: Springer, 1998.
- [2] 郑 宏, 张 谭, 王秋生. 弹塑性有限元分析中几个难点问题的一揽子方案[J]. 岩土力学, 2021, 42(2): 301-314. (ZHENG Hong, ZHANG Tan, WANG Qiusheng. One package of schemes for some difficult issues in finite element plasticity analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, 42(2): 301-314. (in Chinese))
- [3] CAPURSO M, MAIER G. Incremental elastoplastic analysis and quadratic optimization[J]. Meccanica, 1970, 5(2): 107-116.
- [4] 李建宇, 张洪武. 解 Drucker-Prager 塑性问题的二阶锥互补法[J]. 计算力学学报, 2014, 31(3): 322-327. (LI Jianyu, ZHANG Hongwu. A second order cone complementarity approach for Drucker-Prager plasticity problems[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2014, 31(3): 322-327. (in Chinese))
- [5] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W, et al. An interior-point algorithm for elastoplasticity[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 69(3): 592-626.
- [6] KRABBENHØFT K. A variational principle of elastoplasticity and its application to the modeling of frictional materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(3/4): 464-479.
- [7] KRABBENHOFT K, LYAMIN A V. Computational cam clay plasticity using second-order cone programming[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 209-212: 239-249.
- [8] KRABBENHØFT K, LYAMIN A V, SLOAN S W. Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs[J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(5): 1533-1549.
- [9] 王冬勇, 陈 曦, 吕彦楠, 等. 基于二阶锥规划理论的有限元强度折减法及应用[J]. 岩土工程学报, 2019, 41(3): 457-465. (WANG Dongyong, CHEN Xi, LÜ Yuzhen, et al. Ultimate bearing capacity analysis of shallow strip footing based on second order cone programming optimized incremental loading finite element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2019, 41(3): 457-465. (in Chinese))
- [10] 王冬勇, 陈 曦, 于玉贞, 等. 基于二阶锥规划有限元增量加载法的条形浅基础极限承载力分析[J]. 岩土力学, 2019, 40(12): 4890-4896, 4924. (WANG Dongyong, CHEN Xi, YU Yuzhen, et al. Ultimate bearing capacity analysis of shallow strip footing based on second-order cone programming optimized incremental loading finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(12): 4890-4896, 4924. (in Chinese))
- [11] WANG L, ZHANG X, ZHANG S, TINTI S. A generalized Hellinger-Reissner variational principle and its PFEM formulation for dynamic analysis of saturated porous media[J]. Computers and Geotechnics, 2021, 132: 103994.
- [12] ZHANG X, SHENG D C, SLOAN S W, et al. Second-order cone programming formulation for consolidation analysis of saturated porous media[J]. Computational Mechanics, 2016, 58(1): 29-43.
- [13] ZHANG X, SHENG D C, SLOAN S W, et al. Lagrangian modelling of large deformation induced by progressive failure of sensitive clays with elastoviscoplasticity[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,



- 2017, **112**(8): 963-989.
- [14] ZHANG X, SLOAN S W, OÑATE E. Dynamic modelling of retrogressive landslides with emphasis on the role of clay sensitivity[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2018, **42**(15): 1806-1822.
- [15] NAGTEGAAL J C, PARKS D M, RICE J R. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, **4**(2): 153-177.
- [16] CHEN J S, WU C T, YOON S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **50**(2): 435-466.
- [17] LIU G R, DAI K Y, NGUYEN T T. A smoothed finite element method for mechanics problems[J]. *Computational Mechanics*, 2007, **39**(6): 859-877.
- [18] ZENG W, LIU G R. Smoothed finite element methods (S-FEM): an overview and recent developments[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2018, **25**(2): 397-435.
- [19] LIU G R, ZHANG G Y. Edge-based smoothed point interpolation methods[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2008, **5**(4): 621-646.
- [20] LIU G R, NGUYEN-THOI T, NGUYEN-XUAN H, et al. A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems[J]. *Computers & structures*, 2009, **87**(1-2): 14-26.
- [21] WU C T, HU W. A two-level mesh repartitioning scheme for the displacement-based lower-order finite element methods in volumetric locking-free analyses[J]. *Computational Mechanics*, 2012, **50**(1): 1-18.
- [22] NGUYEN-XUAN H, WU C T, LIU G R. An adaptive selective ES-FEM for plastic collapse analysis[J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2016, **58**: 278-290.
- [23] ZHANG X, KRABBENHOFT K, PEDROSO D M, et al. Particle finite element analysis of large deformation and granular flow problems[J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, **54**: 133-142.
- [24] MENG J J, ZHANG X, HUANG J S, et al. A smoothed finite element method using second-order cone programming[J]. *Computers and Geotechnics*, 2020, **123**: 103547.
- [25] ANDERSEN E D, ROOS C, TERLAKY T. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization[J]. *Mathematical Programming*, Springer, 2003, **95**(2): 249-277.
- [26] MOSEK ApS. The MOSEK optimization toolbox for MATLAB Manual Version 9.2(Revision 35)[R]. 2021.
- [27] ZHOU X W, LIU F T, JIN Y F, YIN Z Y, et al. A volumetric locking-free stable node-based smoothed finite element method for geomechanics[J]. *Computers and Geotechnics*, 2022, **149**: 104856.
- [28] TERZAGHI K T. *Theoretical Soil Mechanics*[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1943.
- [29] SLOAN S W, ASSADI A, PURUSHOTHAMAN N. Undrained stability of a trapdoor[J]. *Géotechnique*, 1990, **40**(1): 45-62.
- [30] SHIAU J, HASSAN M M. Undrained stability of active and passive trapdoors[J]. *Geotechnical Research*, 2020, **7**(1): 40-48.