

DOI: 10.11779/CJGE202202013

双层非饱和土地基一维固结半解析解

李林忠, 秦爱芳*, 江良华

(上海大学力学与工程科学学院, 上海 200444)

摘要: 基于 Fredlund 和 Hasan 的非饱和土一维固结理论, 将非饱和地基假定为双层, 引入层间渗流连续条件, 得到双层非饱和土地基一维固结控制方程。采用 Laplace 变换将偏微分方程组转化为常微分方程组, 求解得到双层非饱和土地基在单面、双面渗透边界条件下超孔隙压力和沉降在 Laplace 域内的解; 并利用 Crump 数值方法实现 Laplace 逆变换, 最终得到时间域内双层非饱和土地基一维固结的半解析解。通过与已有文献和有限差分的结果比较, 验证了所得半解析解的有效性。基于得到的解答, 结合算例考察了不同层间渗透系数比下, 双层非饱和土地基中超孔隙压力的分布规律; 并通过参数分析讨论了土层厚度比和层间渗透系数比对双层非饱和土地基沉降的影响。

关键词: 非饱和土; 双层地基; 一维固结; Laplace 变换; 半解析解

中图分类号: TU433

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2022)02-0315-09

作者简介: 李林忠(1992—), 男, 博士研究生, 主要从事土体固结方面的研究工作。E-mail: heartbeatsllz@163.com。

Semi-analytical solution to one-dimensional consolidation of double-layered unsaturated ground

LI Lin-zhong, QIN Ai-fang, JIANG Liang-hua

(School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: Combining the one-dimensional (1D) consolidation theory of unsaturated soils proposed by Fredlund and Hasan and the interfacial continuity conditions during the consolidation, the 1D consolidation model for a double-layered unsaturated ground is obtained in this study. The Laplace transformation is adopted to convert the partial differential equations into the ordinary ones, and the solutions to the excess pore pressures and settlements in the Laplace domain can be acquired. The semi-analytical solution to 1D consolidation of the double-layered unsaturated ground in the time domain is calculated after taking the inverse Laplace transformation by numerical Crump method. A comparison with the finite difference solution and the available analytical solution illustrates that the proposed solution is effective. Based on the proposed semi-analytical solution, the distribution of the excess pore pressures with ratio of various permeability coefficients in the two-layered unsaturated ground is studied, and the parametric studies are made to investigate the influences of the thickness ratio of the soil layer and the ratio of permeability coefficients on the settlement of the double-layered unsaturated ground.

Key words: unsaturated soil; double-layered ground; 1D consolidation; Laplace transformation; semi-analytical solution

0 引言

Terzaghi 单向固结理论^[1]可便捷地描述土体在外荷载作用下的固结过程, 在理论研究及工程实践中得到广泛的应用。该理论假设被研究的土体是单层、均质的, 土中的孔隙完全被水充满, 因此主要适用于分析单层饱和土固结问题。地球表面的天然土体大多是不完全饱和且成层的, 这类土体固结问题的分析需要采用非饱和土固结理论^[2], 且需要考虑土体的成层性。双层地基是最简单的成层地基, 其固结研究可作为成层地基固结研究的基础^[3]。因此, 双层非饱和土地基固结的研究具有重要的理论和现实意义。

自 Biot 提出含封闭气泡的土体固结理论^[4]后, 国

内外学者为研究非饱和土固结提出了各自的固结模型^[2, 5-10]。研究非饱和土的固结时需根据土中流体的连续性采用不同的固结理论^[5], 殷宗泽等^[9]的模型适用于气封闭的土, Fredlund 等^[2]、杨代泉等^[6]和陈正汉等^[7-8]的模型适用于水、气各自连通的土, 大多数非饱和土固结的研究均是针对水、气各自连通的双开敞系统^[10]。为进一步贴合特定工程实际情况, 陈正汉等还研究了非线性^[11]和弹塑性损伤^[11-12]的非饱和土固结。目前, 基于水、气连通的非饱和土一维固结的双参数理论框

基金项目: 国家自然科学基金项目 (42072292)

收稿日期: 2021-01-27

*通信作者 (E-mail: qinaifang@shu.edu.cn)

架^[2], 许多学者对非饱和土一维固结问题进行了一系列解析解的求解。Qin 等^[13-14]给出了瞬时或指数荷载作用下的非饱和土一维固结问题的解析解; 在此基础上, 秦爱芳等^[15]考虑土体的流变特性及固结过程中渗透系数的变化, 得到黏弹性非饱和土一维固结的解答。Shan 等^[16]引入压力函数并运用分离变量法直接的时间域内得到考虑不同边界和不同外荷载的非饱和土一维固结方程的齐次解及非齐次解。Zhou 等^[17]引入新的变量将超孔隙水压和超孔隙气压耦合的方程组解耦, 解耦后方程组可用简单明了的数学方法推导出解析解。Ho 等^[18]给出了非等温条件的非饱和土一维固结的解答。Wang 等^[19]引入第三类边界条件描述半渗透边界, 得到半渗透边界下非饱和土一维固结的半解析解。尽管上述研究有助于理解非饱和土的一维固结特性, 但仅适用于分析单层非饱和土的固结问题。

鉴于土体本身的成层性^[20-21], 很多学者尝试对成层非饱和土固结问题进行研究。Shan 等^[22]给出了单面渗透条件下多层非饱和土固结的解析解, 但该解答假定不同土层的体积变化系数是相同的。Zhou 等^[23]给出双层非饱和土固结的数值解, 尽管方程对不同土层采用不同的体积变化系数, 但在其参数分析中, 两层土的体积变化系数仍然被取为同一值。Moradi 等^[24]利用数值方法分析了 4 层非饱和土在部分渗透边界下的一维固结。以上研究中, Shan 等^[22]给出的解析解未在不同土层中考虑不同体积变化系数; 已有的数值解没有明确的解析表达式, 不便其被应用于实际固结问题分析中。由于成层非饱和土固结问题的复杂性, 该问题的研究仍处在探索阶段。

本文基于 Fredlund 等^[2]提出的非饱和土一维固结方程, 利用 Laplace 变换等方法推导得到考虑不同体积变化系数的双层非饱和土地基, 在单面渗透和双面渗透边界下一维固结的解析表达式, 并借助参数分析研究双层非饱和土地基一维固结特性。在求解偏微分方程时, 采用 Laplace 变换的方法可更加快捷且准确地推导出具有直观数学表达式的解析解及半解析解, 且(半)解析解便于实际问题的特性分析^[18-19, 25-28]。值得指出的是, 在利用 Laplace 积分变换得到通解后, 本文借助连续条件建立了一个可简化求解两层非饱和地基固结问题解答的矩阵关系式, 此方法可在成层非饱和土固结问题中进一步拓展。

1 双层非饱和土一维固结模型及其求解

1.1 一维固结模型

厚度 H 的双层非饱和土地基在大面积均布荷载

q_0 作用下的一维固结模型如图 1, $h_i (i = 1, 2)$ 表示第 i 层土底面的深度。地基表面为完全渗透边界, 底面根据不同的排水情况分别考虑为完全渗透或完全不渗透边界。在双层非饱和土一维固结的分析中, 采用 Fredlund 等^[2, 29]的假设并作如下补充: ①非饱和土地基由两层土组成; ②在两层非饱和土固结过程中孔隙水和孔隙气的渗流满足连续条件; ③初始时刻产生的超孔隙压力沿竖向均布且连续。

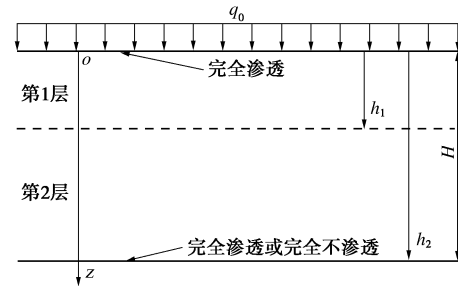


图 1 双层非饱和土一维固结模型

Fig. 1 1D consolidation model for double-layered unsaturated soils

图 1 模型的一维固结控制方程可表示为^[2, 13, 29]

$$\frac{\partial u_w^{(i)}(z, t)}{\partial t} = -C_w^{(i)} \frac{\partial u_a^{(i)}(z, t)}{\partial t} - C_v^{w(i)} \frac{\partial^2 u_w^{(i)}(z, t)}{\partial z^2}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u_a^{(i)}(z, t)}{\partial t} = -C_a^{(i)} \frac{\partial u_w^{(i)}(z, t)}{\partial t} - C_v^{a(i)} \frac{\partial^2 u_a^{(i)}(z, t)}{\partial z^2}. \quad (1b)$$

式中, $u_w^{(i)}$ 和 $u_a^{(i)}$ 为第 i 层的超孔隙水压力和超孔隙气压压力, z 为深度, t 为时间。式(1)中的 $C_w^{(i)}$ 和 $C_v^{w(i)}$ 分别为孔隙水的相互作用常数和固结系数, $C_a^{(i)}$ 和 $C_v^{a(i)}$ 分别为孔隙气的相互作用常数和固结系数, 可表示如下^[13]:

$$C_w^{(i)} = (m_{1k}^{w(i)} - m_2^{w(i)}) / m_2^{w(i)}, \quad (2a)$$

$$C_v^{w(i)} = k_w^{(i)} / (\gamma_w m_2^{w(i)}), \quad (2b)$$

$$C_a^{(i)} = m_2^{a(i)} [m_{1k}^{a(i)} - m_2^{a(i)} - u_{atm} n_0^{(i)} (1 - S_{r0}^{(i)}) (\bar{u}_a^0)^{-2}]^{-1}, \quad (2c)$$

$$C_v^{a(i)} = \frac{k_a^{(i)} RT (g \bar{u}_a^0 M)^{-1}}{m_{1k}^{a(i)} - m_2^{a(i)} - u_{atm} n_0^{(i)} (1 - S_{r0}^{(i)}) (\bar{u}_a^0)^{-2}}. \quad (2d)$$

式中 $m_{1k}^{a(i)}$ 和 $m_{1k}^{w(i)}$ 为 K_0 条件下第 i 层土中相应于法向应力变化的气体和水体积的变化系数; $m_2^{a(i)}$ 和 $m_2^{w(i)}$ 为 K_0 条件下第 i 层土中相应于基质吸力变化的气体和水体积的变化系数; $k_a^{(i)}$ 和 $k_w^{(i)}$ 为第 i 层土中孔隙气和孔隙水的渗透系数; γ_w 为孔隙水的重度; $n_0^{(i)}$ 和 $S_{r0}^{(i)}$ 为第 i 层初始时刻的孔隙比和饱和度; u_{atm} 和 $\bar{u}_a^0 = u_a^0 + u_{atm}$ 分别为大气压和绝对孔隙气压, u_a^0 为初始的超孔隙气压; R 为通用气体常数; T 为绝对温度。

在瞬时荷载作用下, 非饱和土层将产生超孔隙水压力。根据假设条件③, 初始条件为

$$u_w^{(i)}(z, 0) = u_w^0, \quad u_a^{(i)}(z, 0) = u_a^0. \quad (3)$$

式中, u_w^0 为初始的超孔隙水压。式 (3) 中的初始值可利用经验公式计算^[29]。

土层接触面上满足连续条件:

$$u_w^{(1)}(h_1^-, t) = u_w^{(2)}(h_1^+, t), \quad u_a^{(1)}(h_1^-, t) = u_a^{(2)}(h_1^+, t), \quad (4)$$

$$k_w^{(1)} \frac{\partial u_w^{(1)}(h_1^-, t)}{\partial z} = k_w^{(2)} \frac{\partial u_w^{(2)}(h_1^+, t)}{\partial z}, \quad (5a)$$

$$k_a^{(1)} \frac{\partial u_a^{(1)}(h_1^-, t)}{\partial z} = k_a^{(2)} \frac{\partial u_a^{(2)}(h_1^+, t)}{\partial z}。 \quad (5b)$$

图 1 中的边界情况为单面渗透或双面渗透边界:

①单面渗透的边界条件表示为

$$u_a^{(1)}(0, t) = u_w^{(1)}(0, t) = \frac{\partial u_a^{(2)}(h_2, t)}{\partial z} = \frac{\partial u_w^{(2)}(h_2, t)}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

②双面渗透的边界条件表示为

$$u_a^{(1)}(0, t) = u_w^{(1)}(0, t) = u_a^{(2)}(h_2, t) = u_w^{(2)}(h_2, t) = 0。 \quad (7)$$

1.2 两种边界下 Laplace 域内的解析解

式 (1a) 和 (1b) 可采用 Laplace 变换转化为常微分方程, 函数 $f(z, t)$ 的 Laplace 变换及其逆变换定义为

$$\tilde{f}(z, s) = \int_0^\infty f(z, t) e^{-st} dt, \quad (8a)$$

$$f(z, t) = (2\pi j)^{-1} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} \tilde{f}(z, s) e^{st} ds。 \quad (8b)$$

式中 $\tilde{f}(z, s)$ 为 $f(z, t)$ 在 Laplace 变换域内的表达式; s 为时间 t 的 Laplace 变换参数。

利用式 (8a) 并结合初始条件式 (3) 可以得到控制方程式 (1a) 和 (1b) 在 Laplace 域内的常微分方程组:

$$s\tilde{u}_w^{(i)} - u_w^0 = -C_w^{(i)}(s\tilde{u}_a^{(i)} - u_a^0) - C_v^{w(i)} \frac{d^2 \tilde{u}_w^{(i)}}{dz^2}, \quad (9a)$$

$$s\tilde{u}_a^{(i)} - u_a^0 = -C_a^{(i)}(s\tilde{u}_w^{(i)} - u_w^0) - C_v^{a(i)} \frac{d^2 \tilde{u}_a^{(i)}}{dz^2}。 \quad (9b)$$

相应地, Laplace 域内的连续条件和边界条件为

$$\tilde{u}_w^{(1)}(h_1^-, s) = \tilde{u}_w^{(2)}(h_1^+, s), \quad \tilde{u}_a^{(1)}(h_1^-, s) = \tilde{u}_a^{(2)}(h_1^+, s), \quad (10)$$

$$k_w^{(1)} \frac{d\tilde{u}_w^{(1)}(h_1^-, s)}{dz} = k_w^{(2)} \frac{d\tilde{u}_w^{(2)}(h_1^+, s)}{dz}, \quad (11a)$$

$$k_a^{(1)} \frac{d\tilde{u}_a^{(1)}(h_1^-, s)}{dz} = k_a^{(2)} \frac{d\tilde{u}_a^{(2)}(h_1^+, s)}{dz}。 \quad (11b)$$

$$\tilde{u}_a^{(1)}(0, s) = \tilde{u}_w^{(1)}(0, s) = \frac{d\tilde{u}_a^{(2)}(h_2, s)}{dz} = \frac{d\tilde{u}_w^{(2)}(h_2, s)}{dz} = 0, \quad (12)$$

$$\tilde{u}_a^{(1)}(0, s) = \tilde{u}_w^{(1)}(0, s) = \tilde{u}_a^{(2)}(h_2, s) = \tilde{u}_w^{(2)}(h_2, s) = 0。 \quad (13)$$

求解式 (9a), (9b) 可得到每一层的通解:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_w^{(i)}(z, s) = & C_1^{(i)} e^{\xi^{(i)} z} + C_2^{(i)} e^{-\xi^{(i)} z} + C_3^{(i)} e^{\eta^{(i)} z} + \\ & C_4^{(i)} e^{-\eta^{(i)} z} + \frac{u_w^0}{s}, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_a^{(i)}(z, s) = & -C_1^{(i)} a_5^{(i)} e^{\xi^{(i)} z} - C_2^{(i)} a_5^{(i)} e^{-\xi^{(i)} z} - \\ & C_3^{(i)} a_6^{(i)} e^{\eta^{(i)} z} - C_4^{(i)} a_6^{(i)} e^{-\eta^{(i)} z} + \frac{u_a^0}{s}。 \end{aligned} \quad (14b)$$

式中 $a_1^{(i)} = C_v^{a(i)} C_w^{w(i)} (s C_w^{(i)})^{-1}$, $a_2^{(i)} = (C_v^{a(i)} + C_v^{w(i)}) \cdot (C_w^{(i)})^{-1}$, $a_3^{(i)} = s(1 - C_a^{(i)} C_w^{(i)}) (C_w^{(i)})^{-1}$, $a_5^{(i)} = [(\xi^{(i)})^2 C_v^{w(i)} + s] (s C_w^{(i)})^{-1}$, $a_6^{(i)} = [(\eta^{(i)})^2 C_v^{w(i)} + s] (s C_w^{(i)})^{-1}$, $\xi^{(i)} = \{[-a_2^{(i)} - (a_2^{(i)2} - 4a_1^{(i)} a_3^{(i)})^{1/2}] / (2a_1^{(i)})\}^{1/2}$, $\eta^{(i)} = \{[-a_2^{(i)} + (a_2^{(i)2} - 4a_1^{(i)} a_3^{(i)})^{1/2}] / (2a_1^{(i)})\}^{1/2}$ 。 $C_1^{(i)} \sim C_4^{(i)}$ 为 8 个待定系数, 需借助边界与连续条件确定。

将通解 (14a) 和 (14b) 代入式 (10) ~ (11b) 后, 以矩阵形式表示出层间待定系数的关系式:

$$[C^{(2)}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} [C^{(1)}], \quad (15a)$$

$$[C^{(i)}] = [C_1^{(i)} \quad C_2^{(i)} \quad C_3^{(i)} \quad C_4^{(i)}]^T。 \quad (15b)$$

式中, $m_{11} \sim m_{44}$ 见附录 A。

为求解单面渗透边界条件的解答, 将通解 (14a) 和 (14b) 分别代入式 (12) 并用矩阵形式表示为

$$[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] [C^{(1)}] = -u_w^0 / s, \quad (16a)$$

$$[a_5^{(1)} \quad a_5^{(1)} \quad a_6^{(1)} \quad a_6^{(1)}] [C^{(1)}] = u_a^0 / s。 \quad (16b)$$

$$[\xi^{(2)} e^{\xi^{(2)} h_2} \quad -\xi^{(2)} e^{-\xi^{(2)} h_2} \quad \eta^{(2)} e^{\eta^{(2)} h_2} \quad -\eta^{(2)} e^{-\eta^{(2)} h_2}] [C^{(2)}] = 0, \quad (16c)$$

$$[a_5^{(2)} \xi^{(2)} e^{\xi^{(2)} h_2} \quad -a_5^{(2)} \xi^{(2)} e^{-\xi^{(2)} h_2} \quad a_6^{(2)} \eta^{(2)} e^{\eta^{(2)} h_2} \quad -a_6^{(2)} \eta^{(2)} e^{-\eta^{(2)} h_2}] [C^{(2)}] = 0。 \quad (16d)$$

式 (15a), (15b) 代入 (16c), (16d) 后, 结合式 (16a), (16b) 可得到

$$C_1^{(1)} = \frac{\chi_2(u_a^0 + a_5^{(1)} u_w^0) + \chi_3(u_a^0 + a_6^{(1)} u_w^0)}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})(\chi_5 - \chi_6)s}, \quad (17a)$$

$$C_2^{(1)} = -\frac{\chi_2(u_a^0 + a_5^{(1)} u_w^0) + \chi_4(u_a^0 + a_6^{(1)} u_w^0)}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})(\chi_5 - \chi_6)s}, \quad (17b)$$

$$C_3^{(1)} = -\frac{\chi_5(u_a^0 + a_5^{(1)} u_w^0) - \chi_1(u_a^0 + a_6^{(1)} u_w^0)}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})(\chi_5 - \chi_6)s}, \quad (17c)$$

$$C_4^{(1)} = \frac{\chi_6(u_a^0 + a_5^{(1)} u_w^0) - \chi_1(u_a^0 + a_6^{(1)} u_w^0)}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})(\chi_5 - \chi_6)s}。 \quad (17d)$$

式中, $\chi_1 \sim \chi_6$ 为中间变量, 具体表达式见附录 B。

利用式 (15a), (15b) 和 (17a) ~ (17d), 即可得到

$$C_1^{(2)} = \frac{\chi_{11}(u_a^0 + a_5^{(1)} u_w^0) + \chi_{12}(u_a^0 + a_6^{(1)} u_w^0)}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})(\chi_5 - \chi_6)s}, \quad (18a)$$

$$C_2^{(2)} = \frac{[\chi_{11}(u_a^0 + a_5^{(1)} u_w^0) + \chi_{12}(u_a^0 + a_6^{(1)} u_w^0)] e^{2\xi^{(2)} h_2}}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})(\chi_5 - \chi_6)s}, \quad (18b)$$

$$C_3^{(2)} = \frac{\chi_{13}(u_a^0 + a_5^{(1)}u_w^0) + \chi_{14}(u_a^0 + a_6^{(1)}u_w^0)}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})(\chi_5 - \chi_6)s}, \quad (18c)$$

$$C_4^{(2)} = \frac{[\chi_{13}(u_a^0 + a_5^{(1)}u_w^0) + \chi_{14}(u_a^0 + a_6^{(1)}u_w^0)]e^{2\eta^{(2)}h_2}}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})(\chi_5 - \chi_6)s}. \quad (18d)$$

式中, $\chi_{11} \sim \chi_{14}$ 为中间变量, 具体表达式见附录 B。

同理, 双面渗透边界下待定系数的表达式如下:

$$C_1^{(1)} = \frac{-\varphi_2(u_a^0 + a_5^{(1)}u_w^0) + \varphi_3}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})\varphi_1s} + \frac{\varphi_4}{(a_5^{(2)} - a_6^{(2)})\varphi_1s}, \quad (19a)$$

$$C_2^{(1)} = \frac{\varphi_2(u_a^0 + a_5^{(1)}u_w^0) - \varphi_5}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})\varphi_1s} - \frac{\varphi_4}{(a_5^{(2)} - a_6^{(2)})\varphi_1s}, \quad (19b)$$

$$C_3^{(1)} = -\frac{\varphi_6 + \varphi_7(u_a^0 + a_6^{(1)}u_w^0)}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})\varphi_1s} - \frac{\varphi_8}{(a_5^{(2)} - a_6^{(2)})\varphi_1s}, \quad (19c)$$

$$C_4^{(1)} = \frac{\varphi_9 + \varphi_7(u_a^0 + a_6^{(1)}u_w^0)}{(a_5^{(1)} - a_6^{(1)})\varphi_1s} + \frac{\varphi_8}{(a_5^{(2)} - a_6^{(2)})\varphi_1s}, \quad (19d)$$

$$C_1^{(2)} = \left(\frac{\varphi_{12} + \varphi_{13}}{a_5^{(2)} - a_6^{(2)}} - \frac{\varphi_{10} + \varphi_{11}}{a_5^{(1)} - a_6^{(1)}} \right) \frac{1}{\varphi_1s}, \quad (20a)$$

$$C_2^{(2)} = \left(\frac{\varphi_{10} + \varphi_{11}}{a_5^{(1)} - a_6^{(1)}} - \frac{\varphi_{12} - \varphi_{14}}{a_5^{(2)} - a_6^{(2)}} \right) \frac{e^{2\eta^{(2)}h_2}}{\varphi_1s}, \quad (20b)$$

$$C_3^{(2)} = \left(\frac{\varphi_{15} + \varphi_{16}}{a_5^{(1)} - a_6^{(1)}} + \frac{\varphi_{17} - \varphi_{18}}{a_5^{(2)} - a_6^{(2)}} \right) \frac{1}{\varphi_1s}, \quad (20c)$$

$$C_4^{(2)} = -\left(\frac{\varphi_{15} + \varphi_{16}}{a_5^{(1)} - a_6^{(1)}} + \frac{\varphi_{17} + \varphi_{19}}{a_5^{(2)} - a_6^{(2)}} \right) \frac{e^{2\eta^{(2)}h_2}}{\varphi_1s}. \quad (20d)$$

式中, $\varphi_1 \sim \varphi_{19}$ 为中间变量, 具体表达式见附录 B。

非饱和土地基一维固结的第 i 层的应变 $\varepsilon_v^{(i)}$ 与净法向应力和基质吸力存在如下关系式^[29]:

$$\frac{\partial \varepsilon_v^{(i)}}{\partial t} = m_{1k}^{s(i)} \frac{\partial (\sigma - u_a^{(i)})}{\partial t} + m_2^{s(i)} \frac{\partial (u_a^{(i)} - u_w^{(i)})}{\partial t}, \quad (21)$$

式中, $m_{1k}^{s(i)}$ 和 $m_2^{s(i)}$ 为 K_0 条件下相应于净法向应力变化和净基质吸力变化的体积变化系数。

式 (21) 对时间 t 作 Laplace 变换后有

$$\tilde{\varepsilon}_v^{(i)} = (m_2^{s(i)} - m_{1k}^{s(i)})(\tilde{u}_a^{(i)} - u_a^0/s) - m_2^{s(i)}(\tilde{u}_w^{(i)} - u_w^0/s). \quad (22)$$

因此, 双层非饱和土地基一维固结沉降量为

$$\tilde{w}(s) = \int_0^{h_1} \tilde{\varepsilon}_v^{(1)}(z, s) dz + \int_{h_1}^{h_2} \tilde{\varepsilon}_v^{(2)}(z, s) dz. \quad (23)$$

1.3 时间域内半解析解

在 1.2 节中, 由式 (14a), (14b), (17a) ~ (17d), (18a) ~ (18d) 和 (23) 可表示出单面渗透下 Laplace 域内的解析解, 由式 (14a), (14b), (19a) ~ (19d), (20a) ~ (20d) 和 (23) 则可表示出双面渗透下 Laplace 域内的解析解。借助 Crump 方法^[30]进行 Laplace 逆变换, 可获得时间域内相应边界条件下的超孔隙水压力 $u_w^{(i)}(z, t)$ 、超孔隙气压力 $u_a^{(i)}(z, t)$ 和沉降 $w(t)$ 在时间域的半解析解。

2 结果与讨论

2.1 半解析解验证

本研究采用有限差分法的数值解和文献[22]的解析解验证本文数学方法和半解析解。参数取值如下: $q_0 = 100$ kPa, $u_a^0 = 20$ kPa, $u_w^0 = 40$ kPa, $g = 9.8$ m/s², $\gamma_w = 9.8$ kN/m³, $R = 8.314$ J/(mol·K), $T = 293.16$ K, $M = 0.02895$ kg/mol, $n_0^{(1)} = 0.4$, $S_{r0}^{(1)} = 0.75$, $k_a^{(1)} = 10^{-9}$ m/s, $k_w^{(1)} = 10^{-10}$ m/s, $h_1 = 5$ m, $n_0^{(2)} = 0.5$, $S_{r0}^{(2)} = 0.8$, $k_a^{(2)} = 10^{-8}$ m/s, $k_w^{(2)} = 10^{-9}$ m/s, $H = h_2 = 10$ m, $m_{1k}^{s(i)} = -2.5 \cdot 10^{-4}$ kPa⁻¹, $m_2^{s(i)} / m_{1k}^{s(i)} = 0.4$, $m_{1k}^{w(i)} / m_{1k}^{s(i)} = 0.2$, $m_2^{w(i)} / m_{1k}^{w(i)} = 4$ (取值参考文献[13, 22])。

图 2, 3 分别为单面和双面渗透边界下, 不同时刻超孔隙气压力和超孔隙水压力等时线。图 2, 3 中, SAS 为本文的半解析解的计算结果, FDS 为利用有限差分方法计算的数值解的结果, AS 为 Shan 等^[22]的单面渗透边界条件下解析解的计算结果。通过图 2, 3 的比较, 证明了本文得到的双层非饱和土地基在单面或双面渗透边界下一维固结的半解析解的有效性。

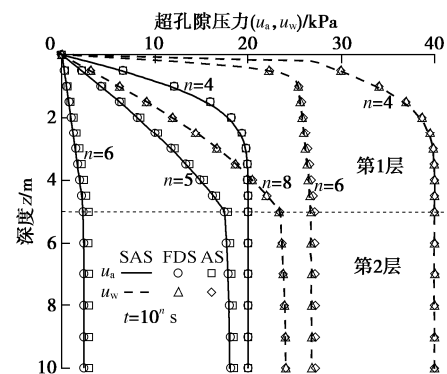


图 2 单面渗透边界下超孔隙压力等时线比较

Fig. 2 Isochrone comparisons of excess pore pressures for single drainage

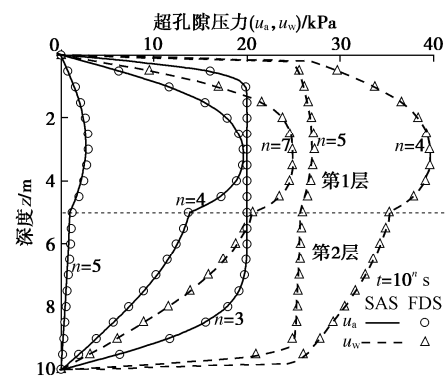


图 3 双面渗透边界下超孔隙压力等时线比较

Fig. 3 Isochrone comparisons of excess pore pressures for double drainage

2.2 固结性状分析

基于得到的半解析解, 通过算例考察双层非饱和土地基在两种渗透边界下的固结行为。土体体积变化系数 $m_{1k}^{(1)} = -2.5 \times 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$, $m_{1k}^{(2)} = -3 \times 10^{-4} \text{ kPa}^{-1}$, 其它物理力学参数的取值与 2.1 节一致。超孔隙气压、超孔隙水压、沉降、时间和深度的无量纲参数采用文献[13]中的定义方法, 分别为 u_a/p_0 , u_w/p_0 , $w^* = w/(m_{1k}^{(1)} q_0 H)$, $T_v = -k_w^{(1)} t / (\gamma_w m_{1k}^{(1)} H^2)$ 和 z/H 。

(1) 渗透系数比对超孔隙压力影响

图 4 描述了不同孔隙气渗透系数比 $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 对两种边界条件下双层非饱和土中超孔隙气压的影响。从图 4 可以看出: $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 越大, 固结过程中超孔隙气压的消散越快; 当上层土和下层土中气相渗透系数不同时, 超孔隙气压的深度分布曲线会在层间界面处分为两段曲线。图 4 (a) 中, $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 的变化在 $T_v = 10^{-5}$ 时并未对超孔隙气压力的消散产生影响。因为在单面渗透边界下, 非饱和土层中的孔隙气仅能从顶部边界排出, $T_v = 10^{-5}$ 时下层土中的超孔隙气压还未开始消散。单面渗透边界下, 下层非饱和土中的超孔隙气压开始消散后, $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 的增大将会导致上层非饱和土中超孔隙气压增加。因为在双层非饱和土的固结过程中, $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 越大表示第二层非饱和土的气体渗透系数越大, 导致相同时间下第二层土中将有更多的气体向上渗流, 从而增加上层土中的超孔隙气压。但单面渗透边界下, 当 $k_a^{(2)}/k_a^{(1)} > 10$ 时, 上层低气相渗透系数的非饱和土会限制下层高气相渗透系数的非饱和土中气体的渗流, $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 的增加将不再对双层非饱和土中的超孔隙气压消散产生明显的影响。而在图 4 (b) 中的双面渗透边界下两层非饱和土的固结过程中, 孔隙气可同时从顶面和底面排出, 下层气相渗透系数的增大明显地加快双层非饱和地基的固结速率, 可以看出下层土的渗流不再受上层土的低渗透性的阻碍。

图 5 给出了双层非饱和土中不同的孔隙水渗透系数比 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 对两种边界下超孔隙水压的影响。同样地, $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 越大, 双层非饱和土中超孔隙水压消散越快。从图 5 (a), (b) 可以看出, 两种边界条件下, 下层土中的超孔隙水压在 $T_v = 10^{-3}$ (单面渗透) 和 $T_v = 10^{-6}$ (双面渗透) 时已经开始消散, 但此时 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 的改变未对双层非饱和土中超孔隙压力的消散产生影响。其原因在于非饱和土中超孔隙水压的消散通常为两个阶段, 且 $k_a^{(i)}/k_w^{(i)} > 1$ 时, 两个阶段之间有个“平台期”, $k_a^{(i)}/k_w^{(i)}$ 越大, “平台期”越长^[4]。第一阶段到超孔隙气压消散为 0 结束, 第二阶段在平台期结束后开始。第一阶段由超孔隙气压的消散控制, 第二阶段由超孔隙水压的消散控制。因此, 在非饱和土的固结过程中, $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 的变化仅对第二阶段的超孔隙水压消散产生影响。当第二阶段的超孔隙水压开始消散时,

两层土的水相渗透系数不同时, 超孔隙水压沿深度分布曲线被界面分为两段曲线。此外, 从图 4 (b), 5 (b) 可以看出, 厚度相等的双层非饱和土在双面渗透边界下的固结过程中, 较低渗透性土层中的部分超孔隙气和超孔隙水将通过较高渗透性的土层排出。

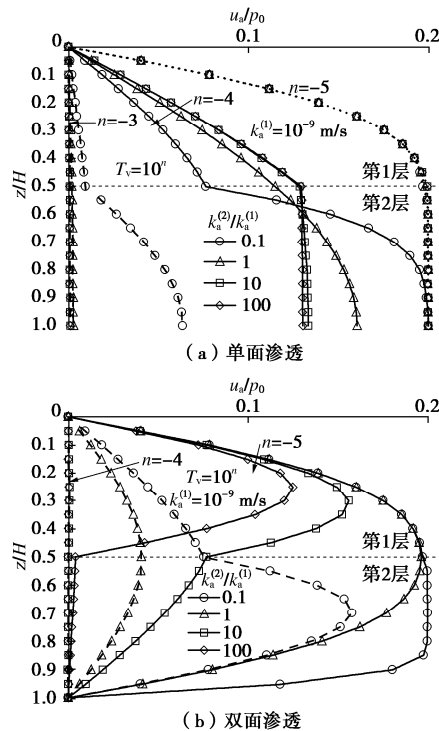


图 4 超孔隙气压分布曲线

Fig. 4 Curves for distribution of excess pore-air pressure with depth

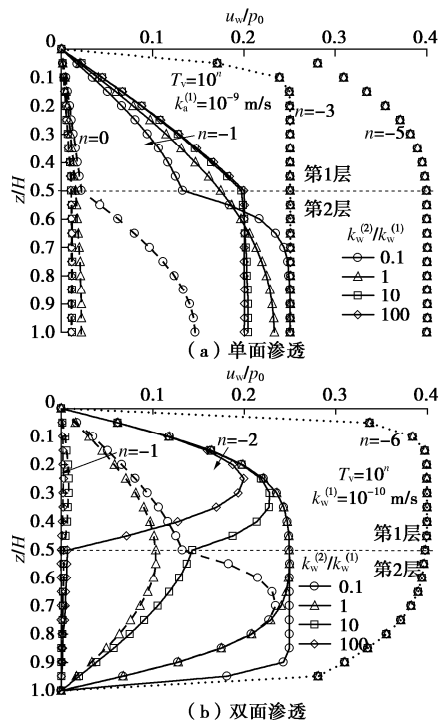


图 5 超孔隙水压分布曲线

Fig. 5 Curves for distribution of excess pore-water pressure with depth

(2) 不同参数对土体沉降的影响

图6为厚度比 h_1/H 不同时, 双层非饱和土一维固结沉降随时间发展的曲线图, h_1/H 的比值可以反映双层非饱和土层中第一层土的占比。当 $0 < h_1/H < 1$ 时, 非饱和土层由两层物理力学参数不同的土层组成; 当 $h_1/H = 0$ 或1时, 非饱和土层为单层土。观察图6可以发现: h_1/H 越大, 双层非饱和土的沉降发展越慢, 且最终沉降量越小。 h_1/H 越大, 表示双层非饱和土的低渗透性土层占比越大, 孔隙气和孔隙水排出土体所需的时间就越长, 因此双层非饱和土层的沉降发展越慢。相应地, h_1/H 越大时, 具有较小体积变化系数的土层占比越大, 双层非饱和土层的沉降量则越小。比较图6(a), (b)可以看出, 双层非饱和土层在双面渗透边界下明显比在单面渗透边界下更早地达到最终沉降。出现这一现象是因为在双面渗透边界下, 非饱和土中的孔隙气和超孔隙水均可更快地排出, 导致土体固结速率变快。在图6(a)中, $h_1/H=0$ 时的非饱和土固结沉降发展明显比其它4种情况($h_1/H = 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$)下的沉降发展快, 这是因为 $h_1/H=0$ 时土层为具有高渗透性的单层土, 土体固结速率较快。而双面渗透条件下, $h_1/H=1.0$ 时土层为较低渗透性的单层土, 非饱和土层中超孔隙消散较慢, 导致图6(b)中 $h_1/H=1$ 时的沉降较 h_1/H 为0.3, 0.5和0.7时发展慢。

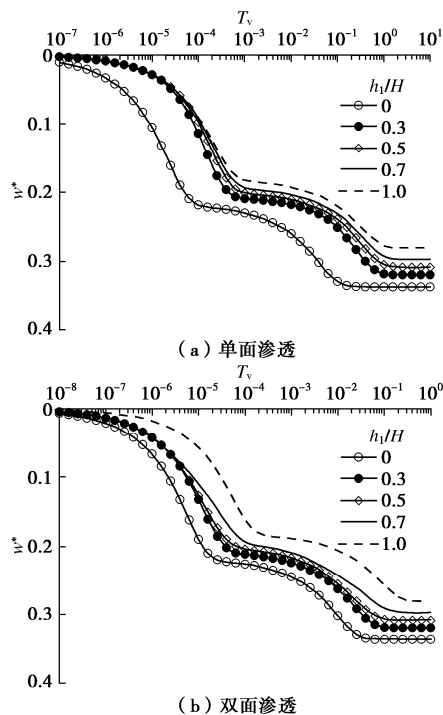


图6 不同 h_1/H 的沉降-时间曲线

Fig. 6 Curves of settlement vs. time for different values of h_1/H

非饱和土固结过程中, 气相的快速消散会使非饱和土的沉降曲线呈现两个阶段(双S型)^[13], 第一阶

段主要由超孔隙气压的消散引起, 第二阶段由超孔隙水压的消散引起。图7呈现了不同的层间孔隙气的渗透系数比 $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 对双层非饱和土沉降的影响, 可以看出 $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 主要影响沉降的第一个阶段, $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 越大, 土体沉降越快。对比图7(a), (b)可以看出, 双面渗透边界下 $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 的变化对双层非饱和土固结的影响范围比单面渗透边界时的影响范围大, 这是因为双面渗透边界下非饱和土中的孔隙气和孔隙水可以同时通过顶部与底部边界排出。在单面渗透边界条件下(图7(a)), 当 $k_a^{(2)}/k_a^{(1)} > 10$ 时, 由于上部土层孔隙气的低渗透对下部土层中孔隙气渗流的限制, $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 的变化不再对双层非饱和土层的沉降产生影响。

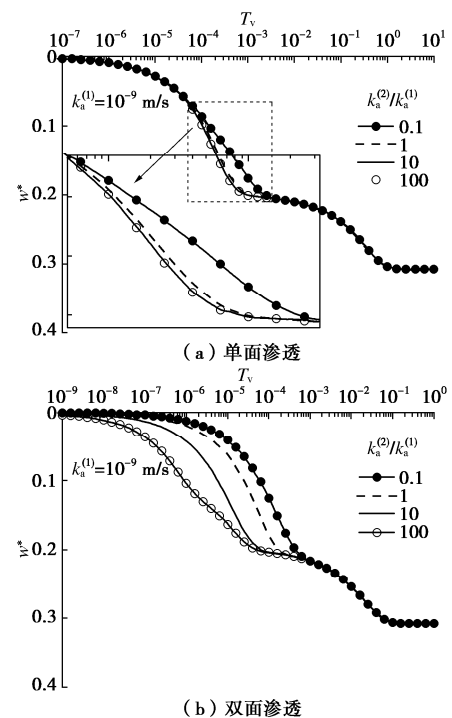
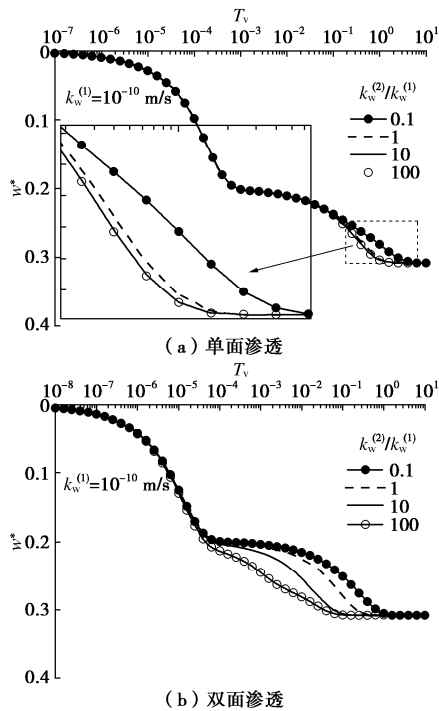


图7 不同 $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 的沉降-时间曲线

Fig. 7 Curves of settlement vs. time for different values of $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$

图8为不同层间孔隙水渗透系数比 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 对双层非饱和土一维固结沉降的影响。 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 的变化只影响超孔隙水压消散的快慢, 因此 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 的变化只引起第二阶段非饱和土沉降的改变。 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 越大, 双层非饱和土固结地越快, 能越早地达到最终沉降, 这个现象在双面渗透条件下表现地更明显。在单面渗透条件下, 当第二层土中的超孔隙水压开始第二阶段的消散时, $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 的改变才会影响双层非饱和土层的沉降; 且当 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)} > 10$ 时, 受到上层土孔隙水的低渗透性限制, $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 的增加不再影响双层非饱和土的沉降。

图8 不同 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 的沉降 - 时间曲线Fig. 8 Curves of settlement vs. time for different values of $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$

3 结 论

(1) 基于 Fredlund 和 Hasan 提出的针对水、气连通的非饱和土一维固结理论, 本文得到单面渗透和双面渗透两种渗透边界条件下, 瞬时荷载作用的双层非饱和土地基一维固结的半解析解。通过与两种边界下的有限差分结果和单面渗透边界下已有的解析解的计算结果的比较, 验证了本文的半解析解的可靠性。

(2) 本文半解析解可考虑双层非饱和土地基中不同的体积变化系数; 且本文在给出单面渗透情况下的解时, 同时给出了双面渗透情况下的解。因此本文的解通用性更强, 更便于进行参数影响分析。

(3) 在双层非饱和土地基一维固结过程中, 固结快慢由较小渗透系数的土层决定; 最终固结沉降量由各层土的体积变化系数与土层占比决定, 与边界情况无关。

(4) 单面渗透边界下, 当 $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 和 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 大于 10 后, $k_a^{(2)}/k_a^{(1)}$ 和 $k_w^{(2)}/k_w^{(1)}$ 的增加将不再对双层非饱和土地基的固结产生影响。此种情况若要提高双层非饱和土地基的固结速率, 可将底面边界处理为渗透边界。

参考文献:

- [1] TERZAGHI K. Theoretical Soil Mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons, 1943.
- [2] FREDLUND D G, HASAN J U. One-dimensional

consolidation theory: unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1979, **16**(3): 521 - 531.

- [3] 谢康和. 双层地基一维固结理论与应用[J]. 岩土工程学报, 1994, **16**(5): 24 - 35. (XIE Kang-he. Theory of one dimensional consolidation of double-layered ground and its applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, **16**(5): 24 - 35. (in Chinese))
- [4] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. Journal of Applied Physics, 1941, **12**(2): 155 - 164.
- [5] BARDEN L. Consolidation of compacted and unsaturated clays[J]. Géotechnique, 1965, **15**(3): 267 - 286.
- [6] 杨代泉, 沈珠江. 非饱和土一维固结简化计算[J]. 岩土工程学报, 1991, **13**(5): 70 - 78. (YANG Dai-quan, SHEN Zhu-jiang. Simplified computation of one-dimensional consolidation of unsaturated soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, **13**(5): 70 - 78. (in Chinese))
- [7] 陈正汉, 谢定义, 刘祖典. 非饱和土固结的混合物理论(I)[J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(2): 127 - 137. (CHEN Zheng-han, XIE Ding-yi, LIU Zu-dian. Consolidation theory of unsaturated soil based on the theory of mixture(I)[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1993, **14**(2): 127 - 137. (in Chinese))
- [8] 陈正汉. 非饱和土固结的混合物理论(II)[J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(8): 687 - 698. CHEN Zheng-han. Consolidation theory of unsaturated soil based on the theory of mixture(II)[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1993, **14**(8): 687 - 698. (in Chinese))
- [9] 殷宗泽, 凌 华. 非饱和土一维固结简化计算[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(5): 633 - 637. (YIN Zong-ze, LING Hua. Simplified computation of 1D consolidation for partially saturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(5): 633 - 637. (in Chinese))
- [10] 陈正汉. 非饱和土与特殊土力学的基本理论研究[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(2): 201 - 272. (CHEN Zheng-han. On basic theories of unsaturated soils and special soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(2): 201 - 272. (in Chinese))
- [11] 陈正汉, 黄 海, 卢再华. 非饱和土的非线性固结模型与弹性固结模型及其应用[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(1): 93 - 103. (CHEN Zheng-han, HUANG Hai, LU Zai-hua. Non-linear and elasto-plasticity consolidation models of unsaturated soil and applications. Applied Mathematics and Mechanics, 2001, **22**(1): 93 - 103. (in Chinese))
- [12] YAO Z H, CHEN Z H, FANG X W, et al. Elastoplastic

- damage seepage-consolidation coupled model of unsaturated undisturbed loess and its application[J]. *Acta Geotechnica*, 2020, **15**(6): 1637 - 1653.
- [13] QIN A F, CHEN G J, TAN Y W, et al. Analytical solution to one-dimensional consolidation in unsaturated soils[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2008, **29**(10): 1329 - 1340.
- [14] QIN A F, SUN D A, TAN Y W. Analytical solution to one-dimensional consolidation in unsaturated soils under loading varying exponentially with time[J]. *Computers and Geotechnics*, 2010, **37**(1/2): 233 - 238.
- [15] 秦爱芳, 张九龙. 考虑渗透系数变化的非饱和土固结性状分析[J]. *岩土力学*, 2015, **36**(6): 1521 - 1528, 1536. (QIN Ai-fang, ZHANG Jiu-long. Analysis of consolidation of unsaturated soil with variable permeability coefficient[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, **36**(6): 1521 - 1528, 1536. (in Chinese))
- [16] SHAN Z D, LING D S, DING H J. Exact solutions for one-dimensional consolidation of single-layer unsaturated soil[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2012, **36**(6): 708 - 722.
- [17] ZHOU W H, ZHAO L S, LI X B. A simple analytical solution to one-dimensional consolidation for unsaturated soils[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2014, **38**(8): 794 - 810.
- [18] HO L, FATAHI B, KHABBAZ H. Analytical solution to one-dimensional consolidation in unsaturated soil deposit incorporating time-dependent diurnal temperature variation[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2018, **18**(5): 04018029.
- [19] WANG L, SUN D A, LI L Z, et al. Semi-analytical solutions to one-dimensional consolidation for unsaturated soils with symmetric semi-permeable drainage boundary[J]. *Computers and Geotechnics*, 2017, **89**: 71 - 80.
- [20] 李红坡, 陈征, 冯健雪, 等. 双层地基水平排水砂垫层位置优化研究[J]. *岩土力学*, 2020, **41**(2): 437 - 444. (LI Hong-po, CHEN Zheng, FENG Jian-xue, et al. Study on position optimization of horizontal drainage sand blanket of double-layer foundation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2020, **41**(2): 437 - 444. (in Chinese))
- [21] 叶梓, 艾智勇. 变荷载下层状非饱和土地基全耦合固结特性研究[J]. *岩土力学*, 2021, **42**(1): 135 - 142. (YE Zi, AI Zhi-yong. Fully-coupled consolidation characteristics of layered unsaturated soils subjected to varying loadings[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2021, **42**(1): 135 - 142. (in Chinese))
- [22] SHAN Z D, LING D S, DING H J. Analytical solution for the 1D consolidation of unsaturated multi-layered soil[J]. *Computers and Geotechnics*, 2014, **57**: 17 - 23.
- [23] ZHOU W H, ZHAO L S. Consolidation of a two-layer system for unsaturated soil with the differential quadrature method[C]// *Geo-Congress*. Atlanta, 2014: 3994 - 4003.
- [24] MORADI M, KESHAVARZ A, FAZELI A. One dimensional consolidation of multi-layered unsaturated soil under partially permeable boundary conditions and time-dependent loading[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, **107**: 45 - 54.
- [25] LI P C, WANG K Y, LU D T. Analytical solution of plane-strain poroelasticity due to surface loading within a finite rectangular domain[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2017, **17**(4): 04016089.
- [26] 汪磊, 孙德安, 解益, 等. 任意荷载下分数阶导数黏弹性饱和土体一维固结[J]. *岩土工程学报*, 2017, **39**(10): 1823 - 1831. (WANG Lei, SUN De-an, XIE Yi, et al. One-dimensional consolidation of fractional derivative viscoelastic saturated soils under arbitrary loading[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2017, **39**(10): 1823 - 1831. (in Chinese))
- [27] WANG L, XU Y F, XIA X H, et al. A series of semianalytical solutions of one-dimensional consolidation in unsaturated soils[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2020, **20**(6): 06020005.
- [28] 周祥运, 孙德安, 林宇亮. 基于散热的高放废物处置库废物罐间距研究[J]. *岩土工程学报*, 2020, **42**(11): 2069 - 2077. (ZHOU Xiang-yun, SUN De-an, LIN Yu-liang. Canister spacing in a high level radioactive nuclear waste repository based on heat conduction[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2020, **42**(11): 2069 - 2077. (in Chinese))
- [29] FREDLUND D G, RAHARDJO H. *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc, 1993.
- [30] CRUMP K S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation[J]. *Journal of the ACM*, 1976, **23**(1): 89 - 96.

附录 A: 式(15a)中矩阵的元素表达式

$$m_{11} = e^{(\xi^{(1)} - \xi^{(2)})h_1} (a_5^{(1)} \alpha_1 - a_6^{(2)} \alpha_2) / \alpha_\xi, \quad (A1)$$

$$m_{12} = e^{-(\xi^{(1)} + \xi^{(2)})h_1} (-a_5^{(1)} \alpha_3 + a_6^{(2)} \alpha_4) / \alpha_\xi, \quad (A2)$$

$$m_{13} = e^{(\eta^{(1)} - \xi^{(2)})h_1} (a_6^{(1)} \alpha_5 - a_6^{(2)} \alpha_6) / \alpha_\xi, \quad (A3)$$

$$m_{14} = e^{-(\eta^{(1)} + \xi^{(2)})h_1} (-a_6^{(1)} \alpha_7 + a_6^{(2)} \alpha_8) / \alpha_\xi, \quad (A4)$$

$$m_{21} = e^{(\xi^{(1)} + \xi^{(2)})h_1} (-a_5^{(1)}\alpha_3 + a_6^{(2)}\alpha_4) / \alpha_\xi, \quad (A5)$$

$$m_{22} = e^{(-\xi^{(1)} + \xi^{(2)})h_1} (a_5^{(1)}\alpha_1 - a_6^{(2)}\alpha_2) / \alpha_\xi, \quad (A6)$$

$$m_{23} = e^{(\eta^{(1)} + \xi^{(2)})h_1} (-a_6^{(1)}\alpha_7 + a_6^{(2)}\alpha_8) / \alpha_\xi, \quad (A7)$$

$$m_{24} = e^{(-\eta^{(1)} + \xi^{(2)})h_1} (a_6^{(1)}\alpha_5 - a_6^{(2)}\alpha_6) / \alpha_\xi, \quad (A8)$$

$$m_{31} = e^{(-\eta^{(2)} + \xi^{(1)})h_1} (-a_5^{(1)}\alpha_9 + a_5^{(2)}\alpha_{10}) / \alpha_\eta, \quad (A9)$$

$$m_{32} = e^{(-\eta^{(2)} + \xi^{(1)})h_1} (a_5^{(1)}\alpha_{11} - a_5^{(2)}\alpha_{12}) / \alpha_\eta, \quad (A10)$$

$$m_{33} = e^{(\eta^{(1)} - \eta^{(2)})h_1} (-a_6^{(1)}\alpha_{13} + a_5^{(2)}\alpha_{14}) / \alpha_\eta, \quad (A11)$$

$$m_{34} = e^{(-\eta^{(1)} + \eta^{(2)})h_1} (a_6^{(1)}\alpha_{15} - a_5^{(2)}\alpha_{16}) / \alpha_\eta, \quad (A12)$$

$$m_{41} = e^{(\eta^{(2)} + \xi^{(1)})h_1} (a_5^{(1)}\alpha_{11} - a_5^{(2)}\alpha_{12}) / \alpha_\eta, \quad (A13)$$

$$m_{42} = e^{(\eta^{(2)} - \xi^{(1)})h_1} (-a_5^{(1)}\alpha_9 + a_5^{(2)}\alpha_{10}) / \alpha_\eta, \quad (A14)$$

$$m_{43} = e^{(\eta^{(1)} + \eta^{(2)})h_1} (a_6^{(1)}\alpha_{15} - a_5^{(2)}\alpha_{16}) / \alpha_\eta, \quad (A15)$$

$$m_{44} = e^{(-\eta^{(1)} + \eta^{(2)})h_1} (-a_6^{(1)}\alpha_{13} + a_5^{(2)}\alpha_{14}) / \alpha_\eta. \quad (A16)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= k_a^{(1)} / k_a^{(2)} \xi^{(1)} + \xi^{(2)}, \alpha_2 = k_w^{(1)} / k_w^{(2)} \xi^{(1)} + \xi^{(2)}, \\ \alpha_3 &= k_a^{(1)} / k_a^{(2)} \xi^{(1)} - \xi^{(2)}, \alpha_4 = k_w^{(1)} / k_w^{(2)} \xi^{(1)} - \xi^{(2)}, \\ \alpha_5 &= k_a^{(1)} / k_a^{(2)} \eta^{(1)} + \xi^{(2)}, \alpha_6 = k_w^{(1)} / k_w^{(2)} \eta^{(1)} + \xi^{(2)}, \\ \alpha_7 &= k_a^{(1)} / k_a^{(2)} \eta^{(1)} - \xi^{(2)}, \alpha_8 = k_w^{(1)} / k_w^{(2)} \eta^{(1)} - \xi^{(2)}, \\ \alpha_9 &= k_a^{(1)} / k_a^{(2)} \xi^{(1)} + \eta^{(2)}, \alpha_{10} = k_w^{(1)} / k_w^{(2)} \xi^{(1)} + \eta^{(2)}, \\ \alpha_{11} &= k_a^{(1)} / k_a^{(2)} \xi^{(1)} - \eta^{(2)}, \alpha_{12} = k_w^{(1)} / k_w^{(2)} \xi^{(1)} - \eta^{(2)}, \\ \alpha_{13} &= k_a^{(1)} / k_a^{(2)} \eta^{(1)} + \eta^{(2)}, \alpha_{14} = k_w^{(1)} / k_w^{(2)} \eta^{(1)} + \eta^{(2)}, \\ \alpha_{15} &= k_a^{(1)} / k_a^{(2)} \eta^{(1)} - \eta^{(2)}, \alpha_{16} = k_w^{(1)} / k_w^{(2)} \eta^{(1)} - \eta^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (A17)$$

$$\alpha_\xi = 2(a_5^{(2)} - a_6^{(2)})\xi^{(2)}, \alpha_\eta = 2(a_5^{(2)} - a_6^{(2)})\eta^{(2)}. \quad (A18)$$

附录 B: 中间变量表达式

$$\chi_1 = e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} M_2 + M_8 - e^{2\xi^{(2)}h_2} M_3 - e^{2\eta^{(2)}h_2} M_7, \quad (B1)$$

$$\chi_2 = e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} M_5 - e^{2\xi^{(2)}h_2} M_6 - e^{2\eta^{(2)}h_2} M_9 + M_{10}, \quad (B2)$$

$$\chi_3 = \chi_4 + \chi_5 - \chi_6. \quad (B3)$$

$$\chi_4 = e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} (m_{11}m_6 - m_2m_{31}) + m_{21}m_8 - m_4m_{41} - e^{2\xi^{(2)}h_2} (m_{11}m_8 - m_2m_{41}) - e^{2\eta^{(2)}h_2} (m_{21}m_6 - m_4m_{31}), \quad (B4)$$

$$\chi_5 = -e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} c_1 + e^{2\xi^{(2)}h_2} c_2 + e^{2\eta^{(2)}h_2} c_3 - c_4, \quad (B5)$$

$$\chi_6 = e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} (m_1m_{33} - m_{13}m_5) + m_3m_{43} - m_{23}m_7 - e^{2\xi^{(2)}h_2} (m_1m_{43} - m_{13}m_7) - e^{2\eta^{(2)}h_2} (m_3m_{33} - m_{23}m_5). \quad (B6)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_{11} &= b_1 - e^{2\eta^{(2)}h_2} b_2, \chi_{12} = b_3 - e^{2\eta^{(2)}h_2} b_4, \\ \chi_{13} &= b_5 + e^{2\xi^{(2)}h_2} b_6, \chi_{14} = b_7 + e^{2\xi^{(2)}h_2} b_8. \end{aligned} \right\} \quad (B7)$$

$$\varphi_1 = e^{2(\xi^{(2)} + \eta^{(2)})h_2} a_1 + e^{2\xi^{(2)}h_2} a_2 + e^{2\eta^{(2)}h_2} a_3 + a_4, \quad (B8)$$

$$\varphi_2 = e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} M_5 + e^{2\xi^{(2)}h_2} M_6 + e^{2\eta^{(2)}h_2} M_9 + M_{10}, \quad (B9)$$

$$\varphi_3 = [e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} (m_2m_{32} - m_{12}m_6) + e^{2\xi^{(2)}h_2} (m_2m_{42} - m_{12}m_8) +$$

$$e^{2\eta^{(2)}h_2} (m_4m_{32} - m_{22}m_6) + m_4m_{42} - m_{22}m_8](u_a^0 + a_6^{(1)}u_w^0), \quad (B10)$$

$$\varphi_4 = e^{\eta^{(2)}h_2} (e^{2\xi^{(2)}h_2} m_2 + m_4)(u_a^0 + a_5^{(2)}u_w^0) + e^{\xi^{(2)}h_2} (e^{2\eta^{(2)}h_2} m_6 + m_8)(u_a^0 + a_6^{(2)}u_w^0), \quad (B11)$$

$$\varphi_5 = \varphi_3 - \varphi_1(u_a^0 + a_6^{(1)}u_w^0), \quad (B12)$$

$$\varphi_6 = (e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} c_1 + e^{2\xi^{(2)}h_2} c_2 + e^{2\eta^{(2)}h_2} c_3 + c_4)(u_a^0 + a_5^{(1)}u_w^0), \quad (B13)$$

$$\varphi_7 = e^{2(\eta^{(2)} + \xi^{(2)})h_2} M_2 + M_8 + e^{2\xi^{(2)}h_2} M_3 + e^{2\eta^{(2)}h_2} M_7, \quad (B14)$$

$$\varphi_8 = e^{\eta^{(2)}h_2} (e^{2\xi^{(2)}h_2} m_1 + m_3)(u_a^0 + a_5^{(2)}u_w^0) + e^{\xi^{(2)}h_2} (e^{2\eta^{(2)}h_2} m_5 + m_7)(u_a^0 + a_6^{(2)}u_w^0), \quad (B15)$$

$$\varphi_9 = \varphi_6 - \varphi_1(u_a^0 + a_5^{(1)}u_w^0), \quad (B16)$$

$$\varphi_{10} = (e^{2\eta^{(2)}h_2} b_2 + b_1)(u_a^0 + a_5^{(1)}u_w^0), \quad (B17)$$

$$\varphi_{11} = (e^{2\eta^{(2)}h_2} b_4 + b_3)(u_a^0 + a_6^{(1)}u_w^0), \quad (B18)$$

$$\varphi_{12} = e^{\eta^{(2)}h_2} (m_1m_4 - m_2m_3)(u_a^0 + a_5^{(2)}u_w^0), \quad (B19)$$

$$\varphi_{13} = e^{\xi^{(2)}h_2} (e^{2\eta^{(2)}h_2} a_1 + a_2)(u_a^0 + a_6^{(2)}u_w^0), \quad (B20)$$

$$\varphi_{14} = e^{-\xi^{(2)}h_2} (e^{2\eta^{(2)}h_2} a_3 + a_4)(u_a^0 + a_6^{(2)}u_w^0), \quad (B21)$$

$$\varphi_{15} = (e^{2\xi^{(2)}h_2} b_6 - b_5)(u_a^0 + a_5^{(1)}u_w^0), \quad (B22)$$

$$\varphi_{16} = (e^{2\xi^{(2)}h_2} b_8 - b_7)(u_a^0 + a_6^{(1)}u_w^0), \quad (B23)$$

$$\varphi_{17} = e^{\xi^{(2)}h_2} (m_5m_8 - m_6m_7)(u_a^0 + a_6^{(2)}u_w^0), \quad (B24)$$

$$\varphi_{18} = e^{\eta^{(2)}h_2} (e^{2\xi^{(2)}h_2} a_1 + a_3)(u_a^0 + a_5^{(2)}u_w^0), \quad (B25)$$

$$\varphi_{19} = e^{-\eta^{(2)}h_2} (e^{2\xi^{(2)}h_2} a_2 + a_4)(u_a^0 + a_5^{(2)}u_w^0), \quad (B26)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= m_1m_6 - m_2m_5, a_2 = m_1m_8 - m_2m_7, \\ a_3 &= m_3m_6 - m_4m_5, a_4 = m_3m_8 - m_4m_7, \end{aligned} \right\} \quad (B27)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= M_4m_7 - M_6m_3 + m_1M_{10}, b_2 = m_1M_9 - M_5m_3 + M_4m_5, \\ b_3 &= M_1m_8 - M_3m_4 + m_2M_8, b_4 = M_1m_6 - M_2m_4 + m_2M_7, \\ b_5 &= M_{10}m_5 - m_3M_{12} - M_9m_7, b_6 = M_5m_7 - M_6m_5 + m_1M_{12}, \\ b_7 &= M_8m_6 - m_4M_{11} - M_7m_8, b_8 = M_2m_8 - M_3m_6 + m_2M_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (B28)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= m_{14}m_5 - m_1m_{34}, c_2 = m_{14}m_7 - m_1m_{44}, \\ c_3 &= m_{24}m_5 - m_3m_{34}, c_4 = m_{24}m_7 - m_3m_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (B29)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_{11} - m_{12}, m_2 = m_{13} - m_{14}, m_3 = m_{21} - m_{22}, \\ m_4 &= m_{23} - m_{24}, m_5 = m_{31} - m_{32}, m_6 = m_{33} - m_{34}, \\ m_7 &= m_{41} - m_{42}, m_8 = m_{43} - m_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (B30)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}, M_2 = m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31}, \\ M_3 &= m_{11}m_{42} - m_{12}m_{41}, M_4 = m_{13}m_{24} - m_{14}m_{23}, \\ M_5 &= m_{13}m_{34} - m_{14}m_{33}, M_6 = m_{13}m_{44} - m_{14}m_{43}, \\ M_7 &= m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}, M_8 = m_{21}m_{42} - m_{22}m_{41}, \\ M_9 &= m_{23}m_{34} - m_{24}m_{33}, M_{10} = m_{23}m_{44} - m_{24}m_{43}, \\ M_{11} &= m_{31}m_{42} - m_{32}m_{41}, M_{12} = m_{33}m_{44} - m_{34}m_{43}. \end{aligned} \right\} \quad (B31)$$