

DOI: 10.11779/CJGE20220235

Pasternak 层状地基中群桩水平动力响应解析解答

崔春义¹, 辛 宇¹, 许成顺², 梁志孟¹, 王本龙¹

(1. 大连海事大学土木工程系, 辽宁 大连 116026; 2. 北京工业大学城市与工程安全减灾省部共建教育部重点实验室, 北京 100124)

摘 要: 基于 Pasternak 地基和 Euler 梁振动理论, 提出了一种能考虑轴向荷载影响的单桩水平振动简化分析力学模型, 建立了层状地基中桩-土耦合作用下单桩水平振动控制方程; 采用微分变换的方法对方程解耦, 进一步结合桩-土边界连续条件求出单桩水平位移、转角及内力解析解答。然后, 考虑主动桩 I 振动引起被动桩 II 的动态位移, 建立被动桩 II 的水平振动控制方程, 求解得到被动桩 II 的响应解析解答, 依据动力相互作用因子定义进一步求得桩-桩水平动力相互作用因子。最后, 利用叠加原理求得群桩水平动力阻抗, 并与已有相关解析解进行退化对比验证其合理性。在此基础上, 通过参数化分析探讨了地基剪切系数、布桩类型、桩距径比、轴向特征参数对群桩水平阻抗以及桩顶反力分布、桩身内力分布的影响规律, 可为实际工程群桩桩基设计提供理论指导和参考作用。

关键词: 群桩; 动力阻抗; 水平振动; 桩-桩动力相互作用; Pasternak 地基

中图分类号: TU473.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)05-0893-10

作者简介: 崔春义(1978—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土力学数值方法和结构-地基相互作用等方面研究工作。E-mail: cuichunyi@dlnu.edu.cn。

Analytical solutions for horizontal dynamic response for pile groups based on Pasternak model

CUI Chunyi¹, XIN Yu¹, XU Chengshun², LIANG Zhimeng¹, WANG Benlong¹

(1. Department of Civil Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 2. Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: A simplified model for a single pile is established based on the Pasternak foundation and Euler beam models considering the axial second-order effects of pile shaft. The corresponding analytical solutions are derived by utilizing the differential transformation methods and the double-shear theory as well as the pile-soil continuity conditions. Then, considering the dynamic displacement of receiver pile II caused by the vibration of source pile I, the control equation for horizontal vibration of receiver pile II is established, and the analytical solutions for the response of receiver pile II are obtained. According to the definition of dynamic interaction factor, the pile-pile horizontal dynamic interaction factor is further obtained. Finally, the superposition principle is used to solve the horizontal dynamic impedance of pile groups, and its rationality is verified by comparing with the existing analytical solutions. On this basis, the influences of soil shear coefficient, pile type, pile to diameter ratio and axial feature parameters on the horizontal impedance of pile groups are discussed through the parametric analysis, and the distribution of the reaction force at the top of the pile and the distribution of the internal force of the pile body are discussed. It may provide theoretical guidance and reference for the design of pile groups in practical engineering.

Key words: pile group; dynamic impedance; horizontal vibration; pile-pile dynamic interaction; Pasternak foundation

0 引 言

群桩基础作为高速公路、铁路桥梁以及港口码头等大型工程中所采用主要基础型式, 其水平荷载作用下振动动力响应特性研究显得尤为重要。群桩水平振动分析方法一般可分为两类: ①直接法或整体法, 主要包括有限元方法和边界元法, 国内外众多学者在此方面作了一系列工作^[1-3]; ②相互作用因子叠加法。相对于直接法, 相互作用因子叠加法概念清晰, 计算相

对简单, 在群桩相关简化计算中被广泛采用^[4-6]。

Poulos^[4]最早提出相互作用因子的概念, Kaynia 等^[7]则在 Poulos 的基础上采用边界积分法得到群桩动力方程解。而后, Mylonakis 等^[8]利用 Winkler 地基模型推导了均匀地基和层状地基中桩-桩动力相互作用

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2021YFB2601102); 国家自然科学基金面上项目 (51878109, 52178315)

收稿日期: 2022-03-07

因子。蒯行成等^[9]、吴志明等^[10]和黄茂松等^[11]基于 Gazetas 方法,利用动力相互作用因子求解了 Winkler 地基中群桩水平动力阻抗。在此基础上,高广运等^[12]采用动力 Winkler 模型,提出了高频振动中计算分层地基中单桩和群桩动力阻抗的改进方法。进一步,黄茂松等^[13]采用 Winkler 地基模型求解得出部分埋入群桩基础水平-摇摆动力阻抗。

以上研究均将地基简化为 Winkler 地基模型,其计算简单,但本质上忽略了土体的连续性影响,可导致计算结果存在一定的误差^[14]。Pasternak 地基模型可进一步考虑地基土体剪切效应,更加符合实际,在此基础上许多学者做了一些相关研究^[15-18]。基于此点考虑,张治国等^[19]基于 Pasternak 地基模型推导了隧道开挖与邻近桩基相互作用的简化理论解。Wang 等^[20-21]在 Winkler 模型中引入描述地基土剪切效应的第二地基参数,采用初参数法求解双参数(Pasternak)地基模型中单桩水平振动的微分方程,利用传递矩阵法推导出层状地基中邻桩动力相互作用。Vega-Posada 等^[22]则针对均匀及非均匀 Pasternak 地基,提出了一种简化分析方法用于分析桩基水平振动问题。

然而,在实际工程中桩基往往承受多向耦合荷载作用,以上研究仅考虑了桩顶单一受荷形式。在桩基水平振动研究中,Halabe 等^[23]分析了竖向静荷载作用下的单桩水平振动模型,最早指出竖向荷载对桩基水平振动影响不可忽视。熊辉等^[24]以动力 Winkler 地基模型为基本理论,在桩顶轴、横向受力条件下利用矩阵传递法导出群桩水平动力相应解答。任青等^[25]则基于 Euler-Bernoulli 梁模型提出了水平荷载和轴向荷载共同作用下部分埋入群桩的简化计算方法。进一步地,熊辉等^[26]考虑桩顶轴横向力共同作用,基于 Laplace 变换求解了桩-土-桩水平动力相互作用因子。

从以上已有研究不难看出,桩周土体大多简化为 Winkler 地基模型,其无法合理考虑桩周土体剪切变形,而桩顶受荷只考虑水平荷载亦无法反映实际工程中耦合受力情况。鉴于以往群桩水平振动研究中,鲜见综合考虑桩周土体剪切变形和桩顶多向荷载耦合作用影响的相关研究,本文提出一种能考虑桩周土体剪切变形的单桩力学模型,在此基础上进一步考虑桩顶轴向荷载和水平谐振耦合作用,求解得出对应层状地基中群桩水平振动解析解答。

1 定解问题力学模型建立与求解

本文所推导群桩力学模型简化图如图 1 所示。群桩桩顶受水平谐和激振力 $Q_0 e^{i\omega t}$ 作用,其中 Q_0 为激振

力幅值, N_0 为作用在桩顶的轴向力, ω 为激振圆频率, $i = \sqrt{-1}$, t 为时间。

基本假定如下:

- (1) 桩身简化为圆形等截面、均质 Euler 梁。
- (2) 桩周土体沿桩身纵向划分为 n 层,每层土体简化为 Pasternak 地基模型以描述桩-土相互作用。
- (3) 桩-土模型系统各部分均满足小变形条件,桩土界面为完全接触且无相对滑动。
- (4) 桩顶处仅发生水平位移,桩底处为固端约束^[25]。
- (5) 假定承台刚性无限大,引入平面假定,认为桩顶变形位于同一平面内,且不考虑承台质量^[11]。

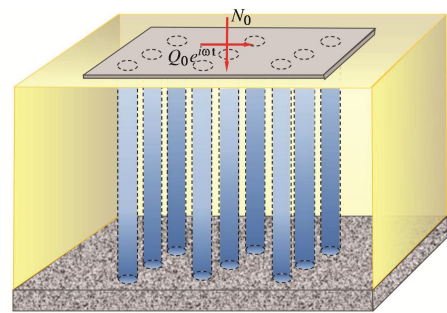


图 1 群桩简化力学模型图

Fig. 1 Simplified mechanical model for pile groups

1.1 单桩水平振动模型的建立与求解

综合 Euler 梁和 Pasternak 地基模型相关理论,得到桩身单元的动力平衡方程如下:

$$E^p I^p \frac{\partial^4 u_y^p(z, t)}{\partial z^4} + k_{xy}^s u_y^p(z, t) + c_{xy}^s \frac{\partial u_y^p(z, t)}{\partial t} + m^p \frac{\partial^2 u_y^p(z, t)}{\partial t^2} - g_{xy}^s B_0 \frac{\partial^2 u_y^p(z, t)}{\partial z^2} + N_0 \frac{\partial^2 u_y^p(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

式中: $u_y^p(z, t)$ 为主动桩 I 第 j 段桩身单元质点的水平位移; E^p , I^p , m^p 分别为桩体弹性模量、截面惯性矩和单位长度质量; k_{xy}^s , c_{xy}^s 和 g_{xy}^s 分别为第 j 层桩周地基土刚度系数、阻尼系数和地基剪切刚度;

$$k_{xy}^s = 1.2 E_j^s, c_{xy}^s = 6 a_0^{-1/4} \rho_j^s \nu_j^s d + 2 \beta_j^s \frac{k_{xy}^s}{\omega}, g_{xy}^s = \frac{E_j^s t_j^s}{6(1 + \nu_j^s)},$$

ν_j^s 为桩周土剪切波速, B_0 为桩的计算宽度, $B_0 = 0.9(1.5d + 0.5)$ 。

桩体水平位移可表示为 $u_y^p(z, t) = U_y^p(z) e^{i\omega t}$, 将其代入式 (1) 可进一步得到如下方程:

$$\frac{d^4 U_y^p(z)}{dz^4} - \xi_j^2 \frac{d^2 U_y^p(z)}{dz^2} + \zeta_j^2 U_y^p(z) = 0 \quad (2)$$

式中: $W^p = E^p I^p$, $G_{xy}^s = g_{xy}^s B_0$, $k_j^s = k_{xy}^s + i c_{xy}^s \omega - m^p \omega^2$,

$$\xi_j^2 = \frac{G_{xy}^s - N_0}{W^p}, \zeta_j^2 = \frac{k_j^s}{W^p}。$$

显然, 式(2)为四阶线性常系数微分方程, 则可得其方程位移通解为

$$U_{ij}^p(z) = e^{\lambda_j z} (A_{11j} \cos \chi_j z + B_{11j} \sin \chi_j z) + e^{-\lambda_j z} (C_{11j} \cos \chi_j z + D_{11j} \sin \chi_j z) \quad (3)$$

式中: $\lambda_j = \sqrt{\zeta_j/2 + \xi_j^2/4}$; $\chi_j = \sqrt{\zeta_j/2 - \xi_j^2/4}$; 系数 A_{11j} , B_{11j} , C_{11j} , D_{11j} 取值可由边界条件进一步确定。

基于 Euler 梁理论, 桩身转角、弯矩、剪力与桩身水平位移相互关系, 可分别求得:

$$\psi_{ij}^p(z) = e^{\lambda_j z} (A_{12j} \cos \chi_j z + B_{12j} \sin \chi_j z) + e^{-\lambda_j z} (C_{12j} \cos \chi_j z + D_{12j} \sin \chi_j z) \quad (4)$$

$$M_{ij}^p(z) = W^p \{ e^{\lambda_j z} (A_{13j} \cos \chi_j z + B_{13j} \sin \chi_j z) + e^{-\lambda_j z} (C_{13j} \cos \chi_j z + D_{13j} \sin \chi_j z) \} \quad (5)$$

$$P_{ij}^p(z) = W^p \{ e^{\lambda_j z} (A_{14j} \cos \chi_j z + B_{14j} \sin \chi_j z) + e^{-\lambda_j z} (C_{14j} \cos \chi_j z + D_{14j} \sin \chi_j z) \} \quad (6)$$

令 $f_{0j}(z) = e^{\lambda_j z} \cos \chi_j z$, $f_{1j}(z) = e^{\lambda_j z} \sin \chi_j z$, $f_{2j}(z) = e^{-\lambda_j z} \cos \chi_j z$, $f_{3j}(z) = e^{-\lambda_j z} \sin \chi_j z$, $f_{4j} = \lambda_j^2 - \chi_j^2$, $f_{5j} = 2\lambda_j \chi_j$, $f_{6j} = \lambda_j^3 - 3\lambda_j \chi_j^2$, $f_{7j} = 3\lambda_j^2 \chi_j - \chi_j^3$, 则式(4)~(6)中待定系数可表达为

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{12j} = \lambda_j A_{11j} + \chi_j B_{11j}, \\ B_{12j} = -\chi_j A_{11j} + \lambda_j B_{11j}, \\ C_{12j} = -\lambda_j C_{11j} + \chi_j D_{11j}, \\ D_{12j} = -\chi_j C_{11j} - \lambda_j D_{11j}, \\ A_{13j} = f_{4j} A_{11j} + f_{5j} B_{11j}, \\ B_{13j} = -f_{5j} A_{11j} + f_{4j} B_{11j}, \\ C_{13j} = f_{4j} C_{11j} - f_{5j} D_{11j}, \\ D_{13j} = f_{5j} C_{11j} + f_{4j} D_{11j}, \\ A_{14j} = f_{6j} A_{11j} + f_{7j} B_{11j}, \\ B_{14j} = -f_{7j} A_{11j} + f_{6j} B_{11j}, \\ C_{14j} = -f_{6j} C_{11j} + f_{7j} D_{11j}, \\ D_{14j} = -f_{7j} C_{11j} - f_{6j} D_{11j} \end{array} \right. \quad (7)$$

式中: A_{12j} , A_{13j} , A_{14j} , B_{12j} , B_{13j} , B_{14j} , C_{12j} , C_{13j} , C_{14j} , D_{12j} , D_{13j} , D_{14j} 为未知系数, 可由边界条件进一步求得。

在第 j 段与第 $j+1$ 段桩身截面处, 桩的水平位移、转角、弯矩及剪力连续, 则可进一步求得系数矩阵方程组为

$$[F_{ij}(z_j)] \{T_{ij}\} = [F_{i,j+1}(z_j)] \{T_{i,j+1}\} \quad (8)$$

式中: $\{T_{ij}\} = [A_{11j} \ B_{11j} \ C_{11j} \ D_{11j}]^T$;

$$[F_{ij}(z_j)] = [Ff_1 \ Ff_2 \ Ff_3 \ Ff_4];$$

$$\begin{aligned} Ff_1 &= \begin{bmatrix} f_{0j}(z_j) \\ f_{0j}(z_j)\lambda_j - f_{1j}(z_j)\chi_j \\ f_{0j}(z_j)f_{4j} - f_{1j}(z_j)f_{5j} \\ f_{0j}(z_j)f_{6j} - f_{1j}(z_j)f_{7j} \end{bmatrix}; \\ Ff_2 &= \begin{bmatrix} f_{1j}(z_j) \\ f_{0j}(z_j)\chi_j + f_{1j}(z_j)\lambda_j \\ f_{0j}(z_j)f_{5j} + f_{1j}(z_j)f_{4j} \\ f_{0j}(z_j)f_{7j} + f_{1j}(z_j)f_{6j} \end{bmatrix}; \\ Ff_3 &= \begin{bmatrix} f_{2j}(z_j) \\ -f_{2j}(z_j)\lambda_j - f_{3j}(z_j)\chi_j \\ f_{2j}(z_j)f_{4j} - f_{3j}(z_j)f_{5j} \\ -f_{2j}(z_j)f_{6j} - f_{3j}(z_j)f_{7j} \end{bmatrix}; \\ Ff_4 &= \begin{bmatrix} f_{3j}(z_j) \\ f_{2j}(z_j)\chi_j - f_{3j}(z_j)\lambda_j \\ f_{3j}(z_j)f_{4j} - f_{2j}(z_j)f_{5j} \\ f_{2j}(z_j)f_{7j} - f_{3j}(z_j)f_{6j} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由式(8)可得递推表达式 $\{T_{i,j+1}\} = [F_{i,j+1}(z_j)]^{-1} \cdot [F_{ij}(z_j)] \{T_{ij}\}$, 再由递推关系可将第 m 段桩身对应系数矩阵 $\{T_m\}$ 表示为

$$\{T_{1m}\} = \left[\prod_{j=m}^1 [F_{ij}(z_{j-1})]^{-1} [F_{i,j-1}(z_{j-1})] \right] \{T_{11}\} \quad (9)$$

进一步将位移、转角、弯矩和剪力的表达式代入边界条件化简可得:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \chi_1 & -\lambda_1 & \chi_1 \\ f_{61} & f_{71} & -f_{61} & f_{71} \end{bmatrix} [T_{11}] = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_0/W^p \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$[Ffl_1 \ Ffl_2 \ Ffl_3 \ Ffl_4] [T_{1n}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10b)$$

式中: $[T_{11}] = [A_{111} \ B_{111} \ C_{111} \ D_{111}]^T$;

$$Ffl_1 = \begin{bmatrix} f_{0n}(l) \\ f_{0n}(l)\lambda_n - f_{1n}(l)\chi_n \end{bmatrix}; \quad Ffl_2 = \begin{bmatrix} f_{1n}(l) \\ f_{0n}(l)\chi_n + f_{1n}(l)\lambda_n \end{bmatrix};$$

$$Ffl_3 = \begin{bmatrix} f_{2n}(l) \\ -f_{2n}(l)\lambda_n - f_{3n}(l)\chi_n \end{bmatrix}; \quad Ffl_4 = \begin{bmatrix} f_{3n}(l) \\ f_{2n}(l)\chi_n - f_{3n}(l)\lambda_n \end{bmatrix}.$$

将式(9)代入式(10b)整理可得关于 $[T_{11}]$ 的方程, 再联立式(10a), 可求得 A_{111} , B_{111} , C_{111} , D_{111} 的解析表达式。再将其代入式(3)中求得桩身水平位移。最后根据桩身水平位移表达式, 以及桩身弯矩、剪力与桩身水平位移之间的关系, 求得桩身弯矩和剪力。

1.2 桩-桩水平动力相互作用因子

假设各桩几何尺寸和材料性质相同, 下面将基于上述分析所得到的主动桩 I 水平动力响应解析解答, 进一步分析由主动桩 I 所引起的被动桩 II 的动力响应情况。相邻两桩的桩间距较小, 故假定柱面波同时到

达被动桩的各个截面,且忽略被动桩的径向尺寸。两桩平面位置示意图如图 2 所示,由图可见两桩连线与振动方向 x 的夹角为 θ ,桩间距为 S 。

根据文献[27]所述,土体水平位移衰减函数为

$$f(S, \theta) = f(S, 0) \cos^2 \theta + f\left(S, \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 \theta \quad (11)$$

$$\text{式中: } f(S, 0) = \sqrt{\frac{r_0}{S}} \exp\left[\frac{-\omega(\beta_j^s + i)(S - r_0)}{V_{L1}}\right], V_{L1} =$$

$$\frac{3.4V_j^s}{\pi(1 - \nu_j^s)}; f\left(S, \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{r_0}{S}} \exp\left[\frac{-\omega(\beta_j^s + i)(S - r_0)}{V_j^s}\right]。$$

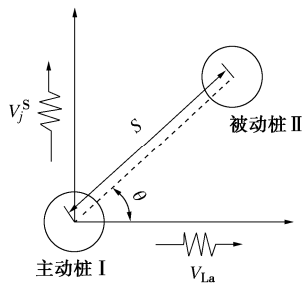


图 2 双桩平面位置示意图

Fig. 2 Relative position of two piles

主动桩 I 所引起的场地振动位移可表示为 $u_{ly}^s(z, t) = U_{ly}^s(z) e^{i\omega t} = f(S, \theta) U_{ly}^p(z) e^{i\omega t}$, 被动桩 II 桩身各单元水平位移可表示为 $u_{ly}^p(z, t) = U_{ly}^p(z) e^{i\omega t}$ 。进一步考虑桩与土体间动力相互作用,则被动桩 II 的动力平衡方程可化简为

$$\frac{d^4 U_{ly}^p(z)}{dz^4} - \xi_j^2 \frac{d^2 U_{ly}^p(z)}{dz^2} + \zeta_j^2 U_{ly}^p(z) = t_{aj} U_{ly}^p(z) \quad (12)$$

$$\text{式中: } t_{aj} = \frac{(k_{xj}^s + i c_{xj}^s \omega) f(s, \theta)}{W^p}。$$

方程 (12) 所对应齐次方程的通解参考式 (3), 而方程 (12) 的特解可表示为

$$U_{ly}^{p**}(z) = z(F_{1j} e^{\gamma_{1j} z} + F_{2j} e^{\gamma_{2j} z} + F_{3j} e^{-\gamma_{1j} z} + F_{4j} e^{-\gamma_{2j} z}) \quad (13)$$

$$\text{式中: } \gamma_{1j} = \lambda_j + \chi_j i; \gamma_{2j} = \lambda_j - \chi_j i。$$

将式 (13) 代入式 (12) 则可分别求得:

$$\left. \begin{aligned} F_{1j} &= \frac{t_{aj} A_{11j} - t_{aj} B_{11j} i}{4(2\gamma_{1j}^3 - \xi_j^2 \gamma_{1j})}, \\ F_{2j} &= \frac{t_{aj} A_{11j} + t_{aj} B_{11j} i}{4(2\gamma_{2j}^3 - \xi_j^2 \gamma_{2j})}, \\ F_{3j} &= \frac{t_{aj} C_{11j} + t_{aj} D_{11j} i}{-4(2\gamma_{1j}^3 - \xi_j^2 \gamma_{1j})}, \\ F_{4j} &= \frac{t_{aj} C_{11j} - t_{aj} D_{11j} i}{-4(2\gamma_{2j}^3 - \xi_j^2 \gamma_{2j})} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这样方程 (12) 全解可表示为

$$U_{ly}^p(z) = e^{\lambda_j z} (A_{21j} \cos \chi_j z + B_{21j} \sin \chi_j z) +$$

$$e^{-\lambda_j z} (C_{21j} \cos \chi_j z + D_{21j} \sin \chi_j z) + U_{ly}^{p**}(z) \quad (15)$$

对于 Euler 梁而言,桩身转角、弯矩、剪力与桩身水平位移相互关系为

$$\psi_{ly}^p(z) = e^{\lambda_j z} (A_{22j} \cos \chi_j z + B_{22j} \sin \chi_j z) +$$

$$e^{-\lambda_j z} (C_{22j} \cos \chi_j z + D_{22j} \sin \chi_j z) + \psi_{ly}^{p**}(z) \quad (16)$$

$$M_{ly}^p(z) = W^p [e^{\lambda_j z} (A_{23j} \cos \chi_j z + B_{23j} \sin \chi_j z) +$$

$$e^{-\lambda_j z} (C_{23j} \cos \chi_j z + D_{23j} \sin \chi_j z) + M_{ly}^{p**}(z)] \quad (17)$$

$$P_{ly}^p(z) = W^p [e^{\lambda_j z} (A_{24j} \cos \chi_j z + B_{24j} \sin \chi_j z) +$$

$$e^{-\lambda_j z} (C_{24j} \cos \chi_j z + D_{24j} \sin \chi_j z) + P_{ly}^{p**}(z)] \quad (18)$$

式中:

$$\psi_{ly}^{p**}(z) = F_{1j} (1 + z\gamma_{1j}) e^{\gamma_{1j} z} + F_{2j} (1 + z\gamma_{2j}) e^{\gamma_{2j} z} +$$

$$F_{3j} (1 - z\gamma_{1j}) e^{-\gamma_{1j} z} + F_{4j} (1 - z\gamma_{2j}) e^{-\gamma_{2j} z};$$

$$M_{ly}^{p**}(z) = F_{1j} (2\gamma_{1j} + z\gamma_{1j}^2) e^{\gamma_{1j} z} + F_{2j} (2\gamma_{2j} + z\gamma_{2j}^2) e^{\gamma_{2j} z} +$$

$$F_{3j} (-2\gamma_{1j} + z\gamma_{1j}^2) e^{-\gamma_{1j} z} + F_{4j} (-2\gamma_{2j} + z\gamma_{2j}^2) e^{-\gamma_{2j} z};$$

$$P_{ly}^{p**}(z) = F_{1j} (3\gamma_{1j}^2 + z\gamma_{1j}^3) e^{\gamma_{1j} z} + F_{2j} (3\gamma_{2j}^2 + z\gamma_{2j}^3) e^{\gamma_{2j} z} +$$

$$F_{3j} (3\gamma_{1j}^2 - z\gamma_{1j}^3) e^{-\gamma_{1j} z} + F_{4j} (3\gamma_{2j}^2 - z\gamma_{2j}^3) e^{-\gamma_{2j} z}。$$

特别地,式 (16) ~ (18) 中待定系数 A_{22j} , B_{22j} , C_{22j} , D_{22j} , A_{23j} , B_{23j} , C_{23j} , D_{23j} , A_{24j} , B_{24j} , C_{24j} , D_{24j} 可参考式 (7) 并依据式 (15) 中的 A_{21j} , B_{21j} , C_{21j} , D_{21j} 而进一步表示。

在被动桩 II 桩身第 j 段和第 $j+1$ 段连接截面处,桩身水平位移、转角、弯矩及剪力连续,则可得系数矩阵满足如下:

$$[F_{ly}^p(z_j)] \{T_{ly}\} + [R_{ly}(z_j)] = [F_{ly+1}^p(z_j)] \{T_{ly+1}\} + [R_{ly+1}(z_j)] \quad (19)$$

式中: $F_{ly}^p(z_j)$ 可参见式 (8) 中 $F_{ly}^p(z_j)$;

$$\{T_{ly}\} = [A_{2-1j} \ B_{2-1j} \ C_{2-1j} \ D_{2-1j}]^T; [R_{ly}(z_j)] =$$

$$[U_{ly}^{p**}(z_j) \ \phi_{ly}^{p**}(z_j) \ M_{ly}^{p**}(z_j) \ Q_{ly}^{p**}(z_j)]^T。$$

由式 (19) 可进一步得到:

$$\{T_{ly+1}\} = [X_{ly}(z_j)] \{T_{ly}\} + [N_{ly}(z_j)] \quad (20)$$

$$\text{式中: } X_{ly}(z_j) = F_{ly+1}^{-1}(z_j) F_{ly}(z_j); N_{ly}(z_j) = F_{ly+1}^{-1}(z_j) \cdot$$

$$([R_{ly}(z_j)] - [R_{ly+1}(z_j)])。$$

则基于递推关系,被动桩 II 第 m 段桩身对应的系数矩阵 $\{T_{lm}\}$ 可表示为

$$\{T_{lm}\} = \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ \prod_{j=m-1}^{i+1} X_{ly}(z_j) \right\} [N_{ly}(z_i)] + [N_{lm-1}(z_{m-1})] + \left[\prod_{j=m-1}^1 X_{ly}(z_j) \right] \{T_{lm}\} \quad (21)$$

令 $F_{5j} = F_{1j} + F_{3j}$, $F_{6j} = F_{2j} + F_{4j}$ 。将被动桩位移、转角、弯矩、剪力表达式分别代入其边界可得:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \chi_1 & -\lambda_1 & \chi_1 \\ f_{61} & f_{71} & -f_{61} & f_{71} \end{bmatrix} [T_{III}] = [V_1] \quad (22a)$$

$$[Ffl_1 \quad Ffl_2 \quad Ffl_3 \quad Ffl_4] [T_{III}] = [V_2] \quad (22b)$$

式中: $[T_{III}] = [A_{211} \quad B_{211} \quad C_{211} \quad D_{211}]^T$;

$$[V_1] = [-(F_{51} + F_{61}) - (3F_{51}\gamma_{11}^2 + 3F_{61}\gamma_{21}^2)]^T$$

$$Ffl_1 = \begin{bmatrix} f_{0n}(l) \\ f_{0n}(l)\lambda_n - f_{1n}(l)\chi_n \end{bmatrix}; \quad Ffl_2 = \begin{bmatrix} f_{1n}(l) \\ f_{0n}(l)\chi_n + f_{1n}(l)\lambda_n \end{bmatrix};$$

$$Ffl_3 = \begin{bmatrix} f_{2n}(l) \\ -f_{2n}(l)\lambda_n - f_{1n}(l)\chi_n \end{bmatrix}; \quad Ffl_4 = \begin{bmatrix} f_{3n}(l) \\ f_{2n}(l)\chi_n - f_{3n}(l)\lambda_n \end{bmatrix};$$

$$[V_2] = \{-l(F_{1n}e^{\gamma_{1n}l} + F_{2n}e^{\gamma_{2n}l} + F_{3n}e^{-\gamma_{1n}l} + F_{4n}e^{-\gamma_{2n}l}) - \\ [F_{1n}(1+l\gamma_{1n})e^{\gamma_{1n}l} + F_{2n}(1+l\gamma_{2n})e^{\gamma_{2n}l} + \\ F_{3n}(1-l\gamma_{1n})e^{-\gamma_{1n}l} + F_{4n}(1-l\gamma_{2n})e^{-\gamma_{2n}l}]\}.$$

将式(21)代入式(22b)并立式(22a)可求得待定系数矩阵 $[T_{III}]$, 并根据递推表达式(21)可进一步得到各段桩身系数 $[T_{II}]$ 。然后, 将系数表达式代入式(15)可得到被动桩桩身水平位移解析解答。最后, 根据被动桩桩身弯矩、剪力与水平位移之间的关系, 可求出桩身内力解析解答。

依据桩-桩水平动力相互作用因子定义^[10]可得:

$$\alpha_{II-1} = \frac{U_{III}^p(0)}{U_{II}^p(0)} = \frac{A_{211} + C_{211}}{A_{111} + C_{111}} \quad (23)$$

1.3 群桩振动及桩身内力

假定桩顶承台刚性无限大, 群桩中所有单桩的桩顶水平位移等于承台水平位移。由桩-桩动力相互作用因子叠加法可知, 桩顶承台位移和各桩桩顶水平位移满足如下关系:

$$U^G(0) = U_m^G(0) = \sum_n \alpha_{mn} \frac{q_n(0)}{k_x} \quad (24)$$

式中: $n=1, 2, \dots, X$, X 为群桩总桩数; $U^G(0)$ 为桩顶承台水平位移; $U_m^G(0)$ 为群桩中第 m 根桩的桩顶水平位移; α_{mn} 为桩 m 和桩 n 间的水平动力相互作用因子, 当 $m=n$ 时, $\alpha_{mn}=1$; $q_n(0)$ 为第 n 个桩桩顶所传递的承台外荷载; k_x 为单桩动阻抗。

显然, 基于整体力平衡条件 $\sum_{n=1}^N q_n(0) = Q_0 e^{i\omega t}$, 联

立式(23), (24)可写成如下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ -1 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^G(0) \\ \frac{q_1(0)}{k_x} \\ \frac{q_2(0)}{k_x} \\ \vdots \\ \frac{q_n(0)}{k_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{Q_0 e^{i\omega t}}{k_x} \end{bmatrix} \quad (25)$$

求解式(25)即可得出承台水平位移 $U^G(0)$ 及各桩桩顶所分担的桩顶荷载 $q_n(0)$, 可进一步求得群桩水平振动阻抗为

$$R_{hh}^G = \frac{Q_0 e^{i\omega t}}{U^G(0)} = K_{hh}^G + i a_0 C_{hh}^G \quad (26)$$

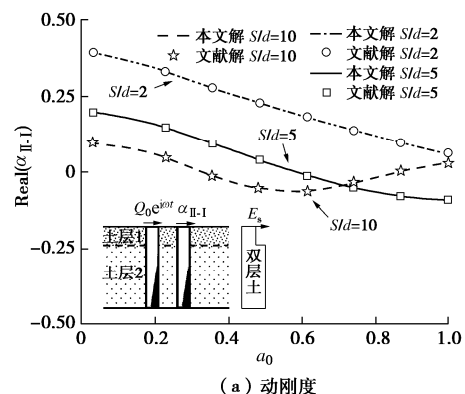
当群桩中任一单桩为主动桩 I 时, 其在自身桩顶分担荷载作用下产生的水平位移可表示为 $q_n(0)/k_x$, 而由上部结构通过承台传递到桩顶荷载所引起的桩身内力则可据式(5), (6)求得; 当群桩中任一单桩为被动桩 II 时, 其在邻近桩位移场影响下所产生的桩顶附加位移为 α_{mn} ($q_n(0)/k_x$), 而由桩与桩之间相互作用产生的附加内力则可由式(17), (18)求得; 进一步通过叠加法考虑以上两种情况的共同效应, 可求得群桩中任一单桩桩身内力。

2 算例分析

如无特殊说明, 算例中计算参数选取如下^[20]: 土层层数为 3, 阻尼系数 $\xi_s = 0.05$ 、泊松比 $\nu_s = 0.4$ 、密度 $\rho_s = 2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、桩土弹模比 E^p/E_j^s ($j=1, 2, 3$) 自上而下分别取值为 3000, 2000 和 1000; 桩长径比 $L/d = 20$, 桩径为 0.5 m, 桩体密度 $\rho^p = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E^p = 20 \text{ GPa}$, $Q_0 = 100 \text{ kN}$, 两桩连线与振动方向 x 的夹角 $\theta = \pi/4$, 两桩的间距 $S = 5d$, 单桩静刚度 $K_G^S = 0.9 \times 10^6 \text{ kN/m}$ 。

2.1 本文模型相关解答合理性验证

为验证本文所推导群桩中桩-桩水平动力相互作用因子解答的合理性, 令 $N_0 \rightarrow 0$ 将本文动力相互作用因子解答退化到不考虑轴向荷载作用的情况与文献[21]已有解答进行对比, 具体如图 3 所示。进一步地, 令 $t_j^s \rightarrow 0$ 将本文基于 Pasternak 地基模型的阻抗解答退化至不考虑剪切情况与文献[11]已有解答对比, 具体如图 4 所示。由图 3, 4 可见, 本文所推导的群桩水平动力响应相关解析退化解答与已有解答结果吻合良好。



(a) 动刚度

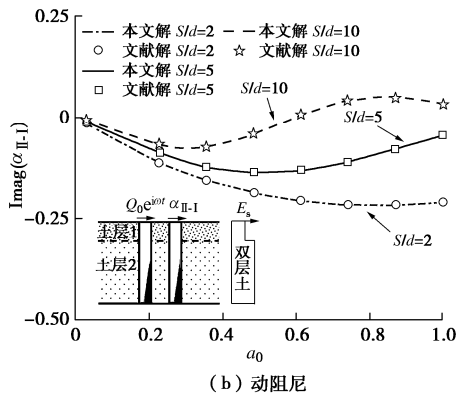


图3 群桩基础相互作用因子退化解与王珏已有解^[21]对比情况

($E^p/E_1^s = 10000, E^p/E_2^s = 1000, h_1/d = 1$)

Fig. 3 Comparison of horizontal interaction factors for pile groups with Wang's solution in Reference [21]

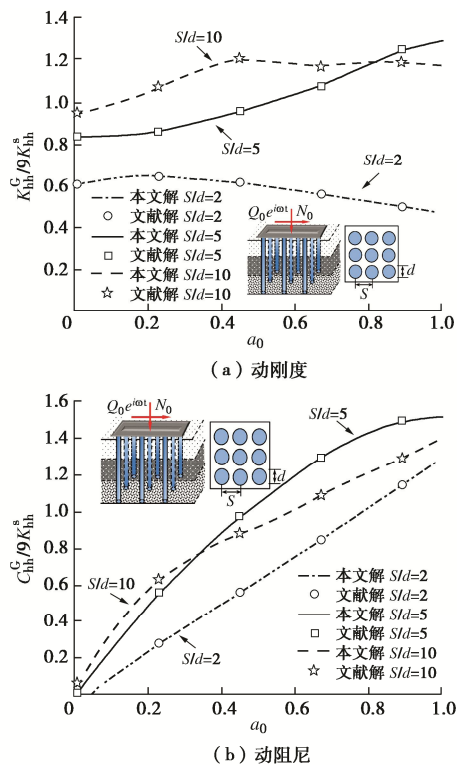


图4 群桩基础(3×3)水平阻抗退化解与黄茂松已有解^[11]对比情况

Fig. 4 Comparison of horizontal dynamic impedance for pile groups with Huang's solution in Reference [11]

2.2 参数化分析

为进一步分析地基剪切效应对群桩水平阻抗的影响规律,故同时将本文计算模型中桩周土 Pasternak 地基退化为 Winkler 地基。选取 1×2 桩、2×2 桩和 3×3 桩 3 种布桩型式(即 X 分别取为 2, 4, 9),采用上述两种模型计算所得的群桩水平动力阻抗对比情况如图 5 所示。由图 5 可见,在相同桩数情况下,采用 Pasternak 地基模型计算所得群桩水平阻抗大于 Winkler 地基模

型所得结果,且随着桩数的增加,两种模型计算结果的差异性变得更为显著。相比较动阻尼而言,群桩水平阻抗的动刚度的两种模型计算结果差异性更明显。简而言之,由于 Winkler 地基模型无法考虑土体剪切作用,从而低估了群桩水平阻抗幅值。特别是当桩数较大时, Pasternak 地基模型更能合理描述桩土体系水平耦合振动特性。

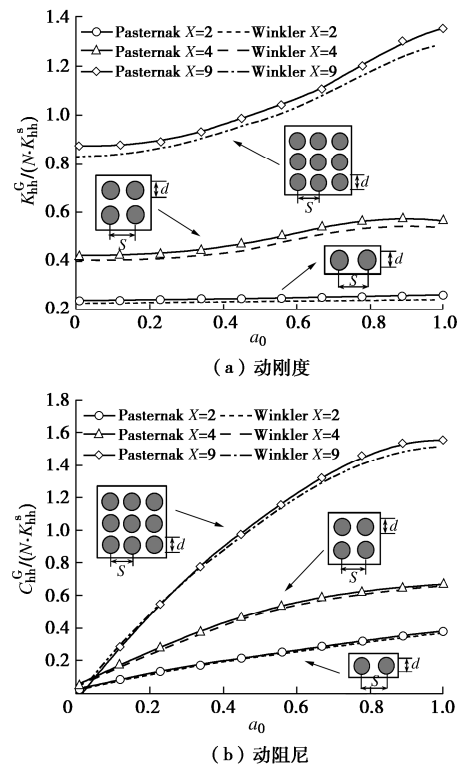


图5 基于两种模型求解群桩水平阻抗对比情况(桩长径比 $L/d=15$)

Fig. 5 Horizontal impedances of $n \times n$ pile groups from Pasternak model and Winkler model in layered foundation ($L/d=15$)

为分析桩距径比变化对群桩水平阻抗的影响规律,这里选取为 2×2 和 3×3 两种布桩群桩型式(即 X 分别取为 4, 9),群桩水平动刚度和动阻尼随桩距径比的变化情况如图 6, 7 所示。在不同桩距径比条件下,水平阻抗随无量纲荷载激振频率变化情况亦不同。具体地,当桩距径比 $S/d=2$ 时,群桩动刚度幅值随激振频率的增大而单调减小,而动阻尼幅值则随激振频率的增加而变大;当桩距径比 $S/d=4$ 时,群桩动刚度和动阻尼均随无量纲激振频率的增加而增大;当桩距径比 $S/d=6$ 和 $S/d=10$ 时,群桩动刚度随无量纲激振频率的增加呈现先增大后减小的变化趋势且具有峰值,而动阻尼则仍随无量纲激振频率的增加而变大。此外,在其它条件相同情况下,群桩桩数越多,其动刚度和动阻尼幅值水平越高。

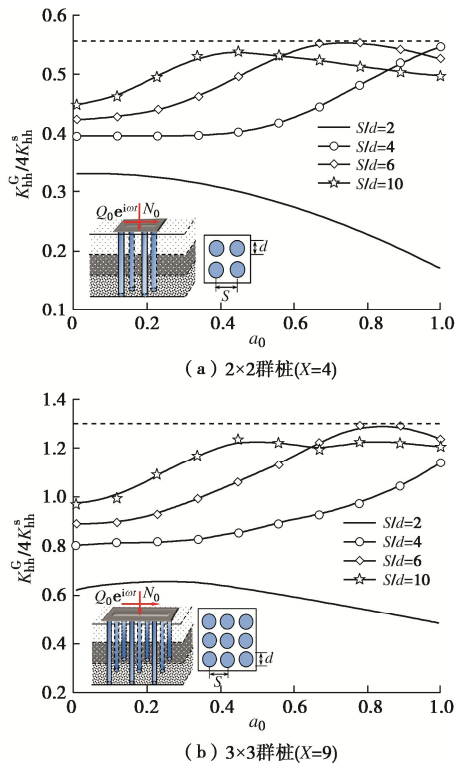
图6 不同桩数下群桩水平动刚度对比情况 (桩长径比 $L/d=15$)

Fig. 6 Comparison of horizontal dynamic stiffness of pile groups under different pile numbers ($L/d=15$)

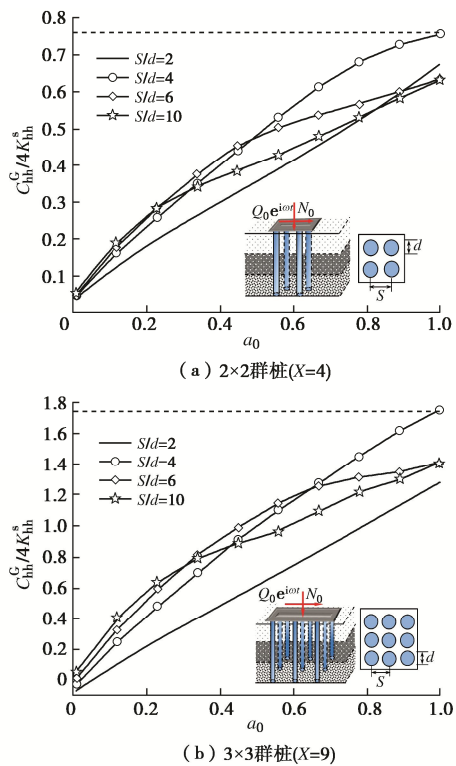
图7 不同桩数下群桩水平动阻尼对比图 (桩长径比 $L/d=15$)

Fig. 7 Comparison of horizontal dynamic damping of pile groups under different pile numbers ($L/d=15$)

为分析轴向力 N_0 对群桩水平阻抗的影响规律, 轴向力按 $N_0 = \delta(E^p d^2)$ 取值^[27], 其中 δ 为轴向特征参

数。轴向特征参数变化对群桩水平动刚度和动阻尼的影响情况分别如图8, 9所示。由图8可见, 在其他条件不变情况下, 两种桩距径比所对应群桩水平动刚度均随轴向特征参数的增加而显著降低, 且群桩桩数越多, 轴向特征参数对群桩水平动刚度的影响也越显著。

不同地, 轴向特征参数对群桩动阻尼的影响并未呈现单调变化特征, 如图9所示。对于 3×3 群桩 ($X=9$) 情况, 当桩距径比较小时 (桩距径比 $S/d=2$), 群桩水平动阻尼随轴向特征参数的增加而增加; 当桩距径比较大时 (桩距径比 $S/d=5$), 在低频段随轴向特征参数增加群桩水平动阻尼略有增加, 而在较高频段则略有减少。对于 2×2 群桩 ($X=4$) 情况, 轴向特征参数变化对群桩水平动阻尼的影响可以忽略。

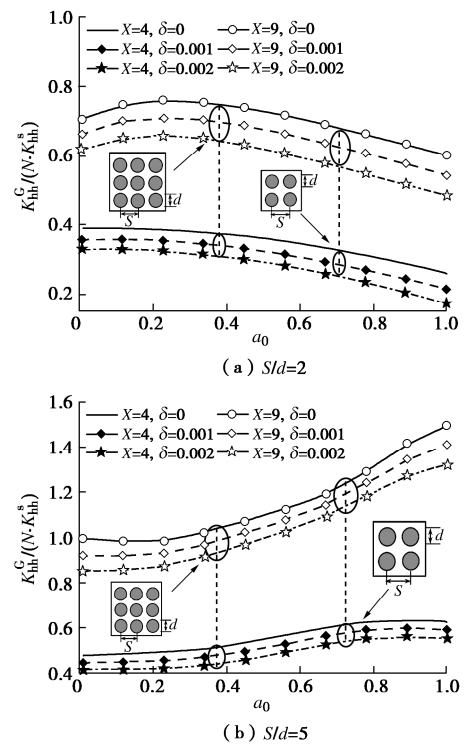


图8 轴向特征参数变化对群桩水平动刚度的影响

Fig. 8 Influences of variation of axial characteristic parameters on horizontal dynamic stiffness of pile groups

为便于分析, 定义桩顶剪力无量纲参量 $\bar{Q} = q_n(0)/Q'_0$, 其中 Q'_0 为桩顶平均剪力。以 3×3 群桩为例, 两种桩距径比所对应的群桩各桩桩顶剪力分布情况如图10所示。由图10可见, 当桩距径比较小时 (桩距径比 $S/d=2$), 在同频率下, 角桩桩顶平均剪力最大, 边桩次之 (桩2 > 桩3), 中心桩最小。当桩距径比较大时 (桩距径比 $S/d=5$), 群桩各桩桩顶剪力在低频段分布规律与前述一致。不同地, 在高频段各桩桩顶剪力则呈现出与低频段相反的分布规律, 即中心桩桩顶平均剪力最大, 边桩次之 (桩2 < 桩3), 角桩最小。

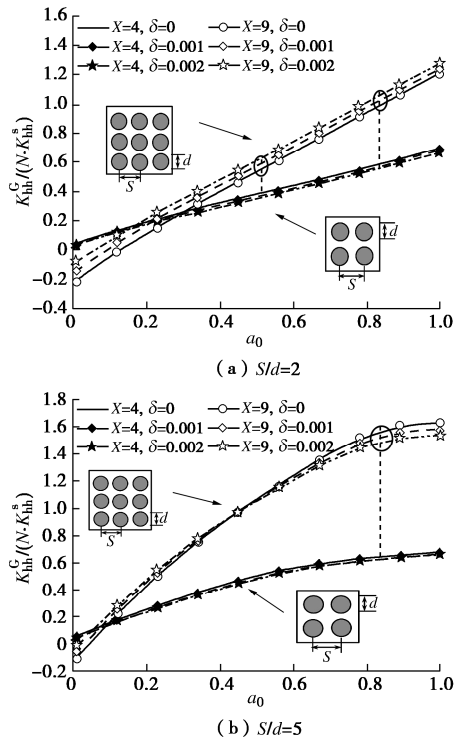
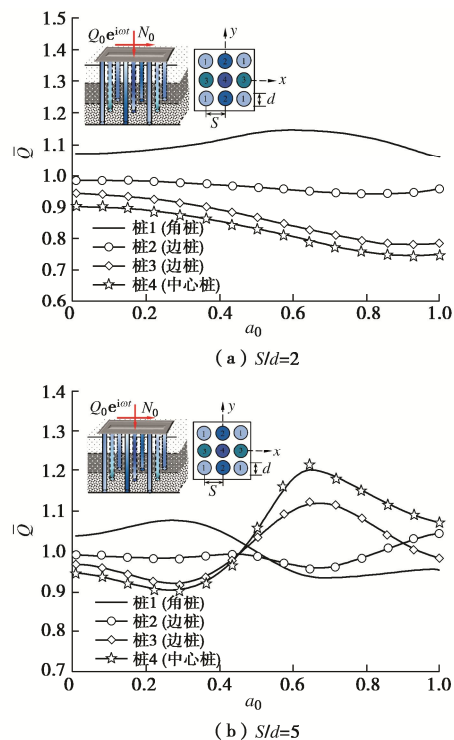


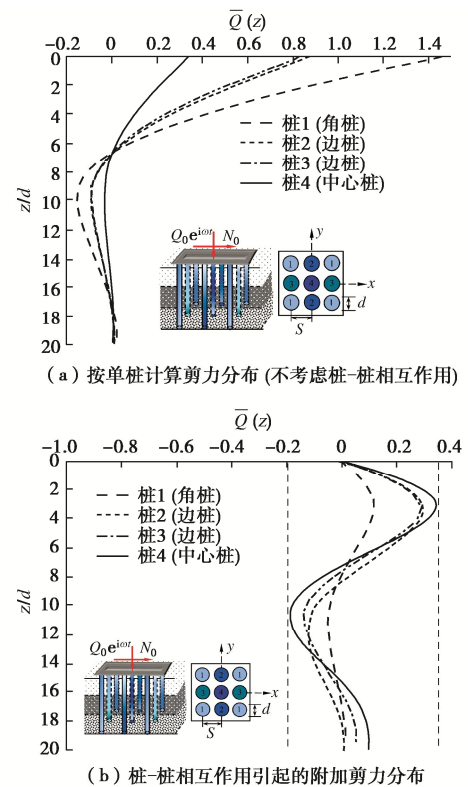
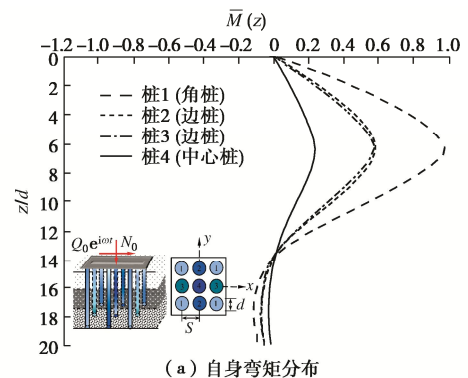
图9 轴向特征参数变化对群桩水平动阻尼的影响

Fig. 9 Influences of variation of axial characteristic parameters on horizontal dynamic damping of pile group

图10 3×3 群桩各桩桩顶剪力无量纲参量变化情况Fig. 10 Variation of dimensionless parameters of shear force at top of 3×3 pile groups

定义桩顶剪力无量纲参量 $\bar{Q}(z) = Q(z)/Q'_0$, 其中 Q'_0 为桩顶平均剪力, 同样以 3×3 群桩为例, 3×3 群

桩中各桩桩身剪力分布情况($a_0 = 0.5$, $S/d=2$)如图 11 所示。由图 11 (a) 可见, 当不考虑桩-桩相互作用, 对于相同深度而言, 按照单桩计算所得的桩身剪力幅值, 角桩最大, 边桩次之, 中心桩最小。不同地, 由图 11 (b) 可见, 对于相同深度而言, 桩-桩相互作用引起的附加剪力幅值, 中心桩最大, 边桩次之, 角桩最小。定义桩身弯矩无量纲参量 $\bar{M}(z) = M(z)/(dQ'_0)$ 。同样以 3×3 群桩为例, 3×3 群桩中各桩桩身弯矩分布情况($a_0 = 0.5$, $S/d=2$)如图 12 所示。与桩身剪力分布规律相似, 当不考虑桩-桩相互作用, 对于相同深度而言, 按照单桩计算所得的桩身弯矩幅值, 角桩最大, 边桩次之, 中心桩最小; 而桩-桩相互作用引起的附加弯矩幅值, 中心桩最大, 边桩次之, 角桩最小。

图11 3×3 群桩中各桩桩身无量纲剪力分布情况 ($a_0 = 0.5$, $S/d=2$)Fig. 11 Distribution of dimensionless shear force of 3×3 pile group

(a) 自身弯矩分布

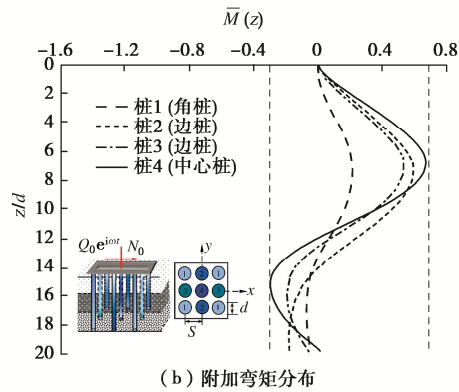


图 12 3×3 群桩中各桩桩身无量纲弯矩分布情况($a_0 = 0.5$, $S/d=2$)

Fig. 12 Distribution of dimensionless bending moment of 3×3 pile group

3 结 论

本文基于 Pasternak 地基和 Euler 梁振动理论,建立了能考虑轴向荷载影响的层状地基-群桩水平振动简化分析模型,并结合土层交界处的连续条件推导出群桩身水平位移、弯矩、剪力解析解答,探讨了地基剪切系数、布桩类型、桩距径比、轴向特征参数对群桩水平阻抗以及桩顶反力分布、桩身内力分布的影响规律,得到 5 点结论。

(1) 在相同桩数情况下,采用 Pasternak 地基模型计算所得群桩水平阻抗大于 Winkler 地基模型所得结果,且随着桩数的增加,两种模型计算结果的差异性变得更为显著。相比较动阻尼而言,分别基于两种模型的群桩水平动刚度计算结果差异性更为明显。

(2) 当桩距径比 (S/d) 较小时,群桩水平动刚度幅值随激振频率的增大而减小;随着桩距径比的逐步变大,动刚度则随激振频率的增加而增大;当 S/d 较大时,动刚度随激振频率的增加呈现先增大后减小的趋势。不同地,群桩水平动阻尼始终呈现随激振频率的增加而变大的趋势。

(3) 在其他条件不变情况下,不同桩距径比所对应群桩水平动刚度均随轴向特征参数的增加而显著降低,且群桩桩数越多,轴向特征参数对群桩水平动刚度的影响也越显著。不同地,轴向特征参数对群桩动阻尼的影响并未呈现单调变化特征。

(4) 对于相同深度而言,当不考虑桩-桩相互作用,按照单桩计算所得的桩身内力(剪力、弯矩)幅值,角桩最大,边桩次之,中心桩最小;而桩-桩相互作用引起的附加内力幅值,中心桩最大,边桩次之,角桩最小。

(5) 本文所采用的层状地基-群桩水平振动分析

模型和推导所得对应解析解答,能综合考虑轴向荷载和桩周土剪切变形的影响,并均与已有相关解析解答进行退化对比验证,可为群桩水平振动分析和设计提供参考。

参考文献:

- [1] KUO K A, HUNT H E M. Dynamic models of piled foundations[J]. Applied Mechanics Reviews, 2013, 65(3): 031003.
- [2] ALLANI M, HOLEYMAN A. Numerical evaluation of effects of nonlinear lateral pile vibrations on nonlinear axial response of pile shaft[J]. Soils and Foundations, 2013, 53(3): 395-407.
- [3] 艾智勇, 李志雄. 冲刷作用下层状横观各向同性土中群桩水平振动响应[J]. 岩土工程学报, 2016, 38(4): 613-618. (AI Zhiyong, LI Zhixiong. Horizontal vibration of a pile group in transversely isotropic layered soils under scour conditions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(4): 613-618. (in Chinese))
- [4] POULOS H G. Analysis of the settlement of pile groups[J]. Géotechnique, 1968, 18(4): 449-471.
- [5] LUAN L B, ZHENG C J, KOURETZIS G, et al. Development of a three-dimensional soil model for the dynamic analysis of end-bearing pile groups subjected to vertical loads[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2019, 43(9): 1784-1793.
- [6] LUAN L, ZHENG C, KOURETZIS G, et al. Dynamic analysis of pile groups subjected to horizontal loads considering coupled pile-to-pile interaction[J]. Computers and Geotechnics, 2020, 117: 103276.
- [7] KAYNIA A M, KAUSEI E. Dynamic Stiffness and Seismic Response of Pile Groups[R]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1982.
- [8] MYLONAKIS G, GAZETAS G. Lateral vibration and internal forces of grouped piles in layered soil[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1999, 125(1): 16-25.
- [9] 蒯行成, 沈蒲生. 层状介质中群桩水平动力阻抗的简化计算方法[J]. 振动工程学报, 1998, 11(3): 258-264. (KUAI Xingcheng, SHEN Pusheng. Simplified method for calculating horizontal dynamic impedances of pile groups in layered media[J]. Journal of Vibration Engineering, 1998, 11(3): 258-264. (in Chinese))
- [10] 吴志明, 黄茂松, 吕丽芳. 桩-桩水平振动动力相互作用研究[J]. 岩土力学, 2007, 28(9): 1848-1855. (WU Zhiming,

- HUANG Maosong, LÜ Lifang. Research on pile-pile dynamic interaction of lateral vibration[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(9): 1848-1855. (in Chinese))
- [11] 黄茂松, 吴志明, 任青. 层状地基中群桩的水平振动特性[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(1): 32-38. (HUANG Maosong, WU Zhiming, REN Qing. Lateral vibration of pile groups in layered soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(1): 32-38. (in Chinese))
- [12] 高广运, 赵元一, 高盟, 等. 分层土中群桩水平动力阻抗的改进计算[J]. 岩土力学, 2010, **31**(2): 509-515. (GAO Guangyun, ZHAO Yuanyi, GAO Meng, et al. Improved calculation for lateral dynamic impedance of pile groups in layered soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, **31**(2): 509-515. (in Chinese))
- [13] 黄茂松, 钟锐. 海上风机部分埋入群桩水平-摇摆振动与结构共振分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(2): 286-294. (HUANG Maosong, ZHONG Rui. Coupled horizontal-rocking vibration of partially embedded pile groups and its effect on resonance of offshore wind turbine structures[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(2): 286-294. (in Chinese))
- [14] PASTERNAK P L. Fundamentals of a New Method of Analyzing Structures on an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants[M]. Moscow: Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Literatury Po Stroitel'stvu Arkhitekture, 1954.
- [15] YOKOYAMA T. Vibrations of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1991, **20**(4): 355-370.
- [16] FILIPICH C P, ROSALES M B. A further study about the behaviour of foundation piles and beams in a Winkler-Pasternak soil[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, **44**(1): 21-36.
- [17] ZHOU D, LO S H, AU F T K, et al. Three dimensional free vibration of thick circular plates on Pasternak foundation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, **292** (3): 726-741.
- [18] HIZAL C, CATAL H H. Rotary inertia and higher modes effect on the dynamic response of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation[J]. Teknik Dergi, 2019, **30**(4): 9289-9308.
- [19] 张治国, 徐晨, 宫剑飞. 考虑桩侧土体三维效应和地基剪切变形的隧道开挖对邻近桩基影响分析[J]. 岩土工程学报, 2016, **38**(5): 846-856. (ZHANG Zhiguo, XU Chen, GONG Jianfei. Influence of tunneling on deflection of adjacent piles considering shearing deformation of foundation and 3D effects of lateral soils beside piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, **38**(5): 846-856. (in Chinese))
- [20] WANG J, ZHOU D, LIU W. Horizontal impedance of pile groups considering shear behavior of multilayered soils[J]. Soils and Foundations, 2014, **54**(5): 927-937.
- [21] WANG J, LO S H, ZHOU D. Effect of a forced harmonic vibration pile to its adjacent pile in layered elastic soil with double-shear model[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2014, **67**: 54-65.
- [22] VEGA-POSADA C A, GALLANT A P, AREIZA-HURTADO M. Simple approach for analysis of beam-column elements on homogeneous and non-homogeneous elastic soil[J]. Engineering Structures, 2020, **221**: 111110.
- [23] HALABE U B. Lateral free vibration of a single pile with or without an axial load[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **195**(3): 531-544.
- [24] 熊辉, 尚守平. 轴、横向力作用下土-群桩动力效应简化分析[J]. 岩土力学, 2006, **27**(12): 2163-2168. (XIONG Hui, SHANG Shouping. Simplified analysis of pile-group-soil effect under axial and horizontal interactive excitation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, **27**(12): 2163-2168. (in Chinese))
- [25] 任青, 黄茂松, 韩东晓. 考虑轴力的部分埋入群桩基础水平振动特性[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, **30**(9): 1932-1944. (REN Qing, HUANG Maosong, HAN Dongxiao. Lateral vibration properties of partially embedded pile groups foundation considering axial forces[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, **30**(9): 1932-1944. (in Chinese))
- [26] 熊辉, 江雅丰, 禹荣霞. 层状地基中基于 Laplace 变换的桩基横向振动阻抗计算[J]. 岩土力学, 2018, **39**(5): 1901-1907. (XIONG Hui, JIANG Yafeng, YU Rongxia. Lateral vibration impedance of piles embedded in layered soil based on Laplace transform[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, **39**(5): 1901-1907. (in Chinese))
- [27] JIANG J G, ZHOU X H, ZHANG J S. Dynamic interaction factor considering axial load[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2007, **25**(4): 423-429.