

DOI: 10.11779/CJGE202203010

# 有限宽度填土挡墙主动土压力的普适解法

赖丰文<sup>1,2</sup>, 刘松玉<sup>\*1,2</sup>, 杨大禹<sup>1,2</sup>, 程月红<sup>3</sup>, 范钦建<sup>3</sup>

(1. 东南大学岩土工程研究所, 江苏 南京 211189; 2. 江苏省城市地下工程与环境安全重点实验室, 江苏 南京 211189;

3. 中亿丰建设集团股份有限公司, 江苏 苏州 215000)

**摘要:** 利用有限元极限分析方法(FELA), 揭示了平动模式下有限宽度填土主动破坏机理。结果发现, 有限土体条件下, 填土主要呈现多滑裂面破坏机理, 并呈“反射式”发展; 同时总结了不同工况下滑裂面数量。据此, 将有限填土划分为上部未滑裂区与下部滑裂区, 考虑墙后土拱效应及层间单元水平剪切力作用, 引入弯曲微分单元概念, 并用于求解非滑裂区主动土压力; 进一步考虑任意数量滑裂面, 采用滑楔体极限平衡法和有限差分理论, 得到了下部滑裂区主动土压力解; 同时给出了主动土压力合力及其作用点高度计算表达式, 系统地建立了有限宽度填土挡墙主动土压力的普适解法。通过与已有研究对比验证了所提方法的合理性与准确性。此外, 分析了填土宽高比、填土内摩擦角及墙-土界面摩擦角对主动土压力分布及其合力和作用点高度的影响。结果表明, 滑裂面数量显著影响主动土压力分布规律, 采用所提方法利于有限宽度填土挡墙经济性设计。

**关键词:** 有限宽度填土; 主动土压力; 土拱效应; 水平剪切力; 有限元极限分析

中图分类号: TU432

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2022)03-0483-09

**作者简介:** 赖丰文(1992—), 男, 博士研究生, 主要从事岩土数值分析与地下结构工程方面的科研工作。E-mail: laifengwen@163.com。

## Generalized solution to active earth pressure exerted onto retaining wall with narrow backfills

LAI Feng-wen<sup>1,2</sup>, LIU Song-yu<sup>1,2</sup>, YANG Da-yu<sup>1,2</sup>, CHENG Yue-hong<sup>3</sup>, FAN Qin-jian<sup>3</sup>

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China; 2. Jiangsu Key Laboratory of Urban Underground

Engineering & Environmental Safety, Southeast University, Nanjing 210096, China; 3. ZYF Construction Group Co., Ltd., Suzhou

215000, China)

**Abstract:** The finite element limit analysis (FELA) method is used to interpret the active failure mechanisms of retaining wall with narrow backfills under translation mode. It is found from the numerical results that multiple slip surfaces will be developed in the narrow backfills in rebounding form. Moreover, the numbers of slip surfaces in various cases are summarized. Afterwards, based on the active failure mechanisms, the backfills are divided into the upper non-sliding zone and the lower sliding zone. Considering the soil arching effects and the horizontal shearing between adjacent elements, the concept of curved soil-layer element is introduced to calculate the earth pressures in non-sliding zone. The sliding-wedge method and the finite difference theory are further used to estimate the active earth pressure taking the number of slip surface into account. Also, the solution to the active thrust and its application point are deduced. The proposed analytical solutions are validated through the comparisons against the previous studies. Finally, the parametric studies considering the effects of aspect ratio, soil friction angle and wall-soil friction angle are performed. The results show that the number of slip surface significantly affects the distribution of the active earth pressure, and using the proposed analytical solution is beneficial to an economic design of retaining wall with narrow backfills.

**Key words:** narrow backfill; active earth pressure; soil arching effect; horizontal shearing force; finite element limit analysis

## 0 引言

挡土结构被广泛用于支挡墙后土体, 以防止填土滑裂或坍塌, 从而确保系统稳定性和工程安全性。极限主动土压力是挡土结构设计的重要内容, 也是经典

**基金项目:** 国家重点研发计划项目(2016YFC0800201); 国家自然科学基金项目(41972269); 江苏省研究生科研创新计划项目(KYCX20\_0118); 东南大学优秀博士学位论文培育基金项目(YBPY2041)

**收稿日期:** 2021-05-08

**\*通信作者** (E-mail: liusy@seu.edu.cn)

土力学的重要分支。经典的 Rankine 与 Coulomb 土压力理论因其概念明确、公式简洁、计算简便被沿用至今。两者均假设墙后半无限空间填土。然而,在实际工程中,挡墙临近建/构筑物或已有基岩施工时,时常遭遇墙后有限宽度填土的工况。例如,山区道路或码头岸壁临近基岩修建、相邻基坑开挖或临近地铁车站基坑开挖等<sup>[1-2]</sup>,如图1所示。此时,墙后有限土体并不能按照 Rankine/Coulomb 土压力理论假设的单滑裂面贯穿至地表而形成三角形滑楔体。因此,需要提出适用于有限宽度填土挡墙主动土压力计算方法。

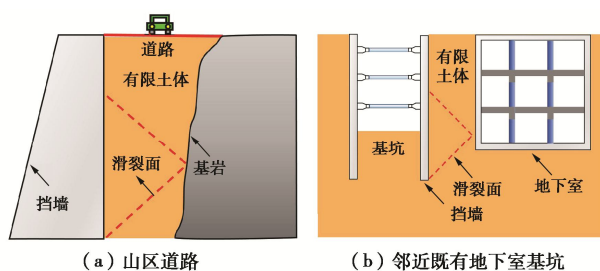


图1 有限宽度填土挡墙工程示例

Fig. 1 Schematic diagram of retaining wall with narrow backfills

随着现代土力学的发展,国内外学者已逐渐认识到经典土压力理论用于有限宽度填土挡墙设计的局限性。Frydman等<sup>[3]</sup>和Take等<sup>[4]</sup>通过离心机试验分析了平动模式下有限宽度填土挡墙主动土压力分布规律;结果表明,由于墙-土粗糙界面导致主应力偏转诱发的荷载传递现象(“土拱效应”),使得墙后主动土压力呈非线性分布。O' Neal等<sup>[5]</sup>通过现场监测验证了此结论。Fan等<sup>[6]</sup>进一步通过二维数值模拟研究了平动模式下临近倾斜基岩的重力式挡墙土压力问题,认为有限填土主动土压力显著低于Coulomb土压力预测值。Rui等<sup>[7]</sup>通过钢棒相似土模型试验也证实了土拱效应的存在。已有研究充分说明了考虑土拱效应对有限宽度填土挡墙经济性设计的重要性,同时为其理论计算方法的发展奠定了基础。

基于极限平衡理论演化而来的滑楔体极限平衡法<sup>[8-9]</sup>与微元体极限平衡法<sup>[7, 10]</sup>是目前计算有限宽度填土刚性挡墙主动土压力的两种主流计算方法。前者能够考虑墙后复杂的破坏滑移机理,求解墙后填土多滑裂面时存在优势,但无法考虑土拱效应。后者则能够有效考虑挡土结构的荷载传递机制,即墙后土拱效应导致的主应力偏转问题,反映了有限宽度填土挡墙主动土压力非线性分布规律,但多用于求解单滑裂面工况。综上,两种方法各存利弊,因此有限填土挡墙设计仍需寻求一种更加合适的解法。

微元体极限平衡法在求解过程中,通常是将有限空间填土离散成水平微分单元,通过数学方程描述小

主应力偏转迹线(圆弧线<sup>[10-11]</sup>、悬链线<sup>[12]</sup>或抛物线<sup>[13]</sup>等)得到平均竖向应力,进而建立力学平衡方程,最后求得主动土压力解。水平微分单元法求解过程忽略了水平层间单元剪切应力,导致主动土压力计算值偏于保守。为提高计算精度,Cao等<sup>[14]</sup>尝试考虑微分上下界面切应力,针对平动模式刚性挡墙半无限空间填土问题,提出了沿主应力偏转方向建立倾斜平面微分单元方法,试图缩小由于忽略层间单元水平剪切力带来的计算误差,存在一定的优越性。然而,由于滑楔体两侧同时受墙-土界面摩擦力的影响,主应力偏转轨迹线显然不可能为倾斜直线,倾斜平面微分单元法仅是一种近似的简化解法。因此,能够合理考虑墙后填土水平剪切力的刚性挡墙主动土压力方法亟待提出。

针对上述研究不足之处,以平动模式竖直刚性挡墙有限宽度填土主动土压力解为研究目标,首先采用有限元极限分析方法(FELA)揭示了挡墙系统主动破坏机理,将墙后有限宽度填土划分为上部未滑裂区与下部滑裂区。在此基础上,考虑水平剪切力与土拱效应作用,提出了弯曲微分单元法,并用于上部未滑裂区。进一步通过平均竖向应力关联下部滑裂区,考虑滑裂区任意数量滑裂面,将滑楔体极限平衡法用于滑裂区,引入有限差分理论进行求解下部土压力;进而给出了主动土压力及其合力和作用点高度计算表达式,建立了有限宽度填土刚性挡墙主动土压力的普适解法。通过对比已有文献验证了所提方法的合理性与准确性。同时,通过参数分析,研究了填土宽高比、填土内摩擦角及墙-土界面摩擦角对主动土压力及其合力和作用点高度的影响。

## 1 主动破坏机理

### 1.1 问题定义与数值模型

采用有限元极限分析方法软件 OptumG2 (academic version)<sup>[15]</sup>揭示平动模型下有限填土挡墙主动破坏机理。OptumG2 通过求解二阶锥规划函数,给出严格的上下限解,从而逼近真实解。OptumG2 自带网格自适应功能,在网格较少的情况下可直观地获取真实滑裂面,因此被广泛用于分析复杂边界条件下不同类型的岩土稳定性问题<sup>[16-17]</sup>。

图2给出了问题定义及FELA模型。假设两道高度为 $H$ 的刚性竖直挡墙用于支挡宽度为 $B$ 的填土。填土重度 $\gamma$ 为 $15.8 \text{ kN/m}^3$ ,内摩擦角 $\phi$ 为 $36^\circ$ ,杨氏模量 $E_0$ 为 $18 \text{ MPa}$ ,泊松比 $\nu$ 为 $0.3$ ,侧向静止土压力系数 $K_0$ 为 $0.41$ <sup>[3]</sup>。墙-土界面内摩擦角 $\delta$ 为 $25^\circ$ ,因此墙-土界面摩擦系数 $\tan \delta / \tan \phi$ 为 $0.64$ 。由于仅涉及极

限状态问题, 土体采用符合相关联流动准则的莫尔-库仑本构模型进行模拟。为产生平动破坏模式, 固定右侧挡墙, 对左侧挡墙施加水平荷载乘子 (1 kPa); 计算过程逐渐增加荷载乘子, 直至失稳。自适应迭代过程, 网格数量由初始 5000 个增加到 10000 个。

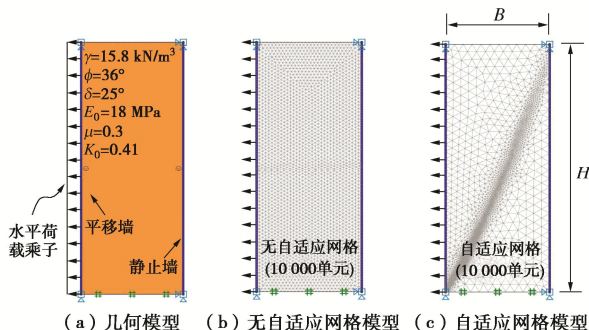


图2 问题定义及数值模型

Fig. 2 Problem definition and numerical model

## 1.2 滑裂面形状与数量

图3~5分别给出了不同宽深比 $B/H$ 、填土内摩擦角 $\phi$ 及墙-土界面摩擦角 $\delta$ 对滑裂面形状与数量的影响。从图3中可以看出, 当填土宽度较大时 ( $B/H > 0.6$ ), 单滑裂面从移动墙墙趾贯穿至地表的形成三角形滑楔体 (failure mode 1, M1 模式), 满足库仑土压力理论假设。当减小 $B/H$ 至0.4, 单滑裂面与稳定墙体相交后沿墙土界面延升至地表形成梯形滑楔体 (M2 模式)。若进一步减小 $B/H$ 至0.1~0.2, 墙后填土则出现两道和三道滑移面, 且滑裂面呈“反射式”发展; 此时有限宽度填土形成由梯形推力楔和多个三角形推力楔共同组成的破坏机理 (M3 模式)。

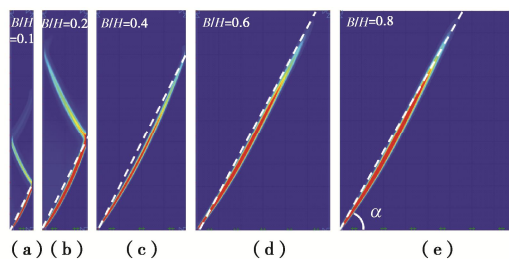


图3 不同宽深比对主动破坏机理的影响

Fig. 3 Effects of aspect ratio on active failure mechanisms

从图4可以发现, 填土内摩擦对滑移面形状影响显著。对于低摩擦性填土 ( $\phi=5^\circ$ ), 滑裂面略微弯曲, 对应滑裂角 $\alpha$  (滑裂面与水平方向夹角) 较小。随着填土内摩擦角的增加,  $\alpha$ 角增加, 且滑裂面逐渐趋向于平面。图5说明当墙-土界面较光滑时 ( $\delta=0^\circ$  或  $\phi/5$ ), 滑裂面呈平面, 即滑移线为直线。随着 $\delta$ 角的增加,  $\alpha$ 角减小, 滑裂面逐渐弯曲, 滑裂面数量也可能减小。已有研究证明了可利用库仑土压力理论较好地预测 $\alpha$ 角, 如下:

$$\alpha = \arctan \left( \sqrt{\tan^2 \phi + \frac{\tan \phi}{\tan(\phi + \delta)}} + \tan \phi \right), \quad (1)$$

可以看出, 上述公式很好地诠释了 $\phi$ 与 $\delta$ 对于 $\alpha$ 的影响, 且说明了 $\phi$ 对 $\alpha$ 角的影响较 $\delta$ 明显, 这与数值计算规律一致。

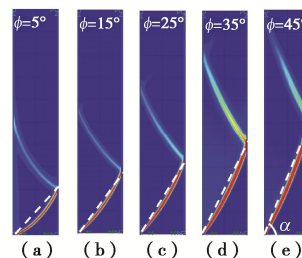


图4 不同填土内摩擦角对主动破坏机理的影响

Fig. 4 Effects of backfill friction angle on active failure mechanisms

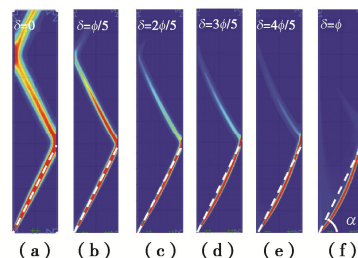


图5 不同墙-土界面内摩擦角对主动破坏机理的影响

Fig. 5 Effects of wall-soil interface friction angle on active failure mechanisms

表1给出了不同 $B/H$ 下 $\delta$ 与 $\phi$ 组合对滑裂面数量的影响。从表中可以看出, 有限土体条件下, 除墙土界面完全粗糙外, 填土一般呈现多道滑裂面 (M3 模式)。 $\delta$ 与 $\phi$ 对滑裂面数量影响显著。因此, 考虑主动破坏机理与滑移面数量的变化对于有限宽度填土挡墙设计十分必要。

## 2 主动土压力计算

### 2.1 基本假设与计算模型

推导过程认为墙后填土为均质、各向同性的无黏性土, 符合莫尔-库仑屈服准则, 且处于极限平衡状态。墙-土相对位移足够大, 保证墙-土界面强度完全发挥。采用广泛接受的圆弧轨迹线描述小主应力偏转<sup>[18]</sup>。考虑主动破坏机理, 假设墙后填土滑裂面为平面, 多道滑裂面呈“反射式”发展, 每道滑裂面滑裂角采用Coulomb解。基于上述假设, 图6绘制了由上部未滑裂区 $dcef$ 和下部滑裂区 $abef$ 组成的理论计算模型。图中, 假设 $H_0$ 为未滑裂区高度,  $H_{nk}$ 为滑裂区中指定滑裂面高度。根据几何关系可得

$$\begin{cases} H_{nk} = B \tan \alpha, & k=1, \dots, n, \\ H_0 = H - nB \tan \alpha \end{cases}, \quad (2)$$

式中,  $k$  表示自上而下第  $k$  道滑移面,  $n$  表示墙后填土共形成  $n$  道滑裂面。因此,  $k \leq n$ 。

表 1 滑裂面数量统计

Table 2 Summary of number of sliding surfaces						
$B/H$	$\phi$	$\delta=\phi/5$	$\delta=2\phi/5$	$\delta=3\phi/5$	$\delta=4\phi/5$	$\delta=\phi$
0.1	5	6	5	3	2	1
	15	6	5	3	2	1
	25	4	4	3	2	1
	35	4	4	3	2	1
	45	3	3	2	2	1
0.2	5	4	3	2	2	1
	15	3	3	2	2	1
	25	2	2	2	2	1
	35	2	2	2	1	1
	45	2	2	2	1	1
0.4	5	2	2	2	1	1
	15	2	2	1	1	1
	25	1	1	1	1	1
	35	1	1	1	1	1
	45	1	1	1	1	1
0.6	5	1	1	1	1	1
	15	1	1	1	1	1
	25	1	1	1	1	1
	35	1	1	1	1	1
	45	1	1	1	1	1
0.8	5	1	1	1	1	1
	15	1	1	1	1	1
	25	1	1	1	1	1
	35	1	1	1	1	1
	45	1	1	1	1	1

注: 黄色=M1 模式; 粉色=M2 模式; 绿色=M3 模式。

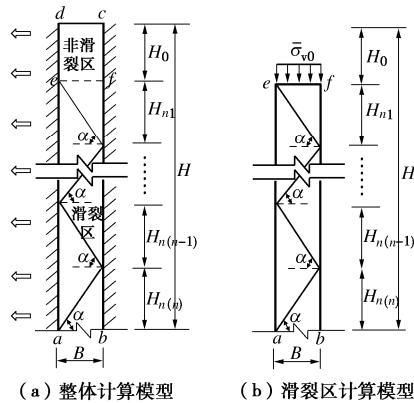


图 6 墙后填土理论计算模型

Fig. 6 Model for narrow backfills behind wall

2.2 上部非滑裂区

根据基本假设图 7 (a) 绘制了上部未滑裂区填土在土拱效应作用下圆弧小主应力偏转轨迹线。在此基础上, 沿小主应力偏转轨迹线建立曲线微分单元 (图 7 (b))。此时, 区别于水平微分单元, 曲线单元上下界面仅作用大、小主应力, 而不存在水平剪切应力, 极大简化了受力分析过程。图 7 (c) 给出了曲线微分单元受力分析。图中, 任意深度  $z$  处曲线微分单元  $ACC'A'$  高度为  $dz$ , 其宽度  $B$  表示为

$$B = R_{AC} \cos \theta_w = R_{A'C'} \cos \theta_w, \quad (3)$$

式中,  $R_{AC}$  和  $R_{A'C'}$  为圆弧小主应力轨迹线半径,  $\theta_w$  为墙-土界面小主应力方向与水平方向的夹角。

将弯曲微分单元应力状态用莫尔应力圆表示, 如图 8 所示。根据  $A$  点大小主应力关系可得

$$\sigma_w = \sigma_1 \cos^2 \theta_w + \sigma_3 \sin^2 \theta_w, \quad (4)$$

$$\tau_w = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta_w, \quad (5)$$

式中,  $\sigma_w$  和  $\tau_w$  分别为作用于侧墙的正应力和切应力,  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  则分别对应大、小主应力。

由莫尔-库仑屈服准则可定义

$$N = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\phi}{2} \right), \quad (6)$$

联立式 (4) ~ (6), 求解  $\theta_w$  得

$$\theta_w = \arctan \left[ \frac{N - 1 \pm \sqrt{(N - 1)^2 - 4N \tan^2 \delta}}{2 \tan \delta} \right], \quad (7)$$

式中,  $\theta_w$  建议取大值, 且小于  $\pi/2$  [18]。该值越大, 表明主应力偏转越明显。当  $\theta_w = \pi/2$  时, 表明主应力轴发生偏转。

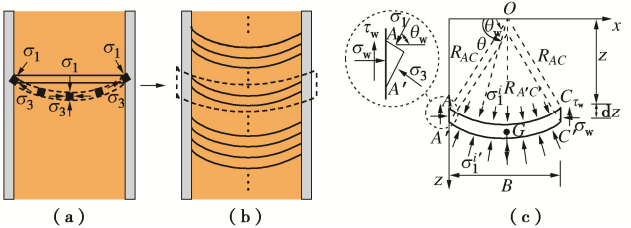


图 7 小主应力偏转轨迹及曲线微分单元受力分析

Fig. 7 Rotation trajectory of minor principal stress and force analysis of curved soil-layer elements

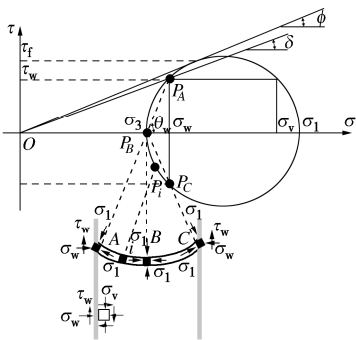


图 8 曲线微分单元应力状态

Fig. 8 Stress state of curve soil-layer elements

在重力作用下, 微分单元上界面  $AC$  任意点  $i$  处的大主应力  $\sigma_1^i$  均大于墙-土界面  $A$  点处。假设微分单元内,  $\sigma_1^i$  随深度  $z$  线性增加, 则

$$\sigma_1^i = \sigma_1 + \gamma \Delta z_{Ai}, \quad (8)$$

式中,  $\Delta z_{Ai} = R_{AC}(\sin \theta - \sin \theta_w)$  对应  $A$  点与  $i$  点之间的竖向距离。

据图 7 可知, 作用于上界面  $AC$  的竖向力为



$$F_z^{AC} = 2 \int_{\theta_w}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_1^i \sin \theta R_{AC} d\theta, \quad (9)$$

将式(8)代入式(9)得

$$F_z^{AC} = 2\sigma_1 R_{AC} \cos \theta_w + 2\gamma R_{AC}^2 C_1, \quad (10)$$

式中,  $C_1 = (\pi - 2\theta_w - \sin 2\theta_w)/4$ 。

类似地, 下界面  $A'C'$  竖向力为

$$F_z^{A'C'} = 2(\sigma_1 + d\sigma_1) R_{A'C'} \cos \theta_w + 2\gamma R_{A'C'}^2 C_1. \quad (11)$$

由对称性可知, 侧向边界  $AA'$  与  $CC'$  竖向力为

$$F_z^{AA'} = F_z^{CC'} = \tau_w dz, \quad (12)$$

式中, 墙-土界面剪切应力(界面强度)  $\tau_w$  为

$$\tau_w = \sigma_w \tan \delta, \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)得

$$F_z^{AA'} = F_z^{CC'} = \left( \frac{\tan \delta}{\tan \varphi} c + \sigma_w \tan \delta \right) dz, \quad (14)$$

曲线微分单元重力可表示为

$$G = \gamma dz l_{\text{arc}AC}, \quad (15)$$

式中,  $l_{\text{arc}AC}$  为界面  $AC$  弧长, 如下:

$$l_{\text{arc}AC} = \frac{B(\pi - 2\theta_w) \tan \theta_w}{2}. \quad (16)$$

根据竖向平衡分析, 可建立竖向平衡方程为

$$F_z^{AC} + G - F_z^{A'C'} - F_z^{AA'} - F_z^{CC'} = 0, \quad (17)$$

代入上述变量, 化简整理得

$$d\sigma_1 + \frac{\left( \frac{\tan \delta}{\tan \varphi} c + \sigma_w \tan \delta \right)}{B} dz - \frac{\gamma(\pi - 2\theta_w) \tan \theta_w}{4} dz = 0. \quad (18)$$

由式(4)和式(6)得

$$\sigma_w = \sigma_1 \left( \cos^2 \theta_w + \frac{1}{N} \sin^2 \theta_w \right), \quad (19)$$

定义  $C_2 = \cos^2 \theta_w + \sin^2 \theta_w / N$ , 则式(18)可写为

$$\frac{d\sigma_1}{dz} + C_3 \sigma_1 + C_4 = 0, \quad (20)$$

式中,

$$\begin{cases} C_3 = \frac{C_2 \tan \delta}{B} \\ C_4 = \frac{\gamma(\pi - 2\theta_w) \tan \theta_w}{4} \end{cases}, \quad (21)$$

由边界条件  $z=0$  时  $\sigma_1=0$  可解得

$$\sigma_1 = \frac{C_4}{C_3} (e^{-C_3 z} - 1). \quad (22)$$

将式(19)代入式(22)并整理化简得上部未滑裂区任意深度处侧向土压力为

$$\sigma_w = \frac{C_2 C_4}{C_3} (e^{-C_3 z} - 1). \quad (23)$$

进一步推导未滑裂区任意深度处平均水平竖向应力为

$$\bar{\sigma}_v = \frac{F_z}{B} = \frac{2 \int_{\theta_w}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_1^i \sin \theta R_{AC} d\theta}{2 R_{AC} \cos \theta_w} = \frac{C_4}{C_3} (e^{-C_3 z} - 1) + \frac{\gamma B C_1}{2 \cos \theta_w}. \quad (24)$$

## 2.3 下部滑裂区

为关联上部非滑裂区与下部滑裂区, 将未滑裂区底部平均竖向应力  $\bar{\sigma}_{v0}$  作用于滑裂区顶部。考虑下部滑裂区存在任意数量的滑裂面, 建立计算模型如图 6(b) 所示。因此, 可定义

$$\bar{\sigma}_{v0} = \bar{\sigma}_v|_{z=H_0}, \quad (25)$$

假设  $n=1$ , 即认为滑裂区仅有一道滑裂面。基于刚性滑楔体极限平衡方法, 对滑楔体  $W_{11}$  进行受力分析, 如图 9 所示。需要指出, 实线为根据主动破坏机理得到的真实滑裂面; 虚线为任意深度处, 由主动破坏机理演化得到的假想滑裂面。

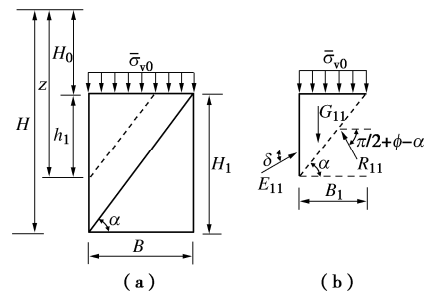


图9 滑楔体  $W_{11}$  受力分析( $n=1$ )

Fig. 9 Force analysis of sliding wedge  $W_{11}$  ( $n=1$ )

根据图 9 力学平衡分析, 可得

$$E_{11} \cos \delta = R_{11} \cos \left( \frac{\pi}{2} + \phi - \alpha \right), \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}_{v0} B_1 + G_{11} = E_{11} \sin \delta + R_{11} \sin \left( \frac{\pi}{2} + \phi - \alpha \right), \quad (27)$$

联立式(26)和式(27), 求解得

$$E_{11} = \frac{(\bar{\sigma}_{v0} B_1 + G_{11}) \sin(\alpha - \phi)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}, \quad (28)$$

式中,  $G_{11} = \gamma B_1 h_{11} / 2$ ,  $H_0 = H - B \tan \alpha$ ,  $h_{11} = z + B \tan \alpha - H$ ,  $B_1 = h_{11} / \tan \alpha$ 。

对滑楔体  $W_{21}$  和  $W_{22}$  进行受力分析 ( $n=2$ ), 如图 10 所示。滑楔体  $W_{21}$  受力与  $W_{11}$  相同, 因此可得

$$E_{21} = \frac{(\bar{\sigma}_{v0} B_2 + G_{21}) \sin(\alpha - \phi)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}, \quad (29)$$

进一步对滑楔体  $W_{22}$  进行受力分析, 则有

$$E_{22} \cos \delta = R_{22} \cos \left( \frac{\pi}{2} + \phi - \alpha \right) + E_{21} \cos \delta, \quad (30)$$

$$\sigma_{v0} B + G_{22} = E_{22} \sin \delta + R_{22} \sin \left( \frac{\pi}{2} + \phi - \alpha \right) + E_{21} \sin \delta, \quad (31)$$

联立式(30)和式(31), 求解得

$$E_{22} = \frac{(\bar{\sigma}_{v0}B + G_{22})\sin(\alpha - \phi) + E_{21}\cos(\alpha - \phi + \delta)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}, \quad (32)$$

式中,  $G_{21} = \gamma B_2 h_{21} / 2$ ,  $B_2 = h_{21} / \tan \alpha$ ,  $h_{21} = z + B \tan \alpha - H$ ,  $G_{22} = \gamma(Bh_{21} + Bh_{22} / 2)$ ,  $h_{22} = B / \tan \alpha$ ,  $H_0 = H - 2B \tan \alpha$ 。

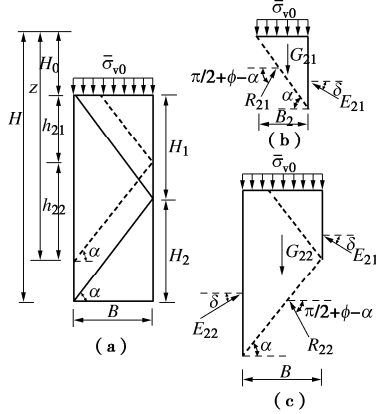


图 10 滑楔体  $W_{21}$ ,  $W_{22}$  受力分析( $n=2$ )

Fig. 10 Force analysis of sliding wedges  $W_{21}$  and  $W_{22}$  ( $n=2$ )

图 11 给出了滑楔体  $W_{31}$ ,  $W_{32}$  和  $W_{33}$  受力情况。类似地, 通过逐步建立力学平衡方程, 求解可得

$$E_{31} = \frac{(\bar{\sigma}_{v0}B_3 + G_{31})\sin(\alpha - \phi)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}, \quad (33)$$

$$E_{32} = \frac{(\bar{\sigma}_{v0}B + G_{32})\sin(\alpha - \phi) + E_{31}\cos(\alpha - \phi + \delta)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}, \quad (34)$$

$$E_{33} = \frac{(\bar{\sigma}_{v0}B + G_{33})\sin(\alpha - \phi) + E_{32}\cos(\alpha - \phi + \delta)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}, \quad (35)$$

式中,  $G_{31} = \gamma B_3 h_{31} / 2$ ,  $B_3 = h_{31} / \tan \alpha$ ,  $G_{32} = \gamma B(h_{31} + h_{32} / 2)$ ,  $G_{33} = \gamma B(h_{31} + h_{32} + h_{33} / 2)$ ,  $h_{31} = z + B \tan \alpha - H$ ,  $h_{32} = h_{33} = B \tan \alpha$ ,  $H_0 = H - 3B \tan \alpha$ 。

利用递推法, 联立式 (28), (29), (32) ~ (35), 可得

当  $k=1$  时,

$$E_{n1} = \frac{(\bar{\sigma}_{v0}B_n + G_{n1})\sin(\alpha - \phi)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}, \quad (36)$$

式中,  $G_{n1} = \gamma B_n h_{n1} / 2$ ,  $B_n = h_{n1} / \tan \alpha$ ,  $h_{n1} = z + B \tan \alpha - H$ 。

当  $2 \leq k \leq n$  时,

$$E_{nk} = \frac{(\bar{\sigma}_{v0}B + G_{nk})\sin(\alpha - \phi) + E_{n(k-1)}\cos(\alpha - \phi + \delta)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}, \quad (37)$$

式中,  $G_{nk} = \gamma B \left( \sum_{i=1}^{k-1} (h_{ni}) + h_{nk} / 2 \right)$ ,  $h_{nk} = B \tan \alpha$ 。将上述变量代入式 (37), 整理并化简得

$$E_{nk} = \frac{\bar{\sigma}_{v0}B + \gamma B \left[ z - H + \left( k - \frac{1}{2} \right) B \tan \alpha \right] + E_{n(k-1)}\cos(\alpha - \phi + \delta)}{\cos(\alpha - \phi - \delta)}. \quad (38)$$

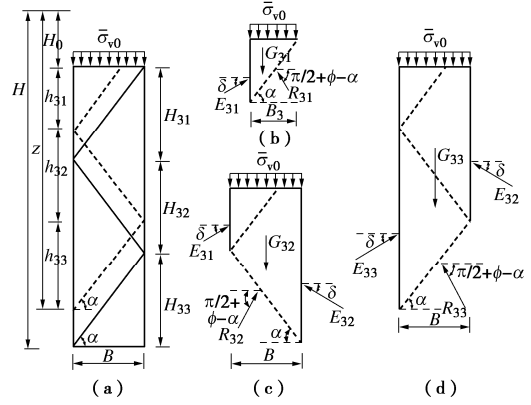


图 11 滑楔体  $W_{31}$ ,  $W_{32}$  和  $W_{33}$  受力分析( $n=3$ )

Fig. 11 Force analysis of sliding wedges  $W_{31}$ ,  $W_{32}$  and  $W_{33}$  ( $n=3$ )

式 (38) 给出了当  $2 \leq k \leq n$  时, 任意相邻滑楔体之间土压力合力递推方程。为求解侧向土压力, 引入有限差分理论。将下部滑裂区高度离散成  $m$  等分, 每个土条高度为  $\Delta z$ , 记第  $j$  个土条为  $P_{j-1}P_j$ , 如图 12 所示。

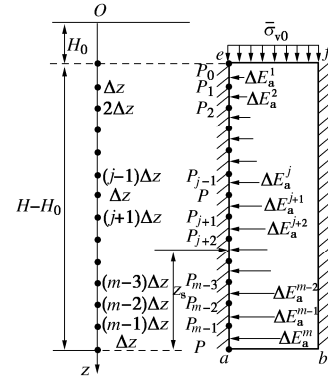


图 12 有限差分理论在滑裂区的应用

Fig. 12 Use of finite difference element theorem in sliding zone

假设作用于土条  $P_0P_{j-1}$  和  $P_0P_i$  的土压力合力分别为  $E_a^{j-1}$  和  $E_a^j$ , 则作用于土条  $P_{j-1}P_j$  的土压力合力可表示为

$$\Delta E_a^j = E_a^j - E_a^{j-1}, \quad (39)$$

式中,  $E_a^j = E_{nk}(z_j) \cdot \cos \delta$ ,  $z_j = j \Delta z$ ,  $\Delta z = (H - H_0) / m$ 。因此可以得到土条  $P_{j-1}P_j$  上作用土压力大小为

$$\sigma_{wi} = \frac{\Delta E_a^j}{\Delta z}, \quad (40)$$

可以发现, 有限差分理论求解的关键在于如何获得  $\Delta E_a^j$  大小。为此, 图 13 引入任意假想的两条滑裂面, 且它们均按主动破坏机理演化, 呈反射式发展至滑裂区顶端, 从而给出了  $n=1 \sim 3$  情形下任意深度处滑裂面发展情况及作用  $\Delta E_a^j$ 。根据式 (36) 和 (38), 可获得相邻两个假想滑楔体的土压力合力大小关系。

上述推导已经给出了上部未滑裂区与下部滑裂区土压力分布方程。除主动土压力分布外, 主动土压力合力大小及作用点对于挡墙抗倾覆稳定性设计也是至关重要的。通过对未滑裂区土压力积分和滑裂区土压力叠加, 可得到主动土压力合力大小为

$$E_a = \int_0^{H_0} \sigma_w dz + \sum_{i=1}^m \sigma_{wi} \Delta z \quad (41)$$

引入主动推力系数  $K_a$ , 可将式 (41) 无量纲化:

$$K_a = \frac{E_a}{0.5\gamma H^2} \quad (42)$$

进一步对墙底求矩可得土压力合力距墙底作用点高度为

$$z_s = \frac{\int_0^{H_0} \sigma_w (H-z) dz + \sum_{i=1}^m \sigma_{wi} [H-H_0-(i-0.5)\Delta z] \Delta z}{E_a} \quad (43)$$

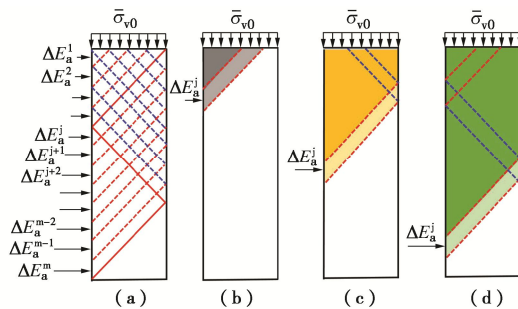


图 13 任意深度土条主动土压力合力求解思路

Fig. 13 Solving strategy of total active earth pressure on soil slice at arbitrary depth

### 3 对比与验证

为验证所提方法的合理性与准确性, 以离心试验结果为基准, 图 14 详细对比了离心试验、数值模拟及多种解析方法和北京市建筑基坑支护技术规程 <DB11/489—2016> 获得固定宽深比下有限填土归一化主动土压力  $\sigma_w/\gamma H$  的分布规律。Frydman 等<sup>[3]</sup>开展了临近竖直基岩的无黏性填土竖直挡墙主动土压力的离心试验, 挡墙原型高度为 8.5 m, 墙后填筑细砂, 其力学参数见数值计算模型。基于离心试验, Fan 等<sup>[6]</sup>针对  $B/H=0.235$  工况进行了数值模拟。Greco<sup>[9]</sup>方法考虑 1~3 道滑裂面, 利用滑楔体方法给出了有限宽度无黏性填土挡墙主动土压力计算方程。国内学者高印立<sup>[19]</sup>考虑单滑裂面, 基于土体塑性上限理论, 忽略墙土界面摩擦力, 给出了主动土压力上限解。规范 <DB11/489—2016><sup>[1]</sup>将  $z > b \tan(45^\circ - \phi/2)$  深度内的朗肯土压力进行折减, 上部土压力则不考虑计算折减, 详见文献[1]。

从对比结果可以看出, 所提计算方法与离心试验、有限元、滑移线解以及北京市基坑规范等吻合良好。充分说明了所提计算方法的合理性与准确性。Greco 解和高印立解虽在墙体上部与本文方法和试验结果吻合较好, 但底部由于忽略了土拱效应与水平剪切力作用, 与本文方法和离心试验结果均存在一定差

异。此外, Coulomb 主动土压力解明显过于保守, 尤其在挡墙底部。值得注意的是, 北京市基坑规范通过对墙体下部土压力进行适当折减, 取得了较好的估算效果(稍显保守), 这对于现行基坑规范考虑有限填土工程经济性设计具有重要的工程意义。

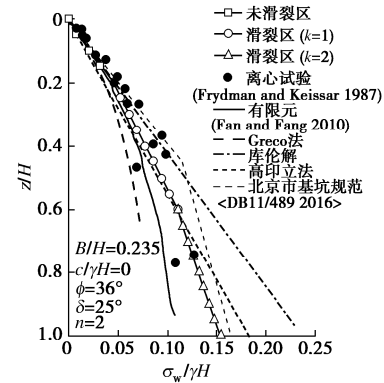


图 14 本文方法与已有研究对比与验证

Fig. 14 Comparison and validation against previous studies

### 4 参数分析

#### 4.1 宽深比

参数分析基本参数与数值模型保持一致。图 15 给出了不同宽深比下  $\sigma_w/\gamma H$  分布规律。可以看出, 当  $B/H < 0.6$  时,  $\sigma_w/\gamma H$  在非滑裂区非线性增长, 尔后随着滑裂面过渡, 呈分段线性增长, 且增长率逐渐递减。根据 Handy 的两阶段土拱理论<sup>[17]</sup>, 墙土界面摩擦力降低了作用在滑楔体的竖向压力; 且随着埋深的增加, 界面摩擦力分担的竖向荷载越多, 进而导致了土压力增长率降低。此外, 由于所提方法考虑了水平剪切力, 随着埋深的增加, 水平剪切力越大, 也可能导致这种现象。当  $B/H \geq 0.6$ , 改变  $B/H$  不再影响土压力分布, 即  $\sigma_w/\gamma H$  随  $z/H$  线性增长。进一步对比不同  $B/H$  下  $\sigma_w/\gamma H$  值, 说明了滑裂面数量  $n$  对主动土压力分布有显著影响, 有限土体挡墙设计应该考虑主动破坏机理。

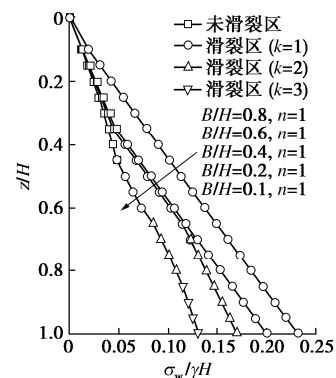


图 15 主动土压力随填土宽深比的变化规律

Fig. 15 Variation of active earth pressure with aspect ratio

#### 4.2 填土内摩擦角

图16描述了不同填土内摩擦角 $\phi$ 下 $\sigma_w/\gamma H$ 随挡墙深度 $z/H$ 的变化规律。如式(2)所示,非滑裂区高度与滑裂区各滑裂面高度随着 $\alpha$ 的变化而变化。从式(1)可看出, $\phi$ 角显著影响 $\alpha$ 角,因此对 $\sigma_w/\gamma H$ 的分布有显著影响。随着 $\phi$ 的增加,非滑裂区高度呈抛物线减小, $\sigma_w/\gamma H$ 也逐渐减小。这说明填土内摩擦角越大,土拱效应越强。在滑裂区填土区域,随着 $k$ 的增加(滑裂面自上而下),强摩擦性土体将导致 $\sigma_w/\gamma H$ 增长率减小,而低摩擦性土体则相反。

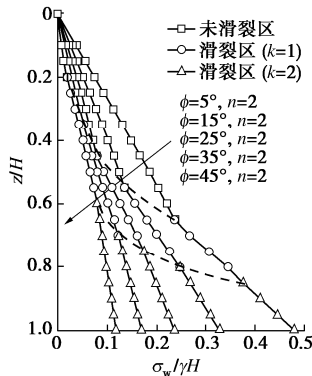


图16 主动土压力随填土内摩擦角的变化规律

Fig. 16 Variation of active earth pressure with soil friction angle

图17(a)和17(b)分别给出了主动推力系数 $K_a$ 及其归一化作用点高度 $z_s/H$ 变化规律。从图17(a)可以看出,在土拱效应作用下,随着 $\phi$ 角的增加,主动推力(合力)随着呈凹曲线型减小。给定 $\phi$ 角,在有限土体框架内, $B/H$ 越大, $K_a$ 越大;当 $B/H > \cot \alpha$ 后, $\sigma_w/\gamma H$ 不再变化,因此 $K_a$ 也保持不变。进一步观察图17(b),发现类似于库仑土压力理论,利用所提方法得到的合力作用点高度近似分布在 $H/3$ 附近,说明滑裂面数量、填土宽度及土体内摩擦角对于合力作用点的影响甚微。

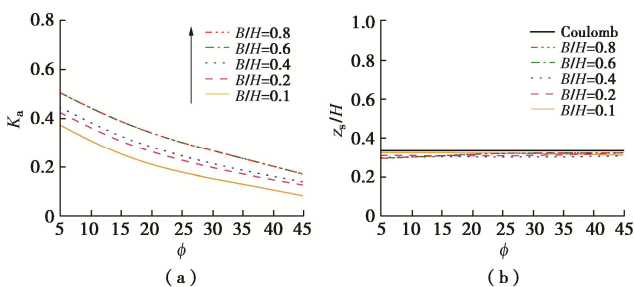


图17 主动推力系数及作用高度随填土内摩擦角的变化规律

Fig. 17 Variation of active thrust coefficient and height of its application point with soil friction angle

#### 4.3 墙-土界面内摩擦角

图18绘制了不同填土内摩擦角 $\phi$ 下 $\sigma_w/\gamma H$ 随挡墙深度 $z/H$ 的变化规律。给定 $z/H$ , $\sigma_w/\gamma H$ 随着 $\delta$ 的增加而减小,这与墙-土界面摩擦力增加有关。此外,墙土界面摩擦角的增加,增加了主应力偏转角 $\theta_w$ ,增强了土拱效应。相较于内摩擦角,在非滑裂区, $\delta$ 对

于 $\sigma_w/\gamma H$ 的影响较小。当填土从非滑裂区过渡至滑裂区时,除了土压力分布模式的改变,土压力的增长率也明显提升,这可能是因为上部填土主应力偏转更为明显。

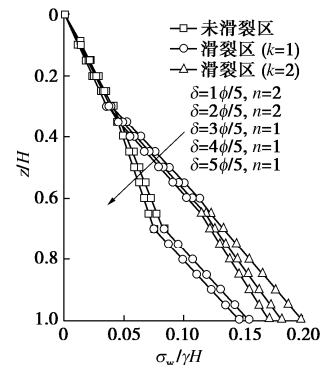


图18 主动土压力随墙-土界面内摩擦角的变化规律

Fig. 18 Variation of active earth pressure with wall-soil interface friction angle

图19(a)和19(b)分别阐述了主动推力系数 $K_a$ 及其归一化作用点高度 $z_s/H$ 变化规律。如图19(a),对于狭窄宽度填土, $K_a$ 随 $\delta$ 角的增加呈凸曲线分布。当 $B/H > 0.4$ 后, $K_a$ 基本不受 $\delta$ 影响。固定 $\delta$ 角, $K_a$ 随 $B/H$ 的先增加后保持不变。图19(b)可以看出,类似于图17(b),合力作用点高度略低于0.33,但偏差很小,因此传统的朗肯和库仑土压力理论假设 $z_s = H/3$ 是合理的。

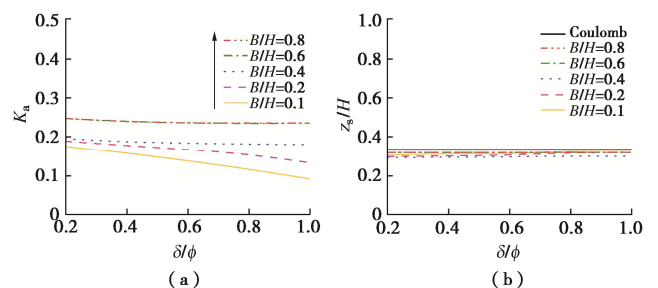


图19 主动推力系数及其作用点高度随墙-土界面内摩擦角的变化规律

Fig. 19 Variation of active thrust coefficient and height of its application point with wall-soil interface friction angle

## 5 结论

提出了一种有限填土挡墙主动土压力的普适性解法;结合了微分单元法与滑楔体极限平衡法的优势,有效避免了两种方法存在的弊端。主要结论如下:

(1) 平动模式下,墙后有限宽度填土主动破坏时,滑裂面存在不同形状和数量,取决于填土宽深比、填土内摩擦角和墙-土界面摩擦角。对于低摩擦性土体或粗糙墙-土界面,滑裂面形状略微弯曲;反之则为直线;有限填土定义下,土体呈现单滑裂面伴随梯形推力楔或多数出现多滑裂面情形,且滑裂面呈反射式发展。



(2) 对于有限土体呈现单滑裂面伴随梯形推力楔或多滑裂面情形, 主动土压力呈非滑裂区非线性分布, 滑裂区折线形分布; 且非滑裂区向滑裂区过渡时, 土压力增长率迅速提升, 除低摩擦性土体外, 滑裂区土压力随着挡墙埋深的增加, 在各滑裂面过渡时, 土压力增长率减小。

(3) 在有限土体框架内, 土体内摩擦角和墙-土界面内摩擦角越大, 主动推力越小; 而合力作用点高度略微低于  $1/3$  挡墙深度, 基本与传统 Coulomb 土压力理论相符, 且不受填土宽深比、土体强度及墙-土界面摩擦特性影响。

尽管所提计算方法为城市基坑群开挖工程、临近基岩岸壁或码头结构、山区或沿海高速公路和桥墩建设以及矿山回填工程等有限填土工程经济性设计提供了思路; 但仍然存在一些局限性。例如, 仅涉及挡墙平动位移 (T) 模式, 诸如绕墙趾转动 (RB) 和绕墙顶转动 (RT) 模式有待研究。另外, 墙后倾斜坡面导致的梯形或三角形填土、岩坡-土体界面与挡墙-土体界面之间的差异等问题也需进一步探讨。

#### 参考文献:

- [1] 建筑基坑支护技术规程: DB11/ 489—2016[S]. 2016. Earthquake Standard of the People's Republic of China: DB11/ 489—2016[S]. 2016. (in Chinese))
- [2] 徐日庆, 徐叶斌, 程 康, 等. 有限土体下考虑土拱效应的非极限主动土压力解[J]. 岩土工程学报, 2020, **42**(2): 362 - 371. (XU Ri-qing, XU Ye-bin, CHENG Kang, et al. A method to calculate the active earth pressure with considering soil arching effect under the nonlimit state of clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, **42**(2): 362 - 371. (in Chinese))
- [3] FRYDMAN S, KEISSAR I. Earth pressure on retaining walls near rock faces[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1987, **113**(6): 586 - 599.
- [4] TAKE W, VALSANGKAR A. Earth pressures on unyielding retaining walls of narrow backfill width[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2001, **38**(6): 1220 - 1230.
- [5] O'NEAL T S, HAGERTY D. Earth pressures in confined cohesionless backfill against tall rigid walls—a case history[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2011, **48**(8): 1188 - 1197.
- [6] FAN C C, FANG Y S. Numerical solution of active earth pressures on rigid retaining walls built near rock faces[J]. Computers and Geotechnics, 2010, **37**(7/8): 1023 - 1029.
- [7] RUI R, YE Y Q, HAN J, et al. Experimental and theoretical investigations on active earth pressure distributions behind rigid retaining walls with narrow backfill under a translational mode[J]. International Journal of Geomechanics, 2020, **20**(10): 04020178.
- [8] CHEN F, LIN Y, LI D. Solution to active earth pressure of narrow cohesionless backfill against rigid retaining walls under translation mode[J]. Soils and Foundations, 2019, **59**(1): 151 - 161.
- [9] GRECO V. Active thrust on retaining walls of narrow backfill width[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **50**: 66 - 78.
- [10] CHEN J J, LI M G, WANG J H. Active earth pressure against rigid retaining walls subjected to confined cohesionless soil[J]. International Journal of Geomechanics, 2017, **17**(6): 06016041.
- [11] 赖丰文, 陈福全, 万梁龙. 考虑不完全土拱效应的浅层地基竖向应力计算[J]. 岩土力学, 2018, **39**(7): 2546 - 2554. (LAI Feng-wen, CHEN Fu-quan, WAN Liang-long. Vertical stresses of shallow foundations based on partially developed soil arching effect[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, **39**(7): 2546 - 2554. (in Chinese))
- [12] HANDY R L. The arch in soil arching[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, **111**(3): 302 - 318.
- [13] GOEL S, PATRA N. Effect of arching on active earth pressure for rigid retaining walls considering translation mode[J]. International Journal of Geomechanics, 2008, **8**(2): 123 - 133.
- [14] CAO W, LIU T, XU Z. Calculation of passive earth pressure using the simplified principal stress trajectory method on rigid retaining walls[J]. Computers and Geotechnics, 2019, **109**: 108 - 116.
- [15] KRABBENHOFT K, LYAMIN A, KRABBENHOFT J. Optum Computational Engineering (Optum G2) [CP]. Available on: www.optumce.com, 2019.
- [16] LAI F, CHEN S, XUE J, et al. New analytical solutions for shallow cohesive soils overlying trench voids under various slip surfaces[J]. Transportation Geotechnics, 2020, **25**: 100411.
- [17] CHEN F Q, MIAO G J, LAI F W. Base instability triggered by hydraulic uplift of pit-in-pit braced excavations in soft clay overlying a confined aquifer[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2020, **24**(6): 1717 - 1730.
- [18] PAIK K H, SALGADO R. Estimation of active earth pressure against rigid retaining walls considering arching effects[J]. Géotechnique, 2003, **53**(7): 643 - 653.
- [19] 高印立. 有限土体土压力的计算探讨[J]. 建筑科学, 2000, **16**(5): 53 - 56. (GAO Yin-li. The Calculation of finite earth pressure[J]. Building Science, 2000, **16**(5): 53 - 56. (in Chinese))