

DOI: 10.11779/CJGE20220007

# 不同透水边界下单层饱和多孔介质一维瞬态响应解

赵云<sup>1,2</sup>, 陈雪梅<sup>1</sup>, 陈樟龙<sup>3</sup>, 凌道盛<sup>\*2</sup>, 单振东<sup>4</sup>, 肖昭然<sup>1</sup>

(1. 河南工业大学土木工程学院, 河南 郑州 450001; 2. 软弱土与环境土工教育部重点实验室(浙江大学), 浙江 杭州 310058;

3. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 4. 中国地震局工程力学研究所, 黑龙江 哈尔滨 150080)

**摘要:** 基于 Biot 饱和多孔介质一维波动控制方程, 给出具有普遍意义的一般性透水边界条件、任意初始条件和任意竖向荷载作用下单层饱和多孔介质一维瞬态响应定解模型。首先提出可通过调整相应参数实现采用孔压  $p$  和液相相对位移  $w$  的线性组合来表示不同的透水边界。之后采用分离变量法求得无阻尼控制方程的特征值和特征函数, 利用待定系数法和特征函数的正交性, 将原问题转换为求解时域内一系列阻尼项耦合的常微分方程组的初值问题, 采用精细时程积分法给出瞬态响应问题的半解析解。同前人研究相比, 提出的半解析解具有普遍意义, 可精确退化至前人结果, 通过与文献不同边界条件的结果对比, 验证了解答的正确性。最后, 系统分析了不同透水条件下瞬态响应的特点, 结果表明半透水条件下响应介于透水和不透水之间, 在阶跃荷载下, 位移呈现先增大后减小的变化模式, 入射波和反射波产生相同相位的孔压。

**关键词:** 透水条件; 半解析解; 饱和多孔介质; 单层; 瞬态响应

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2023)06-1133-08

**作者简介:** 赵云(1989—), 男, 博士, 讲师, 主要从事土动力学与交通岩土工程等方面的教学和科研工作。E-mail: zhaoyun1106@163.com。

## Semi-analytical solutions for transient response of one-dimensional saturated single-layer porous media under various permeable boundary conditions

ZHAO Yun<sup>1,2</sup>, CHEN Xuemei<sup>1</sup>, CHEN Zhanglong<sup>3</sup>, LING Daosheng<sup>2</sup>, SHAN Zhendong<sup>4</sup>, XIAO Zhaoran<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China; 2. MOE Key Laboratory of

Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 3. Department of Geotechnical

Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 4. Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration,

Harbin 150080, China)

**Abstract:** Based on the one-dimensional basic equations for waves in saturated porous media proposed by Biot, a mathematical model for one-dimensional transient response of single-layer saturated porous media is established under various permeable boundary conditions, arbitrary initial conditions and arbitrary vertical loads. Firstly, the independent parameters fluid pressure  $p$  and fluid relative displacement  $w$  are proposed to describe the various permeable boundary conditions by linear combination through adjusting the parameters. By utilizing the variable separation method, the eigen-values and the eigen-functions are obtained for undamped governing equations. With the help of undetermined coefficients and orthogonality of eigenfunctions methods, the solution to the problem can be converted to solve the initial value problem of a series of ordinary differential equations. The semi-analytical solutions are approached by using the precise time-integration method. Compared with those of the previous researches, the semi-analytical solutions of this research are more general and can be degenerated into various conditions exactly. Several numerical simulations are carried out to validate the proposed method. Finally, the one-dimensional transient responses of single-layer saturated soil with general boundary conditions under step loads are analyzed. The results demonstrate that the responses of semi-permeable condition are between the permeable and impermeable conditions. The displacements of solid and fluid increase first and then decrease. The incident and reflected waves stimulate the same phase pore pressure.

**Key words:** permeable condition; semi-analytical solution; saturated porous medium; single layer; transient response

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51978247); 河南工业大学高层次人才科研启动基金项目(31401175); 软弱土与环境土工教育部重点实验室(浙江大学)开放基金项目(2019P03)

**收稿日期:** 2022-01-02

**\*通信作者** (E-mail: dsling@zju.edu.cn)

## 0 引言

多孔介质的瞬态响应问题是动力学的重要分支, 在地震工程、海洋工程和岩土工程等领域受到广泛的关注, 具有重要的理论价值和实际应用。

自 Biot<sup>[1-2]</sup>提出饱和多孔介质波动理论以来, 众多学者通过求解 Biot 波动方程, 获得一维、半空间以及层状饱和多孔介质在动力荷载下时域或频域内的基本解或者动力响应结果, 研究波的传播和弥散机理以及多孔介质的振动和应力孔压等响应情况。在基本解方面, Zheng 等<sup>[3]</sup>将波动问题简化为由 Helmholtz 控制方程的 4 个标量势确定, 给出柱坐标系下多孔弹性半空间的通解。Sahebkar 等<sup>[4]</sup>采用标量势函数和积分变换方法给出点荷载和流体源作用下横观各向同性多孔弹性介质基本解。Wang 等<sup>[5]</sup>采用傅里叶变换给出频域内三维各向异性饱和半空间的格林函数。对于成层饱和多孔介质响应问题, Lu 等<sup>[6]</sup>通过 Hankel 变换和 Fourier 变换提出点荷载或流体点源作用下分层饱和半空间的透射和反射矩阵法 (TRM)。Ba 等<sup>[7]</sup>分析了多层横观各向同性多孔弹性半空间的三维动态响应。对于移动荷载下多孔介质响应问题, Cai 等<sup>[8]</sup>考虑路面不平顺, 采用傅里叶变换分析了移动卡车荷载下饱和多孔弹性半空间的动力响应。Li 等<sup>[9]</sup>将轨道视为 Timoshenko 梁, 研究了移动荷载下成层横观各向同性饱和路基的动力响应。在一维瞬态响应方面, Schanz 等<sup>[10]</sup>采用 Laplace 变换给出无黏性耦合情况下的解析解。Shan 等<sup>[11]</sup>采用分离变量法和傅里叶正余弦变换法给出单层饱和多孔介质在三类典型边界条件下的级数解以及半无限问题的积分解。凌道盛等<sup>[12]</sup>给出时域内顶部和底部均为透水边界的单层饱和多孔介质半解析解。Schanz 等<sup>[13]</sup>采用 Kelvin-Voigt 模型替换 Biot 的线弹性固体骨架模型, 获得 Laplace 域内一维黏弹性饱和多孔介质的解析解。Pisanò 等<sup>[14]</sup>采用改进的分步 Taylor-Galerkin 有限元法获得黏弹性数值解。Shan 等<sup>[15]</sup>采用傅里叶变换法获得时域内饱和黏弹性多孔介质一维瞬态响应解。Shan 等<sup>[16]</sup>采用特征函数法给出上覆饱和和流体时的饱和多孔介质一维瞬态响应半解析解。

可以看出, 目前关于 Biot 方程的解析研究主要通过积分变换的方式求解, 已有诸多解答。然而, 由于多孔介质的惯性、黏滞和机械耦合作用比较复杂, 多数问题都进行了简化, 多数解答均是通过时间和空间离散的数值方法获得, 频域的解析解答需经过逆变换转为时域, 而逆变换过程如 Laplace 逆变换往往存在数值不稳定问题<sup>[17]</sup>。多数精确解和解析解集中在一维问题中, 即使是一维问题, 也仅能给出满足一定边界

条件和材料参数要求的解答, 需要寻求适应更多边界条件的高效解答。此外, 上述研究中边界透水条件均沿用传统的太沙基类边界, 采用孔压或液相位移描述边界透水情况, 然而, 这并不能反映边界实际复杂的透水情况, 如分析域边界处存在上覆砂垫层等工况, 边界将变为半透水情况。众所周知, 边界情况对响应结果具有较大的影响, 如何针对复杂的实际工况, 对边界进行修正是动力问题另一个需要进一步研究的工作。

对于一维问题的研究, 一是可以验证相关数值解法的正确性和精度, 更重要的是可以深入理解多孔介质的动力特性。本文以单层饱和多孔介质为研究对象, 对其在任意竖向荷载作用下的一维瞬态响应问题展开研究, 提出具有普遍意义的一般性透水边界条件, 考虑多孔介质各相间的惯性、黏滞和机械耦合作用, 结合特征函数法和常数变易法, 在时域内直接求解, 并系统分析了不同透水条件下单层饱和多孔介质的瞬态响应特点。

## 1 控制方程和定解模型

本文以一般性透水边界条件下单层饱和多孔介质瞬态响应问题为例, 建立如图 1 所示模型,  $H$  为单层饱和介质厚度。模型顶部作用任意竖向荷载, 底部为固定位移, 边界处为任意的透水条件。

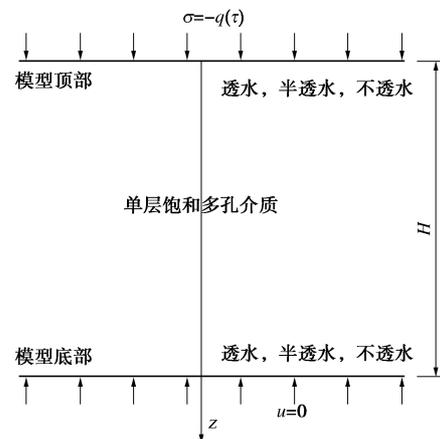


图 1 不同透水边界条件下单层饱和多孔介质模型

Fig. 1 1D model for saturated porous media under various permeable boundary conditions

### 1.1 基本方程

采用 Simon 等<sup>[18]</sup>的表述方法, Biot 饱和多孔介质整体平衡方程和流体平衡方程基本方程为

$$\sigma_{z,z} - \rho u_{z,tt} - \rho_f w_{z,tt} = 0 \quad (1)$$

$$-P_{,z} = \rho w_{z,tt} + \rho_f u_{z,tt} + w_{z,t} / k_f \quad (2)$$

渗流连续方程和固体骨架本构方程为

$$-w_{z,z} = \alpha u_{z,z} + P/Q, \quad (3)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu)u_{z,z} - \alpha P. \quad (4)$$

式中:  $u_z$  为固体骨架的绝对位移;  $w_z$  为流体的相对位移,  $w_z = n(\bar{w}_z - u_z)$ ,  $\bar{w}_z$  为流体的绝对位移,  $n$  为材料孔隙率;  $\sigma_z$  为介质总应力, 以拉为正;  $P$  为孔隙流体压力, 以压为正;  $\rho$  为饱和和多孔介质质量密度,  $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f$ ,  $\rho_f$  为流体质量密度,  $\rho_s$  为固体颗粒的质量密度;  $\bar{\rho} = \rho_f/n$ ; 下标  $t$  为时间;  $k_f$  为动力渗透系数, 与 Darcy 定律的渗透系数和流体重度  $\gamma_f$  间满足  $k_f = k/\gamma_f$ ;  $\lambda, \mu$  为固体骨架的 Lamé 常数;  $\alpha, Q$  为与固相和液相压缩性相关的系数, 且  $\alpha = 1 - K_b/K_s$ ,  $1/Q = (\alpha - n)/K_s + n/K_f$ ,  $K_b = \lambda + 2\mu/3$ ,  $K_s, K_f$  和  $K_b$  分别为固体颗粒, 液相和固体骨架的体积模量。当  $K_s \rightarrow \infty$  时, 固体颗粒不可压缩; 当  $K_f \rightarrow \infty$  时, 流体不可压缩。

为方便起见, 将式 (1) ~ (4) 量纲归一化, 并写出矩阵形式:

$$Ku_{,\zeta\zeta} - Mu_{,\tau\tau} - Cu_{,\tau} = 0. \quad (5)$$

$$\text{式中: } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha\kappa \\ \alpha\kappa & \kappa \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\eta \end{pmatrix}, \tau = \frac{\sqrt{m/\rho}}{H}t. \text{ 其中 } \zeta = \frac{z}{H}, u = \frac{u_z}{H},$$

$$w = \frac{w_z}{H}, \beta = \frac{\rho_f}{\rho}, \kappa = \frac{Q}{m}, \gamma = \frac{\bar{\rho}}{\rho}, \eta = \frac{H}{2k_f\sqrt{m\rho}},$$

$$m = \lambda + 2\mu + \alpha^2 Q.$$

### 1.2 定解条件

在固结问题中, 沿用太沙基边界条件, 用孔压表示透水和不透水, 当孔压采用第三类边界条件时, 则可以表示半透水或任意透水条件,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = a_0 u, \quad (6a)$$

$$b_0 p + c_0 \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (6b)$$

式(6b)中  $b_0$  和  $c_0$  不同时为 0。当  $a_0 = 0$  或  $b_0 = 0, c_0 \neq 0$  时, 式 (6) 退化为太沙基不透水条件, 当  $a_0 \rightarrow \infty$  或  $b_0 \neq 0, c_0 = 0$  时, 式 (6) 退化为太沙基透水条件。其他条件, 则式 (6) 可以不同程度的半透水条件。

在动力问题中, 对于透水条件同样采用太沙基边界, 即孔压  $p=0$  表示, 而不透水边界的表示方法则有 两种表述方式, 一类是同样沿用太沙基边界条件:  $\partial p/\partial z = 0$  [19], 另一类则是采用液相位移  $w=0$  表示 [11]。两者分别从孔压和位移的角度描述边界的不透水情况, 在一定程度上都是合理的。然而, 两者并不完全等价, 研究表明, 在动力问题中, 如果采用  $\partial p/\partial z = 0$

表示不透水边界, 往往会使得解答不适定, 即解不唯一, 如果想要获得唯一解, 需要在边界处补充  $w = f(\tau)$  的条件 [19-20]。因此, 在动力问题中, 较多采用  $w=0$  的边界条件表示不透水。

以往动力研究中较少分析半透水形式, 实际上, 边界条件尤其是透水条件, 对动力响应结果同样有较大影响, 极端的透水条件并不能准确反映结构和路基的振动情况, 因此有必要引入半透水边界。

本文采用以下边界条件:

$$\sigma|_{\zeta=0} = q(\tau), \quad (7a)$$

$$a_1 p + b_1 w|_{\zeta=0} = 0, \quad (7b)$$

$$u|_{\zeta=1} = 0, \quad (7c)$$

$$a_2 p + b_2 w|_{\zeta=1} = 0. \quad (7d)$$

式中: 两个参数  $a_i, b_i$  为不同时为 0 的已知实数,  $i=1,2$ 。式(7b), (7d)反映边界的透水情况, 当  $a_{1or2} = 0$  时, 为不透水边界, 当  $b_{1or2} = 0$  时, 为透水边界, 均不为 0 时,  $-a_i/b_i$  的大小表示不同程度的半透水边界, 反映模型边界处附近渗透系数和多孔介质层厚度的影响。

量纲归一化的初始条件表示为

$$\mathbf{u}(\zeta, 0) = \mathbf{g}_1(\zeta, 0), \mathbf{u}_{,\zeta}(\zeta, 0) = \mathbf{g}_2(\zeta, 0). \quad (8)$$

式中:  $\mathbf{g}_1(\zeta) = (g_{11}(\zeta), g_{12}(\zeta))^T$ ;  $\mathbf{g}_2(\zeta) = (g_{21}(\zeta), g_{22}(\zeta))^T$ 。  $g_{11}(\zeta), g_{12}(\zeta), g_{21}(\zeta), g_{22}(\zeta)$  均为任意函数。

## 2 半解析解推导

### 2.1 边界齐次化

将式 (5) 的解分为两部分:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^d + \mathbf{u}^s. \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{u}^d = (u^d, w^d)^T$ ;  $\mathbf{u}^s = (u^s, w^s)^T$ 。

$\mathbf{u}^s$  采用如下表达式满足边界条件,  $u^s, w^s$  可分别采用形式为

$$u^s = a\zeta^2 + b\zeta, \quad (10a)$$

$$u^s = a\zeta + b, \quad (10b)$$

$$w^s = c\zeta^2 + d\zeta, \quad (11a)$$

$$w^s = c\zeta + d. \quad (11b)$$

式 (10), (11) 两两组合共有 4 种可尝试齐次化方式。

将式 (10), (11) 代入边界条件 (7) 可得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

式中:  $i=1, 2, 3, 4$ 。共可获得 4 个系数矩阵, 首先判

断系数矩阵行列式是否为0，不为0时，表明可采用这种形式进行齐次化，之后等式两边左乘系数矩阵的逆矩阵，即可给出  $a, b, c, d$  的值，继而给出  $u^s$  的值。

将式(9)~(11)代入式(5),(7),(8),可得  $u^d$  满足的定解条件:

$$Ku_{,\zeta\zeta}^d - Mu_{,\tau\tau}^d - Cu_{,\tau}^d = Mu_{,\tau\tau}^s + Cu_{,\tau}^s - Ku_{,\zeta\zeta}^s, \quad (13)$$

$$\sigma^d|_{\zeta=0} = 0, \quad (14a)$$

$$a_1 p^d + b_1 w^d(\zeta)|_{\zeta=0} = 0, \quad (14b)$$

$$u^d(\zeta)|_{\zeta=1} = 0, \quad (14c)$$

$$a_2 p^d + b_2 w^d(\zeta)|_{\zeta=1} = 0, \quad (14d)$$

$$\left. \begin{aligned} u^d(\zeta, 0) &= g_1(\zeta, 0) - u^s(\zeta, 0), \\ u_{,\tau}^d(\zeta, 0) &= g_2(\zeta, 0) - u_{,\tau}^s(\zeta, 0). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

### 2.2 特征值和特征函数

首先求解式(13)对应的无阻尼特征值问题。

假定方程具有如下分离变量形式的解:

$$u^d = Ue^{i\omega\tau}. \quad (16)$$

式中:  $U = (\varphi(\zeta), \psi(\zeta))^T; \omega \geq 0$ 。

代入无阻尼特征方程和边界条件(14)得

$$KU_{,\zeta\zeta} + \omega^2 MU = 0, \quad (17)$$

$$\varphi_{,\zeta}(\zeta) + \alpha\kappa\psi_{,\zeta}(\zeta)|_{\zeta=0} = 0, \quad (18a)$$

$$a_1(-\alpha\kappa\varphi_{,\zeta}(\zeta) - \kappa\psi_{,\zeta}(\zeta)) + b_1\psi|_{\zeta=0} = 0, \quad (18b)$$

$$\varphi|_{\zeta=1} = 0, \quad (18c)$$

$$a_2(-\alpha\kappa\varphi_{,\zeta}(\zeta) - \kappa\psi_{,\zeta}(\zeta)) + b_2\psi|_{\zeta=1} = 0. \quad (18d)$$

当  $\omega > 0$  时, 式(17)具有如下形式解:

$$U = Je^{i\chi\tau}. \quad (19)$$

式中:  $\chi$  为待定常数。

将式(19)代入式(17)得

$$(K\chi^2 + \omega^2 M)J = 0. \quad (20)$$

式(20)有非零解, 系数矩阵的行列式等于0,

由此可得

$$h_3\chi^4 + h_2\chi^2\omega^2 + h_1\omega^4 = 0. \quad (21)$$

式中:  $h_3 = \kappa - \alpha^2\kappa^2; h_2 = \kappa + \gamma - 2\alpha\kappa\beta; h_1 = \gamma - \beta^2$ 。

则可获得方程(21)相应的4个特征值:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -\beta_3 = i\omega\chi_1, \\ \beta_2 &= -\beta_4 = i\omega\chi_2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \sqrt{\frac{h_2 - \sqrt{h_2^2 - 4h_3h_1}}{2h_3}}, \\ \chi_2 &= \sqrt{\frac{h_2 + \sqrt{h_2^2 - 4h_3h_1}}{2h_3}}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

对应的特征矢量  $J_i (i=1,2,3,4)$  为

$$\left. \begin{aligned} J_1 = J_3 &= \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - \kappa\chi_1^2 \\ \alpha\kappa\chi_1^2 - \beta \end{pmatrix}, \\ J_2 = J_4 &= \begin{pmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - \kappa\chi_2^2 \\ \alpha\kappa\chi_2^2 - \beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

则  $U$  的表达式可写为

$$U = c_1 J_1 \cos(\omega\chi_1\zeta) + c_2 J_1 \sin(\omega\chi_1\zeta) + c_3 J_2 \cos(\omega\chi_2\zeta) + c_4 J_2 \sin(\omega\chi_2\zeta). \quad (25)$$

将式(25)代入边界条件(18)并整理可得

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega\chi_1 J_{11} + \alpha\kappa\omega\chi_1 J_{12} & 0 & \omega\chi_2 J_{21} + \alpha\kappa\omega\chi_2 J_{22} \\ b_1 J_{12} & -\alpha\kappa a_1 \omega\chi_1 J_{11} & b_1 J_{22} & -\alpha\kappa a_1 \omega\chi_2 J_{21} \\ J_{11} \cos(\omega\chi_1) & -a_1 \kappa \omega\chi_1 J_{12} & J_{21} \cos(\omega\chi_2) & -a_1 \kappa \omega\chi_2 J_{22} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

式中:

$$\begin{aligned} c_{41} &= b_2 J_{12} \cos(\omega\chi_1) + a_2 \kappa \omega\chi_1 J_{12} \sin(\omega\chi_1) + a_2 \alpha \kappa \omega\chi_1 J_{11} \sin(\omega\chi_1); \\ c_{42} &= b_2 J_{12} \sin(\omega\chi_1) - a_2 \kappa \omega\chi_1 J_{12} \cos(\omega\chi_1) - a_2 \alpha \kappa \omega\chi_1 J_{11} \cos(\omega\chi_1); \\ c_{43} &= b_2 J_{22} \cos(\omega\chi_2) + a_2 \kappa \omega\chi_2 J_{22} \sin(\omega\chi_2) + a_2 \alpha \kappa \omega\chi_2 J_{21} \sin(\omega\chi_2); \\ c_{44} &= b_2 J_{22} \sin(\omega\chi_2) - a_2 \kappa \omega\chi_2 J_{22} \cos(\omega\chi_2) - a_2 \alpha \kappa \omega\chi_2 J_{21} \cos(\omega\chi_2). \end{aligned}$$

式(26)若有非零解, 则系数矩阵行列式为0, 由此可得到关于特征值  $\omega$  的方程:

$$f(\omega) = 0. \quad (27)$$

式(27)为超越方程, 由此可获得一系列特征值  $\omega$ , 由小到大排列, 并记为  $\omega_k (k=1, 2, \dots)$ , 其对应的特征矢量为  $R_k = (A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14})^T$ ,  $A_{1j}$  为式(26)系数矩阵第一行对应的代数余子式,  $j=1, 2, 3, 4$ 。

当  $\omega = 0$  时, 方程(17)有解:

$$U = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_3 \end{pmatrix} \zeta + \begin{pmatrix} d_2 \\ d_4 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

式中:  $d_j$  为待求常数,  $j=1, 2, 3, 4$ 。

将式(28)代入边界条件(18)得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\kappa & 0 \\ -a_1\alpha\kappa & 0 & -a_1\kappa & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2\alpha\kappa & 0 & -a_2\kappa + b_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

当系数行列式不为0时, 有零解, 此时  $U$  为平凡解。

当系数行列式等于0时, 则有非零解, 此时需要边界条件各参数满足:

$$f(a_i, b_i) = 0. \quad (30)$$

对应的特征向量为

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{13} \end{pmatrix} \zeta + \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{14} \end{pmatrix} \quad (31)$$

式中:  $B_{1j}$  为式 (29) 系数矩阵第一行对应的代数余子式,  $j=1,2,3,4$ 。

令式 (26) 中  $\omega = 0$ , 并乘以  $\mathbf{R}_0$ , 使其等于  $\mathbf{U}_0$ , 可获得合适的  $\mathbf{R}_0$  值, 从而将  $\omega = 0$  的模态并入到  $\mathbf{U}_k$  中。

即特征值  $\omega_k$  对应的特征函数:

$$\mathbf{U}_k = [J_1 \cos(\omega \chi_1 \zeta) \quad J_1 \sin(\omega \chi_1 \zeta) \quad J_2 \cos(\omega \chi_2 \zeta) \quad J_2 \sin(\omega \chi_2 \zeta)] \cdot \mathbf{R}_k \quad (32)$$

假定  $\omega_k$  和  $\omega_p$  为不同特征值, 对应的特征函数为  $\mathbf{U}_k(\zeta)$  和  $\mathbf{U}_p(\zeta)$ , 分别代入方程 (17) 并相减, 并由  $\mathbf{M}$  的对称性可得

$$\int_0^1 (\mathbf{U}_p^T \mathbf{K} \mathbf{U}_{k,\zeta\zeta} - \mathbf{U}_k^T \mathbf{K} \mathbf{U}_{p,\zeta\zeta}) d\zeta + (\omega_k^2 - \omega_p^2) \int_0^1 \mathbf{U}_p^T \mathbf{M} \mathbf{U}_k d\zeta = 0 \quad (33)$$

采用分部积分技术结合边界条件, 可证明第一项为 0。则当  $\omega_k \neq \omega_p$  时,

$$(\omega_k^2 - \omega_p^2) \int_0^1 \mathbf{U}_p^T \mathbf{M} \mathbf{U}_k d\zeta = 0 \quad (34)$$

即特征函数满足正交性。

### 2.3 动力问题的解

根据常数变易法, 方程 (13) 具有如下形式解:

$$\mathbf{u}^d = \sum_{k=0 \text{ or } 1}^{\infty} \mathbf{U}_k T_k(\tau) \quad (35)$$

将式 (35) 代入式 (13) 得

$$\sum_{k=0 \text{ or } 1}^{\infty} \mathbf{M} \mathbf{U}_k T_{k,\tau\tau}(\tau) + \sum_{k=0 \text{ or } 1}^{\infty} \omega_k^2 \mathbf{M} \mathbf{U}_k T_k(\tau) + \sum_{k=0 \text{ or } 1}^{\infty} \mathbf{C} \mathbf{U}_k T_{k,\tau}(\tau) = -\mathbf{M} \mathbf{u}_{,\tau\tau}^s - \mathbf{C} \mathbf{u}_{,\tau}^s + \mathbf{K} \mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^s \quad (36)$$

式 (36) 左乘  $\mathbf{U}_p^T$ , 并对从 0 到 1 积分, 利用特征函数的正交性可得:

$$T_{p,\tau\tau}(\tau) + \omega_p^2 T_p(\tau) + \sum_{k=0 \text{ or } 1} c_{pk} T_{k,\tau}(\tau) = s_p(\tau) \quad (37)$$

式中:  $c_{pk} = \frac{1}{G_p} \int_0^1 \mathbf{U}_p^T \mathbf{C} \mathbf{U}_k d\zeta$ ;  $s_p(\tau) = -\frac{1}{G_p} \int_0^1 \mathbf{U}_p^T (\mathbf{M} \mathbf{u}_{,\tau\tau}^s +$

$\mathbf{C} \mathbf{u}_{,\tau}^s - \mathbf{K} \mathbf{u}_{,\zeta\zeta}^s) d\zeta$ 。

将 (35) 代入初始条件 (15) 中得

$$\sum_{k=0 \text{ or } 1}^{\infty} \mathbf{U}_k T_k(0) = \mathbf{g}_1(\zeta, 0) - \mathbf{u}^s(\zeta, 0) \quad (38a)$$

$$\sum_{k=0 \text{ or } 1}^{\infty} \mathbf{U}_k T_{k,\tau}(0) = \mathbf{g}_2(\zeta, 0) - \mathbf{u}_{,\tau}^s(\zeta, 0) \quad (38b)$$

式 (38) 左乘  $\mathbf{U}_p^T \mathbf{M}$ , 并对从 0 到 1 积分, 利用特征函数的正交性, 可得  $T_k$  的初始条件:

$$T_p(0) = \frac{1}{G_p} \int_0^1 \mathbf{U}_p^T \mathbf{M} (\mathbf{g}_1(\zeta, 0) - \mathbf{u}^s(\zeta, 0)) \quad (39a)$$

$$T_{p,\tau}(0) = \frac{1}{G_p} \int_0^1 \mathbf{U}_p^T \mathbf{M} (\mathbf{g}_2(\zeta, 0) - \mathbf{u}_{,\tau}^s(\zeta, 0)) \quad (39b)$$

求解式 (37), (39) 构成的初值问题, 即可获得方程 (13)  $\mathbf{u}^d$  的解, 继而加上  $\mathbf{u}^s$ , 就可获得原问题 (5) 的解。

### 2.4 常微分方程精细时程积分解

常微分方程组 (37) 中包含无限个常系数微分方程, 特征值  $\omega_k$  按由小到大得顺序排列。实际求解过程中, 根据精度要求取前  $N$  次, 式 (37) 改写为矩阵形式:

$$\hat{\mathbf{T}}_{,\tau\tau}(\tau) + \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{T}}_{,\tau}(\tau) + \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{f}} \quad (40)$$

$$\text{式中: } \hat{\mathbf{T}} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_N \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} \end{Bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_N \end{Bmatrix}.$$

对应的初始条件仍为式 (39), 采用精细时程积分法<sup>[21]</sup>给出上述初值问题的解答。

## 3 算例

### 3.1 方法正确性验证

3 个算例用来验证本文模型的正确性, 3 个算例分别代表不同的透水条件, 顶部作用阶跃荷载, 如表 1 所示, 计算中采用的参数如表 2 所示。

表 1 验证算例中的边界参数

Table 1 Boundary conditions of verification examples		
算例来源	边界条件	备注
Shan 等 <sup>[11]</sup>	$a_1 = b_2 = 1$	顶部透水, 底部不透水
	$a_2 = b_1 = 0$	
	$q(\tau) = -1$	
凌道盛等 <sup>[12]</sup>	$a_1 = a_2 = 1$	顶部和底部均透水
	$b_1 = b_2 = 0$	
	$q(\tau) = -1$	
单振东 <sup>[22]</sup>	$a_1 = a_2 = 0$	顶部和底部不透水
	$b_1 = b_2 = 1$	
	$q(\tau) = -1$	

图 2, 3 给出了本文孔压和总应力的计算结果与文献中不同透水边界结果的对比, 可以看出, 本文结果和前人研究结果具有较好的一致性, 从而证明了本文方法的正确性, 与以往文献相比, 本文的边界条件和

求解方法更具有—般性。

表2 材料参数<sup>[10-11]</sup>

参数	单位	值
Lame 常数 $\lambda$	MPa	144.7
剪切模量 $\mu$	MPa	98
固相体积模量 $K_s$	GPa	11
动力渗透系数 $k_f$	$m^4/(N \cdot s)$	0.01
液相体积模量 $K_f$	GPa	3.3
固相密度 $\rho_s$	$kg/m^3$	2700
液相密度 $\rho_f$	$kg/m^3$	1000
孔隙率 $n$	—	0.48
厚度 $H$	m	10

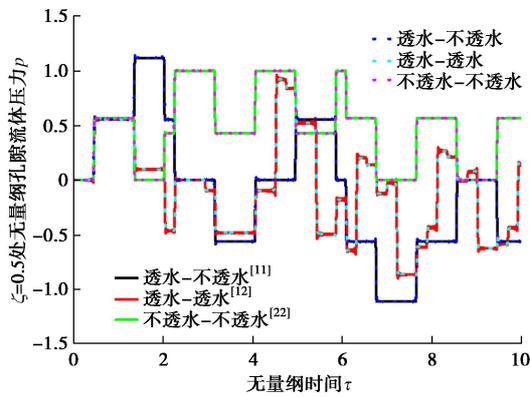


图2 流体孔压结果

Fig. 2 Comparison of fluid pressure results at  $\zeta=0.5$

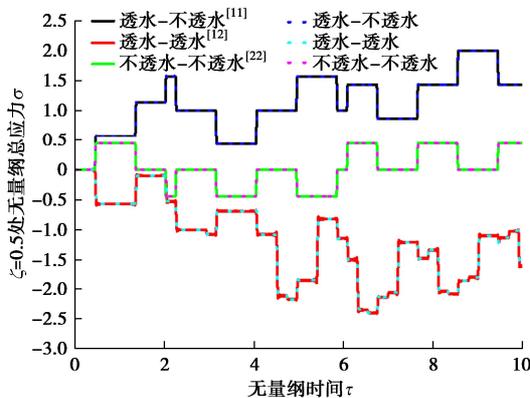


图3 总应力结果

Fig. 3 Comparison of total stress results at  $\zeta=0.5$

### 3.2 不同透水条件下响应

以底部固定不透水，顶部作用阶跃荷载，不同透水条件为例，研究饱和多孔介质在不同透水边界条件下的响应结果，各参数取值： $a_1 = -1$ ， $b_2 = 1$ ， $a_2 = 0$ ， $q(\tau) = -1$ ， $b_1 = -0.01, -5, -20, -100, -10000$ 。

从图4~6可以看出，半透水条件下的瞬态响应结果介于透水和不透水之间，当 $b_1$ 为-0.01，-10000时，各分量响应解答已经与不透水条件和透水条件结果相近。透水条件下产生的位移要远大于不透水条件，在

透水和不透水条件下，固相绝对位移和液相相对位移绝对值呈现先增大后趋于稳定的变化趋势，而在半透水条件下，固相绝对位移和液相相对位移绝对值均呈现先增加后减小的现象。

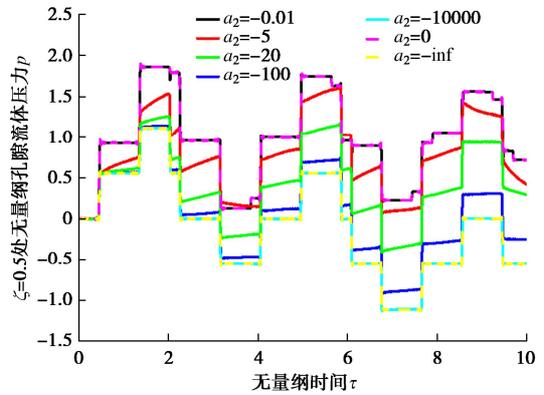


图4 不同透水条件下孔压结果

Fig. 4 Dimensionless fluid pressure responses at  $\zeta=0.5$  under different boundary conditions

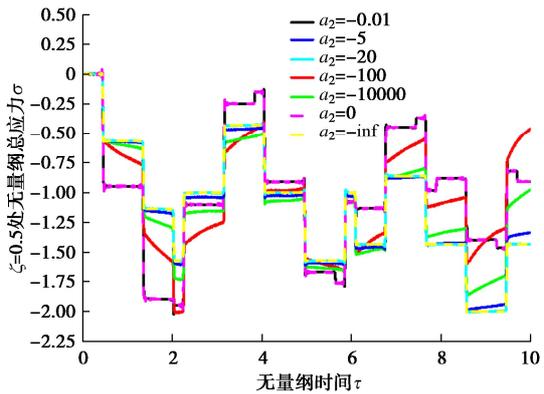


图5 不同透水条件下总应力结果

Fig. 5 Dimensionless total stress responses at  $\zeta=0.5$  under different boundary conditions

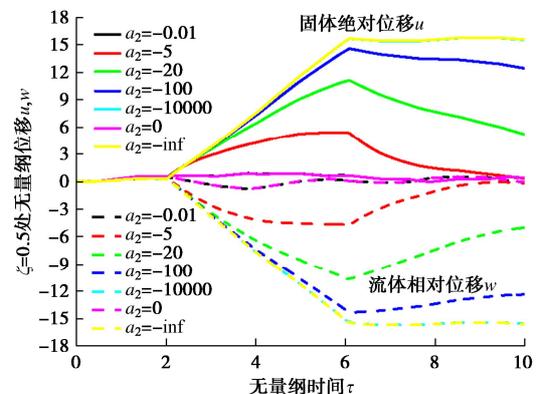


图6 不同透水条件下位移结果

Fig. 6 Dimensionless displacement responses at  $\zeta=0.5$  under different boundary conditions

### 3.3 半透水界面波动情况

图 7, 8 给出不同时刻, 入射阶跃荷载在饱和和多孔介质内部孔压的传播情况, 计算工况和各参数取值均同 3.2 节, 半透水情况时  $b_1$  取值为 -20。可以看出, 入射波激发两种纵波, 随着时间进行, 两种波分开, 快波和慢波分别约在 0.9, 4.0 s 时到达底部, 反射波和入射波产生相同相位的孔压, 即若入射波激发正的孔压, 反射波亦激发正的孔压。

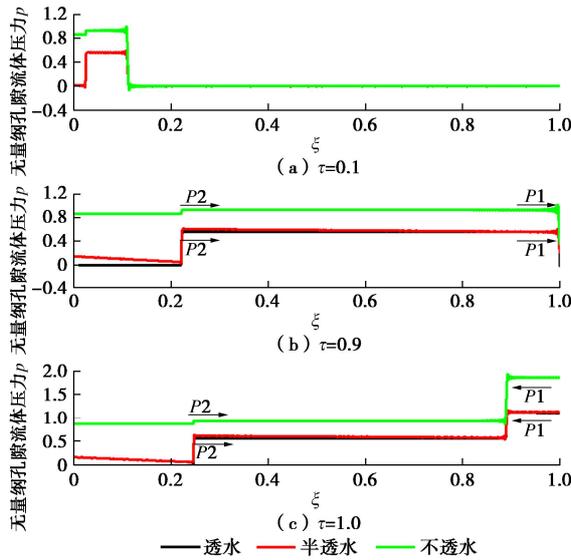


图 7 不同深度处孔压

Fig. 7 Dimensionless fluid pressure responses under different depths

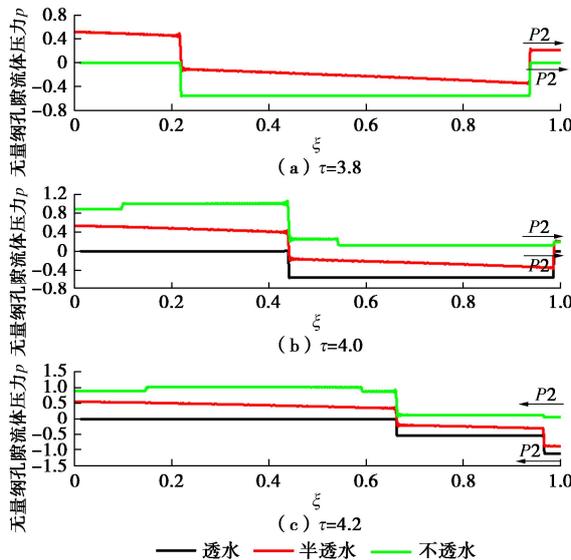


图 8 不同深度处孔压

Fig. 8 Dimensionless fluid pressure responses under different depths

## 4 结 论

本文针对单层饱和和多孔介质一维瞬态响应问题,

提出具有普遍意义的一般性透水边界条件, 并在时域内直接给出一维问题瞬态响应半解析解, 分析了不同透水条件下单层饱和和多孔介质的瞬态响应特点。主要得出 3 点结论。

(1) 本文建立的一般性透水边界条件可以较好地描述边界透水情况, 可精确退化至现有边界条件。

(2) 本文考虑惯性、黏滞和机械耦合作用, 在时域内直接求解, 给出的半解析解可较好克服 Laplace 逆变换存在的数值不稳定等问题, 具有较好的通用性。

(3) 半透水条件下, 饱和和多孔介质响应介于透水和不透水之间, 在顶部半透水和底部固定位移的边界条件下, 入射波和反射波产生相同相位的孔压。

### 参考文献:

- [1] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: I low-frequency range[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, **28**(2): 168-178.
- [2] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid: II higher frequency range[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, **28**(2): 179-191.
- [3] ZHENG P, DING B Y. Potential method for 3D wave propagation in a poroelastic medium and its applications to lamb's problem for a poroelastic half-space[J]. International Journal of Geomechanics, 2016, **16**(2): 04015048.
- [4] SAHEBKAR K, ESKANDARI-GHADI M. Displacement ring load Green's functions for saturated porous transversely isotropic tri-material full-space[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2017, **41**(3): 359-381.
- [5] WANG F, DING T, HAN X L, et al. Dynamic Green's functions for an anisotropic poroelastic half-space[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2020, **44**(6): 904-920.
- [6] LU J F, HANYGA A. Fundamental solution for a layered porous half space subject to a vertical point force or a point fluid source[J]. Computational Mechanics, 2005, **35**(5): 376-391.
- [7] BA Z, KANG Z, LEE V W. Plane strain dynamic responses of a multi-layered transversely isotropic saturated half-space[J]. Int J Eng Sci, 2017, **119**: 55-77.
- [8] CAI Y Q, CHEN Y, CAO Z G, et al. Dynamic responses of a saturated poroelastic half-space generated by a moving truck on the uneven pavement[J]. Soil Dynamics and Earthquake

- Engineering, 2015, **69**: 172-181.
- [9] LI Y C, FENG S J, CHEN H X, et al. Dynamic response of a stratified transversely isotropic half-space with a poroelastic interlayer due to a buried moving source[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, **82**: 45-71.
- [10] SCHANZ M, CHENG A D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column[J]. Acta Mechanica, 2000, **145**(1): 1-18.
- [11] SHAN Z D, LING D S, DING H J. Exact solutions for one-dimensional transient response of fluid-saturated porous media[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2011, **35**(4): 461-479.
- [12] 凌道盛, 房志辉, 单振东. 单层饱和和多孔介质一维瞬态响应半解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, **30**(8): 1683-1689. (LING Daosheng, FANG Zhihui, SHAN Zhendong. A semi-analytical solution for one-dimensional transient response of single layered saturated porous media[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, **30**(8): 1683-1689. (in Chinese))
- [13] SCHANZ M, CHENG A H D. Dynamic analysis of a one-dimensional poroviscoelastic column[J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, **68**(2): 192-198.
- [14] PISANÒ F, PASTOR M. 1D wave propagation in saturated viscous geomaterials: improvement and validation of a fractional step Taylor-Galerkin finite element algorithm[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, **200**(47/48): 3341-3357.
- [15] SHAN Z, JING L, LING D, DING H J. Exact solution for the 1D transient response of saturated single-layer poroviscoelastic media[J]. Computers and Geotechnics, 2014, **59**: 98-104.
- [16] SHAN Z D, LING D S, XIE Z N, et al. A semianalytical solution for one-dimensional transient wave propagation in a saturated single-layer porous medium with a fluid surface layer[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2019, **43**(13): 2184-2199.
- [17] SCHANZ M, DIEBELS S. A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems[J]. Acta Mechanica, 2003, **161**(3): 213-235.
- [18] SIMON B R, ZIENKIEWICZ O C, PAUL D K. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1984, **8**(4): 381-398.
- [19] ZIENKIEWICZ O C, CHANG C T, BETTESS P. Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils[J]. Géotechnique, 1980, **30**(4): 385-395.
- [20] 张飞霞. 一类单层饱和和多孔介质问题一维瞬态响应精确解[D]. 杭州: 浙江大学, 2010. (ZHANG Feixia. Exact Solutions for One-Dimensional Transient Response of Single-Layer Fluid-Saturated Porous Media[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2010. (in Chinese))
- [21] ZHONG W X, WILLIAMS F W. A precise time step integration method[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 1994, **208**(6): 427-430.
- [22] 单振东. 饱和与非饱和多孔介质一维问题精确解[D]. 杭州: 浙江大学, 2012. (SHAN Zhendong. Exact Solutions for One-Dimensional Problems of Saturated and Unsaturated Porous Media[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2012. (in Chinese))