

DOI: 10.11779/CJGE20211555

外荷载随时间变化下考虑起始电势梯度的一维电渗固结解析解

葛尚奇^{1,3}, 江文豪², 郑凌透^{3,1}, 谢新宇^{1,4}, 谢康和¹

(1. 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310058; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071;
3. 浙大宁波理工学院, 浙江 宁波 315100; 4. 浙江大学温州研究院, 浙江 温州 325035)

摘要: 将起始电势梯度的概念引入电渗固结理论, 基于相关假定建立了外荷载随时间变化下考虑有效电势衰减的一维电渗固结控制方程, 利用变量代换和分离变量法获得了电渗固结通解, 并给出了常见加荷形式下解析解的表达式。将退化解与已有解析解进行比较, 并将所提解与有限差分解展开对比, 验证了所提解答正确性。基于所提解析解, 分析了相关参数对软土地基电渗固结特性的影响。结果表明: 起始电势梯度的存在降低了超孔隙水压力绝对值和沉降量; 水力渗透系数的减小有利电渗排水固结过程的进行, 且电渗渗透系数与水力渗透系数比值越大, 沉降量越大、电渗排水固结效果越好; 当采用电渗联合堆载预压法加固时, 电渗作用可降低因外荷载引起的正超孔隙水压力的最大值, 提高固结排水时土体的稳定性。

关键词: 电渗; 起始电势梯度; 变荷载; 解析解; 固结

中图分类号: TU431

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)03-0580-10

作者简介: 葛尚奇(1995—), 男, 博士研究生, 主要从事软土固结和地基处理方面的研究。E-mail: geshangqi@zju.edu.cn。

Analytical solution for one-dimensional electroosmosis consolidation considering threshold potential gradient under time-dependent loading

GE Shangqi^{1,3}, JIANG Wenhao², ZHENG Lingwei^{3,1}, XIE Xinyu^{1,4}, XIE Kanghe¹

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 3. NingboTech University, Ningbo 315100, China; 4. Institute of Wenzhou, Zhejiang University, Wenzhou 325035, China)

Abstract: The concept of the threshold potential gradient is introduced into the electroosmosis consolidation theory. The governing equation for one-dimensional electroosmosis consolidation considering the effective potential attenuation with time-dependent loading is established based on the corresponding assumptions. The general analytical solutions for electroosmosis consolidation are obtained by the algebraic transformation and variable separation methods. Meanwhile, the expressions for the analytical solutions of electroosmosis consolidation under common loading patterns are given. The correctness of the proposed solutions is verified by comparing the degenerative analytical solutions in this study with the existing analytical solutions, combined with the comparison between the calculated results of the proposed solutions and the finite difference solutions. Based on the proposed analytical solutions, the effects of the related parameters on the electroosmosis consolidation characteristics of soft soils are analyzed. The results show that the existence of the threshold potential gradient reduces the absolute value of the excess pore water pressure and the settlement of soft soils. The decrease in hydraulic permeability coefficient is conducive to electroosmosis consolidation. The settlement of soft soils increases with the increasing ratio of electroosmosis permeability coefficient to hydraulic permeability coefficient, which leads to a better drainage and consolidation effect. When the soft soils are strengthened by the combined electroosmosis and surcharge preloading, the electroosmosis reduces the maximum value of the positive excess pore water pressure caused by time-dependent loading, which is helpful in improving the stability of soft soils during the consolidation process.

Key words: electroosmosis; threshold potential gradient; time-dependent loading; analytical solution; consolidation

基金项目: 国家自然科学基金项目(51378469, 51708497); 浙江省自然科学基金项目(LZ20E080001, LQ19E080009)

收稿日期: 2021-12-27

***通信作者** (E-mail: zhenglingwei@zju.edu.cn)

0 引言

电渗排水法可快速处理高含水率、低渗透性的细颗粒土, 具有排水速率快、易于施工, 工期短等特点, 常用于处理软黏土地基^[1-3]。在电渗过程中, 电场驱动孔隙水从阳极向阴极运移, 从而在较短时间内大幅降低土体的含水率, 提高土体的抗剪强度和黏聚力^[2-3]。此外, 电泳作用下带负电的土颗粒会向阳极移动, 从而增大阳极附近土体的密实度^[4]。近年来, 国内不断涌现将电渗排水法成功地应用于吹填淤泥地基处理的现场加固实例^[5-7], 大幅度缩短了地基处理工期。例如, Zhuang^[6]采用 EKG 电极材料对淤泥软土地基进行了现场电渗固结试验, 通过小功率直流电源集群结合轮询通电方法代替了大型直流电源, 该试验在降低能耗的同时取得了良好的处理效果。

在电渗固结理论方面, 1968 年, Esrig^[8]最早提出了电势差和水头差引起的渗流可叠加的电渗固结理论, 并被后来的学者广泛采用^[9-22]。Wan 等^[9]在此基础上进行了电渗联合堆载法的研究, 并探讨了电极反转的影响。Feldkamp 等^[10]开展了大变形电渗固结理论研究, 考虑了土体参数的变化, 并应用有限元和有限差分法对所得非线性偏微分方程进行求解。此后, 电渗固结理论向着电渗排水固结过程中土体固结参数的非线性变化^[11-13]、有效电势的衰减^[14-16]、联合堆载预压法^[11, 13, 17-19]、联合真空预压法^[15, 20-21]、二维电渗固结理论^[15, 22]等方向发展。

然而, 上述理论均忽略了起始电势梯度对电渗固结排水的影响。谢新宇等^[23]通过分析电渗试验过程中能耗系数随电势梯度的变化, 发现当电势梯度达到某一数值时才能发生电渗排水, 进而提出了起始电势梯度的概念。此外, 试验结果^[2]也表明, 由于电极接触电阻和土体电阻的存在, 低电势梯度下电渗排水量较小, 甚至出现了排水停滞的现象。忽略起始电势梯度会导致土体最终的计算沉降量偏大。因此, 有必要在现有理论的基础上考虑起始电势梯度的影响。

实际上, 电渗固结过程中因受到土体开裂和电极脱开等因素影响, 导致电渗排水效果变差, 电渗排水效果变差^[1]。堆载预压法是软土地基常用的加固处理方式, 联合电渗可明显改善以上问题^[11], 电渗联合堆载预压处理还可加快土体超孔隙水压力的消散^[18], 因此电渗与堆载预压法可实现优势互补, 提高软土地基排水固结效率^[19]。然而, 在电渗联合堆载预压的固结理论方面, 由于施工采取的堆载加荷方式多样, 如瞬时加荷、线性加荷以及多级线性加荷等^[21], 而现有电渗联合堆载预压法的固结理论中大多未考虑外荷

载的变化对固结过程的影响。因此, 有必要在已有研究的基础进一步提出外荷载随时间变化下的电渗固结解析解。

针对上述研究情况, 本文基于 Esrig 等所提出的电渗固结理论中的相关假设^[8, 15], 通过两次变量代换和分离变量法求得了变荷载作用下考虑起始电势梯度的一维电渗固结通解, 并给出了常见加荷形式下解析解的表达式。随后, 通过将本文退化解分别与已有电渗固结和堆载固结下的解析解展开对比, 并将所提解析解与有限差分解的计算结果进行比较, 验证了本文解答的正确性。最后, 基于所提解析解, 分析了相关参数变化对软土地基电渗排水固结过程的影响。

1 电渗固结理论推导

1.1 模型提出

图 1 为外荷载随时间变化下考虑起始电势梯度时的电渗固结计算简图。在图 1 中, 土体厚度为 L , i_{e0} 为起始电势梯度, V_0 为出现电渗排水的起始电压, $q(t)$ 为随时间 t 变化的外荷载, u 为超孔隙水压力, z 为向下的竖向坐标。土体的顶部边界接直流电源阴极, 为透水边界, 底部边界接直流电源阳极, 为不透水边界。在电场的作用下, 电渗排水方向自下而上; 当不考虑外荷载时, 电渗会导致土体产生负超孔隙水压力, 从而引发自上而下的水力渗流^[10-11]。

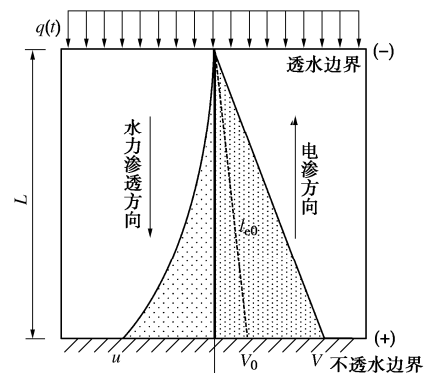


图 1 电渗固结模型

Fig. 1 Electroosmosis consolidation model

1.2 基本假定

为推导外荷载随时间变化下考虑起始电势梯度时土体一维电渗固结解析解, 作如下假设^[8, 15, 23]: ①土体是均质、各向同性的, 且始终处于饱和状态; ②土颗粒和孔隙水本身的压缩量忽略不计, 即土体的变形是由于孔隙水的排出所引起; ③水力渗流符合 Darcy 渗流; ④水力梯度和电势梯度引起的孔隙水渗流可以叠加; ⑤土体渗透性和电渗透性保持不变; ⑥不考虑电化学反应、温度差、浓度差引起的孔隙水渗流。

1.3 电渗固结模型建立

基于 Esrig 一维电渗固结理论的假设, 土体中向

上的渗流速率为

$$v = k_v \frac{\partial H}{\partial z} + k_e \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1)$$

式中: H 为水力水头, V 为有效电压, v 为向上的渗流速率, k_v 为水力渗透系数, k_e 为电渗透系数。

参考考虑起始水力梯度时渗流速度的表达式, 并根据文献[23]给出的考虑起始电势梯度时的渗流公式, 当考虑起始电势梯度影响时, 土体向上的渗流速率 v 可写为^[24-25]

$$v = k_e \left(\frac{\partial V}{\partial z} - i_{e0} \right) + \frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2)$$

式中: u 为超孔隙水压力; γ_w 为水的重度。

考虑到起始电势梯度一般较小, 这里假定土体中的有效电势梯度大于起始电势梯度, 即 $i_e > i_{e0}$ 。因此, v 的表达式可进一步写为

$$v = \frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial z} \left(u + \frac{k_e \gamma_w}{k_v} V \right) - k_e i_{e0} \quad (3)$$

根据土体小变形固结理论相关假设^[8], 有

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = m_v \frac{\partial u}{\partial t} - m_v \frac{dq}{dt} \quad (4)$$

式中: $q(0) = q_0$, q_0 为初始时刻施加的外荷载; m_v 为土的体积压缩系数。

令 $\xi(z, t) = u + \frac{k_e \gamma_w}{k_v} V$, 将式 (3) 和式 (4) 相结合:

$$C_v \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{k_e \gamma_w}{k_v} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{dq}{dt} \quad (5)$$

式中: $C_v = k_v / (m_v \gamma_w)$; C_v 为土体固结系数。

根据王柳江等^[15]总结的有效电压衰减规律, 可假设电势梯度随时间的变化关系为

$$V(z, t) = \frac{z}{L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] \quad (6)$$

式中: $V(z, t)$ 为电渗过程中的有效电压函数; ϕ_a 为初始有效电压; ϕ_r 为衰减后的残余有效电压; b 为有效电压随时间衰减系数^[15]。

对式 (6) 求导, 可得

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{(\phi_a - \phi_r)b}{L} z \exp(-bt) \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (5), 得

$$C_v \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\partial \xi}{\partial t} - f(t) \quad (8)$$

式中: $f(t) = -Dz \exp(-bt) + \frac{dq}{dt}$, $D = \frac{k_e \gamma_w b (\phi_a - \phi_r)}{k_v L}$,

$f(t)$ 为反映外荷载随时间变化和有效电势发生衰减的函数。

式 (8) 即为外荷载随时间变化下考虑起始电势梯

度时土体一维电渗固结的控制方程。

1.4 初始条件和边界条件

初始条件:

$$\xi(z, 0) = \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} \phi_a + q_0 \quad (9)$$

考虑到土体的顶部为排水边界条件, 土体中的超孔隙水压力会瞬时消散, 且顶部的有效电势为 0, 则

$$\xi|_{z=0} = u|_{z=0} + \frac{k_e \gamma_w}{k_v} V|_{z=0} = 0 \quad (10)$$

考虑到土体的底部为不排水边界条件, 则底部的渗流速率 v 为 0。因此, 底部边界条件可写为

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} \Big|_{z=L} = i_0 \gamma_w \quad (11)$$

式中: $i_0 = \frac{k_e}{k_v} i_{e0}$, i_0 为电渗过程中起始电势梯度引起的等效起始水力梯度。

1.5 电渗固结控制方程通解

令 $w(z, t) = \xi - i_0 \gamma_w z$, 控制方程式 (8) 可改写为

$$C_v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial w}{\partial t} - f(t) \quad (12)$$

此时, 初始条件可改写为

$$w(z, 0) = \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} \phi_a + q_0 - i_0 \gamma_w z = \gamma_w z \left(\frac{k_e \phi_a}{k_v L} - i_0 \right) + q_0 \quad (13)$$

顶部边界条件为

$$w|_{z=0} = \xi|_{z=0} - i_0 \gamma_w z|_{z=0} = 0 \quad (14)$$

底部边界条件为

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0 \quad (15)$$

根据顶部和底部的边界条件和相关求解方法^[24], 这里可采用分离变量法, 假定 $w(z, t)$ 的表达式为

$$w(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \sin \frac{Mz}{L} \quad (16)$$

式中: $M = (2m-1)\pi/2$, $m=1, 2, 3, \dots$ 。

根据傅立叶正弦函数级数变换, 有

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \frac{Mz}{L} \quad (0 \leq z \leq L) \quad (17)$$

引入 $\beta_m = C_v M^2 / L^2$ 。根据式 (17), 将式 (16)

代入控制方程式 (12), 整理可得

$$-\beta_m T_m(t) = T'_m(t) + \frac{2DL \sin M}{M^2} \exp(-bt) - \frac{2}{M} \frac{dq}{dt} \quad (18)$$

根据式 (18), $T_m(t)$ 的通解可写为

$$T_m(t) = \exp(-\beta_m t) \left[C_m - \int_0^t \frac{2DL \sin M}{M^2} \exp(\beta_m \tau) \cdot \right.$$

$$\exp(-b\tau)d\tau + \frac{2}{M} \int_0^t \exp(\beta_m \tau) \frac{dq}{d\tau} d\tau \quad (19)$$

式中: C_m 为与 m 相关的待定系数。

进一步, 将式 (19) 的代入式 (16), 可得

$$w(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin \frac{Mz}{L} \exp(-\beta_m t) \cdot \left[C_m + \frac{2}{M} \int_0^t \exp(\beta_m \tau) \frac{dq}{d\tau} d\tau - \int_0^t D \frac{2L \sin M}{M^2} \exp(\beta_m \tau) \exp(-b\tau) d\tau \right] \right\} \quad (20)$$

根据初始条件式 (13), 可确定 C_m 的表达式为

$$C_m = \frac{2L\gamma_w \sin M}{M^2} \left(\frac{k_e \phi_a}{k_v H} - i_0 \right) + \frac{2q_0}{M} \quad (21)$$

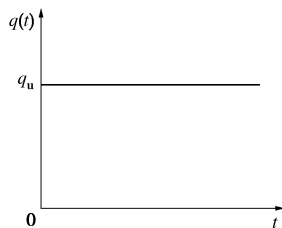
通过式 (20) 和 $w(z, t) = \xi - i_0 \gamma_w z$, 可得超孔隙水压力 u 的表达式为

$$u = i_0 \gamma_w z - \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] + \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \left[C_m \exp(-\beta_m t) + \frac{2 \exp(-\beta_m t)}{M} \int_0^t \exp(\beta_m \tau) \frac{dq}{d\tau} d\tau - \frac{2DL \sin M}{M^2} \frac{[\exp(-bt) - \exp(-\beta_m t)]}{\beta_m - b} \right] \quad (22)$$

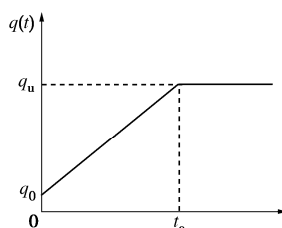
式 (22) 即为外荷载随时间变化下考虑起始电势梯度时土体一维电渗固结的通解。当外荷载 $q(t)$ 的形式确定后, 代入相应的方程式即可得到不同荷载形式下土体电渗固结的解析解。

2 常见加荷形式下固结解析解的表达式

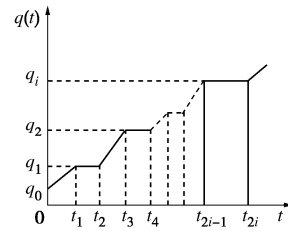
出于实用性考虑, 针对软土地基处理中最常见的瞬时加荷、线性加荷以及分级线性加荷形式, 本文分别给出了一维电渗固结的解析解^[11, 18-19], 图 2 为 3 种加荷形式下的示意图, q_u 表示最终的外荷载。



(a) 瞬时加荷形式



(b) 线性加荷形式



(c) 多级线性加荷形式

图 2 几种常见的加荷形式

Fig. 2 Several common loading patterns

2.1 瞬时加荷形式

对于瞬时加荷形式, 即当 $q_0 = q_u$ 时, 超孔隙水压力 u 的表达式为

$$u = i_0 \gamma_w z - \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] + \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \left\{ C_m \exp(-\beta_m t) - \frac{2DL \sin M}{M^2} \frac{[\exp(-bt) - \exp(-\beta_m t)]}{\beta_m - b} \right\} \quad (23)$$

2.2 线性加荷形式

对于线性加荷形式, 外荷载 $q(t)$ 的变化形式为

$$q(t) = \begin{cases} q_0 + \frac{(q_u - q_0)t}{t_c} & (t \leq t_c) \\ q_u & (t > t_c) \end{cases} \quad (24)$$

式中: t_c 为线性加荷时间。

将式 (24) 代入式 (22), 当 $0 \leq t \leq t_c$ 时, 有

$$u = i_0 \gamma_w z - \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] + \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \left\{ C_m \exp(-\beta_m t) + \frac{2(q_u - q_0)}{M \beta_m t_c} [1 - \exp(-\beta_m t)] - \frac{2DL \sin M}{M^2} \frac{[\exp(-bt) - \exp(-\beta_m t)]}{\beta_m - b} \right\} \quad (25)$$

当 $t > t_c$ 时, 有

$$u = i_0 \gamma_w z - \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] + \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \left\{ C_m \exp(-\beta_m t) + \frac{2(q_u - q_0)}{M \beta_m t_c} \{ \exp[\beta_m(t_c - t)] - \exp(-\beta_m t) \} - \frac{2DL \sin M}{M^2} \frac{[\exp(-bt) - \exp(-\beta_m t)]}{\beta_m - b} \right\} \quad (26)$$

2.3 多级线性加荷形式

对于多级线性加荷形式, 外荷载 $q(t)$ 的形式为

$$q(t) = \begin{cases} q_{i-1} + b_i(t - t_{2i-2}) & (t_{2i-2} \leq t < t_{2i-1}) \\ q_i & (t_{2i-1} \leq t < t_{2i}) \end{cases}, \quad (27)$$

当 $t_{2i-2} \leq t < t_{2i-1}$ 时, 有

$$u = i_0 \gamma_w z - \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \left\{ C_m \exp(-\beta_m t) + \frac{2 \exp(-\beta_m t)}{\beta_m M} \cdot \right. \\ \left. \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \{ b_{j-1} \{ \exp(\beta_m t_{2j-1}) - \exp(\beta_m t_{2j-2}) \} \} + \right. \right. \\ \left. \left. b_j \{ \exp(\beta_m t) - \exp(\beta_m t_{2j-2}) \} \right\} - \right. \\ \left. \frac{2DL \sin M}{M^2} \frac{[\exp(-bt) - \exp(-\beta_m t)]}{\beta_m - b} \right\}, \quad (28)$$

当 $t_{2i-1} \leq t < t_{2i}$ 时, 有

$$u = i_0 \gamma_w z - \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \left\{ C_m \exp(-\beta_m t) + \frac{2 \exp(-\beta_m t)}{\beta_m M} \cdot \right. \\ \left. \sum_{j=1}^i \{ b_j \{ \exp(\beta_m t_{2j-1}) - \exp(\beta_m t_{2j-2}) \} \} - \right. \\ \left. \frac{2DL \sin M}{M^2} \frac{[\exp(-bt) - \exp(-\beta_m t)]}{\beta_m - b} \right\}. \quad (29)$$

2.4 以沉降定义的固结度

根据王柳江等^[15]和黄鹏华等^[21]的研究, 当考虑有效电势衰减时(式(6)), 土体中的最大负孔隙水压力值可能出现在电渗过程中, 而非在最终时刻。这会导致土体有效应力在固结过程中可能出现先增加后降低的情况, 因而导致土体回弹变形。但由于回弹变形量远小于土体的沉降变形量, 这里忽略有效电势衰减而导致的回弹变形^[21]。因此, 土体沉降量和按沉降量定义的固结度表达式分别为

$$S(t) = m_v L \Delta \sigma' = m_v \int_0^L [q(t) - u] dz, \quad (30)$$

$$U_s = \frac{S(t)}{S(t_{\max})} = \frac{m_v \int_0^L \Delta \sigma' dz}{m_v \int_0^L \Delta \sigma' \Big|_{t=t_{\max}} dz}, \quad (31)$$

式中: $S(t)$ 为任意 t 时刻沉降量; $S(t_{\max})$ 为电渗过程中土体的最大沉降量; U_s 为按沉降量定义的固结度。

3 解析解的验证

3.1 与已有电渗固结解析解的比较

当式(23)中起始电势梯度 i_0 为 0, 且不考虑有效电压衰减和外荷载作用时, 本文所提解析解退化为传统的一维小变形电渗固结解析解:

(1) 当 $i_0 = 0$, $q(t) = 0$ 时:

$$u = -\frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] + \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \exp(-\beta_m t) \frac{2L \sin M}{M^2} \cdot \\ \left\{ \frac{\gamma_w k_e \phi_a}{k_v L} - \frac{D[\exp(\beta_m - b)t - 1]}{(\beta_m - b)} \right\}, \quad (32)$$

$$S(t) = m_v L \int_0^H \left\{ \frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} [(\phi_a - \phi_r) \exp(-bt) + \phi_r] - \right. \\ \left. \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin \frac{Mz}{L} \exp(-\beta_m t) \frac{2L \sin M}{M^2} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ \frac{\gamma_w k_e \phi_a}{k_v L} - \frac{D[\exp(\beta_m - b)t - 1]}{(\beta_m - b)} \right\} \right\} dz \right\}. \quad (33)$$

(2) 当 $b \rightarrow 0$ 时, $\exp(-bt) = 1$, $D = 0$, 则:

$$u = -\frac{k_e \gamma_w z}{k_v L} \phi_a + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sin \frac{Mz}{L} \exp(-\beta_m t) \times \frac{2 \sin M}{M^2} \frac{\gamma_w k_e \phi_a}{k_v} \right\}, \quad (34)$$

$$S(t) = m_v L^2 \frac{k_e \gamma_w}{2k_v} \phi_a \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin M}{M^3} \exp(-\beta_m t) \right], \quad (35)$$

$$S(\infty) = m_v L^2 \frac{k_e \gamma_w}{2k_v} \phi_a, \quad (36)$$

$$U(t) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin M}{M^3} \exp(-C_v \frac{M^2}{L^2} t). \quad (37)$$

式中: $S(\infty)$ 为最终时刻沉降量; $U(t)$ 为固结度随时间变化函数; $M = (2m-1)\pi/2$; $\beta_m = C_v M^2 / L^2$ 。

Esrig^[8]提出的小变形电渗固结解析解表达式为

$$u = -\frac{k_e}{k_v} \gamma_w V_{(x)} + \frac{2k_e \gamma_w V_m}{k_v \pi^2} \cdot \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \sin \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x}{L} \times \left\{ \exp \left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 T_v \right] \right\} \right\}, \quad (38)$$

$$\bar{U} = 1 - \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^3} \exp \left[-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 T_v \right]. \quad (39)$$

式中: $V_{(x)}$ 为 x 位置处的电压; V_m 为最大电压; T_v 为时间因数; $T_v = C_v t / L^2$; \bar{U} 为平均固结度。表达式

(34), (37) 与 Esrig^[8]所提解析解的表达式(38), (39) 完全一致, 这一定程度上验证了本文解答的合理性。

3.2 与已有一维堆载固结解析解的比较

当式(25), (26)中不考虑电渗作用时, 本文所提解析解退化为线性加荷情况下的固结解析解, 此时:

(1) 当 $0 \leq t \leq t_c$, $q_0 = 0$ 时:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \left\{ \frac{2q_u}{M \beta_m t_c} [1 - \exp(-\beta_m t)] \right\}, \quad (40)$$

$$U(t) = \frac{t}{t_c} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{M^2 \beta_m t_c} [1 - \exp(-\beta_m t)]. \quad (41)$$

(2) 当 $t > t_c$, $q_0 = 0$ 时:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{Mz}{L} \left\{ \frac{2q_u}{M \beta_m t_c} \{ \exp[\beta_m (t_c - t)] - \exp(-\beta_m t) \} \right\}, \quad (42)$$

$$U(t)=1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M^2\beta_mt_c}[\exp[\beta_m(t_c-t)]-\exp(-\beta_mt)]。(43)$$

Tang 等^[26]所提线性加荷固结解析解为

(1) 当 $0\leq t\leq t_1$ 时

$$u=\frac{q_u}{t_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m}\frac{2}{M}\sin\frac{Mz}{H}\{1-\exp(-\alpha_mt)\} \quad , \quad (44)$$

$$U(t)=\frac{t}{t_1}-\frac{1}{t_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m}\frac{2}{M^2}[1-\exp(-\alpha_mt)] \quad 。 \quad (45)$$

(2) 当 $t>t_1$ 时

$$u=\frac{q_u}{t_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m}\frac{2}{M}\sin\frac{Mz}{H}\{\exp[\alpha_m(t_1-t)]-\exp(-\alpha_mt)\} \quad , \quad (46)$$

$$U(t)=1-\frac{1}{t_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m}\frac{2}{M^2}[\exp[\alpha_m(t_1-t)]-\exp(-\alpha_mt)]。(47)$$

式中: $M=(2m+1)\pi/2$, $m=0,1,2,\cdots$; H 为土体厚度; t_1 为线性加荷时间; $\alpha_m=k_vM^2/(m_v\gamma_wH^2)$ 。

通过对比可以发现, 表达式 (40) ~ (43) 与 Tang 等^[26]所提线性加荷固结解析解的表达式 (44) ~ (47) 完全一致, 进一步验证了本文解答的合理性。

3.3 与有限差分解的比较

为进一步验证本文所提解析解的正确性, 利用相应的初始条件和边界条件 (式 (13) ~ (15)), 本文对固结控制方程式 (12) 进行 Crank-Nicholson 型隐式有限差分并通过 MATLAB 求解计算^[27], 然后将本文解析解与有限差分解的计算结果进行对比。这里以线性加荷的形式为例展开计算, 从而验证所求电渗固结通解的正确性, 计算参数的取值如表 1 所示^[1, 15, 18, 23]。

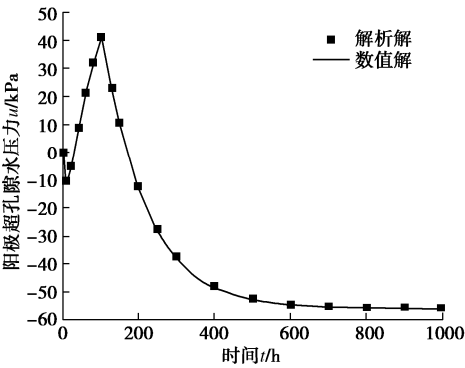
图 3 (a) ~ (c) 给出了阳极处超孔隙水压力 u 随时间变化、 u 随距离阴极距离变化和固结度 U_s 随时间变化的关系曲线。所提解析解和有限差分解计算结果均十分吻合, 这进一步验证了本文解答的正确性。

表 1 软土地基的计算参数

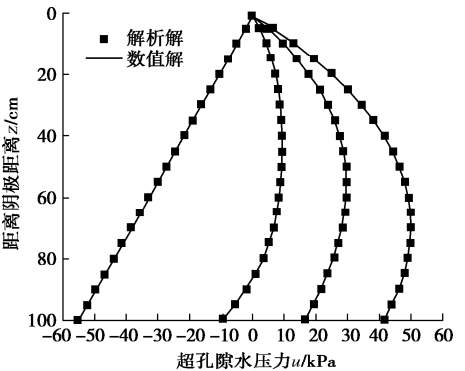
Table 1 Parameters of soft soils			
参数	取值	参数	取值
土体厚度 H/m	1.0	固结系数 $C_v/(\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})$	9.68×10^{-7}
初始电渗透系数 $k_{e0}/(\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{V}^{-1})$	1.2×10^{-9}	起始电势梯度 $i_{e0}/(\text{V}\cdot\text{m}^{-1})$	5.0
初始水力渗透系数 $k_{v0}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	9.5×10^{-9}	q_0/kPa	0
有效电压随时间衰减系数 b/h^{-1}	2.0×10^{-5}	q_u/kPa	100
初始有效电压 ϕ_0/V	100.0	t_c/h	100
残余有效电压 ϕ_r/V	50.0		

4 固结性状分析

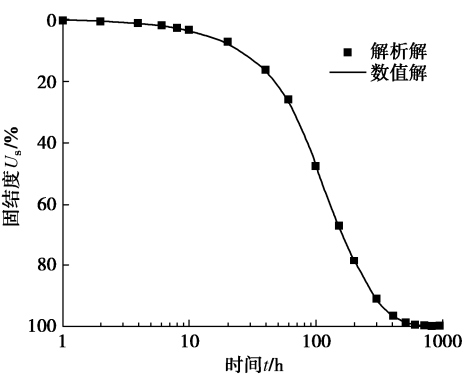
为研究变荷载作用下考虑起始电势梯度时软土地基的电渗固结特性, 本文分析了不同参数对孔隙水压



(a) 阳极超孔隙水压力随时间变化



(b) 超孔隙水压力随距离阴极距离变化



(c) 固结度随时间变化

图 3 本文解析解与有限差分解比较

Fig. 3 Comparison between proposed analytical and finite difference solutions

力、沉降量和固结度的影响, 参数取值见表 1。由于起始电势梯度相关电渗固结理论研究尚未开展, 而外荷载对电渗固结过程的影响已有相关研究^[11, 13, 17-19]。因此, 首先探究起始电势梯度对电渗固结特性的影响。

4.1 起始电势梯度对电渗固结特性的影响

为便于分析不同起始电势梯度 i_{e0} 下软土地基的电渗固结特性, 本文在不考虑外荷载情况下, 给出了起始电势梯度 i_{e0} 对阳极处超孔隙水压力 u 的影响曲线, 如图 4 所示。需说明的是, 本文是在谢新宇等^[23]试验测得 $i_{e0}=5.7\text{ V/m}$ 基础上开展的起始电势梯度研究。从图 4 可知, 电渗过程中产生了负的超孔隙水压力, 这与文献^[11~13]研究结果一致。随着起始电势梯度 i_{e0} 的增加, 超孔隙水压力 u 的绝对值逐渐降低,

超孔隙水压力 u 在前 200 h 变化较快, 之后逐渐趋于稳定。

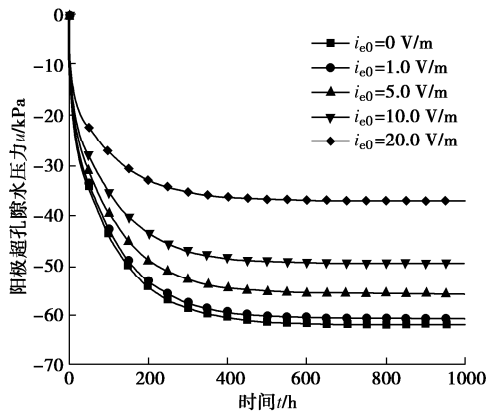


图 4 起始电势梯度对超孔隙水压力的影响

Fig. 4 Effects of threshold potential gradient on excess pore water pressure

图 5 描述了不考虑外荷载时, 不同起始电势梯度 i_{e0} 下软土地基中沉降量 $S(t)$ 和固结度 U_s 随时间的变化, 沉降量 $S(t)$ 也可反映电渗排水量的变化。随着起始电势梯度 i_{e0} 的增加, 沉降量 $S(t)$ 逐渐降低, 固结完成所需时间逐渐缩短, 但不同起始电势梯度 i_{e0} 下固结度曲线的差异较小。土体的电渗排水固结过程主要发生在前 200 h, 这与图 4 中超孔隙水压力 u 的变化规律一致。此外, 相比不考虑起始电势梯度情况下 ($i_{e0} = 0 \text{ V/m}$) 沉降量 $S(t)$, $i_{e0} = 20.0 \text{ V/m}$ 时沉降量 $S(t)$ 降低了约 39.9%, 这与谢新宇等^[23]试验所得规律一致, 也说明了起始电势梯度 i_{e0} 不利于电渗固结过程的进行。因此, 电渗排水法适用于处理低起始电势梯度 i_{e0} 的土体。

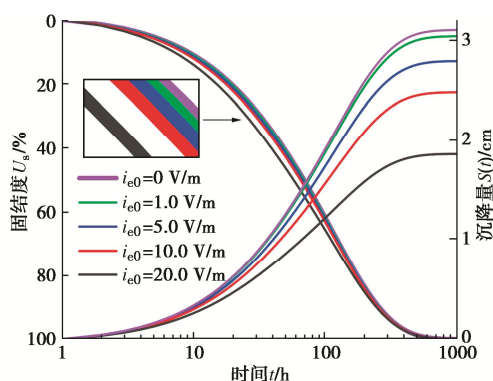


图 5 起始电势梯度对固结度的影响

Fig. 5 Effects of threshold potential gradient on degree of consolidation

4.2 电渗透系数和水力渗透系数比值对电渗固结特性的影响

式 (22) 中, 电渗透系数和水力渗透系数以比值的形式 (即 k_e/k_v) 存在。因此, 图 6 给出了不考虑外荷载情况下 k_e/k_v 对阳极处超孔隙水压力 u 的影响

曲线, 其中 k_e 保持不变, 这是由于文献[1, 28, 29]指出电渗透系数 k_e 受电势梯度和有效应力的影响较小, 而水力渗透系数 k_v 则会在固结过程中发生较大变化。从图 6 可知, 随着 k_e/k_v 增加, 超孔隙水压力 u 的绝对值逐渐增加; 水力渗透系数 k_v 越小, u 的绝对值越大。

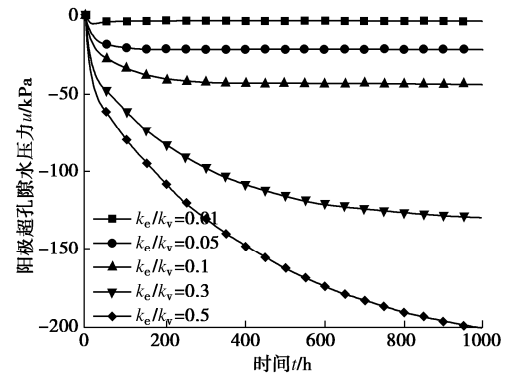


图 6 电渗透系数和水力渗透系数比值对超孔隙水压力的影响

Fig. 6 Effects of ratio of electric permeability coefficient to hydraulic permeability coefficient on excess pore water pressure

图 7 为不考虑外荷载情况下 k_e/k_v 对软土地基中沉降量 $S(t)$ 和固结度 U_s 的影响曲线。随着 k_e/k_v 的增加, 沉降量 (即电渗排水量) 逐渐增大, 但固结完成所需时间逐渐变长。此外, 水力渗透系数 k_v 越小, 沉降量 $S(t)$ 越大。结合图 6, 7 可知, 不同于外加荷载下土体的固结排水过程, 对于电渗排水固结过程, 水力渗透系数 k_v 的减小反而有利电渗排水固结过程的进行, 且 k_e/k_v 越大, 电渗排水效果越好。这是由于电渗过程中会产生负的孔隙水压力, 该孔隙水压力产生的水力渗流方向与电场驱动的电渗方向相反, 如图 1。因而, 水力渗透系数 k_v 越小, 水力渗流对电渗的阻碍作用反而越小, 越有利于土体的电渗排水固结。因此, 电渗排水法更适用于低渗透性软土^[1-2, 23, 29]。

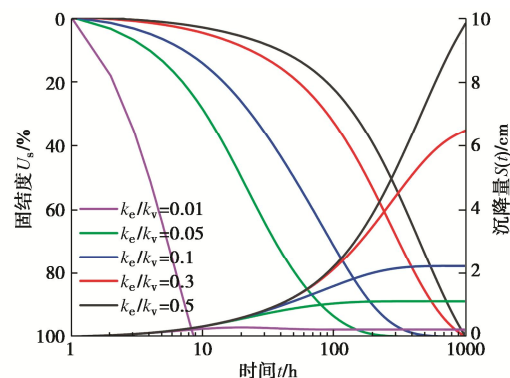


图 7 电渗透系数和水力渗透系数比值对固结度的影响

Fig. 7 Effects of ratio of electric permeability coefficient to hydraulic permeability coefficient on degree of consolidation

4.3 残余电压对电渗固结特性的影响

图 8 给出了不考虑外荷载情况下残余电压 ϕ_r 对超

孔隙水压力 u 的影响曲线。随着残余电压 ϕ_r 的增加, 超孔隙水压力 u 的绝对值逐渐增大, 这表明在电渗过程中, 有效电势的提高有利电渗固结的进行。

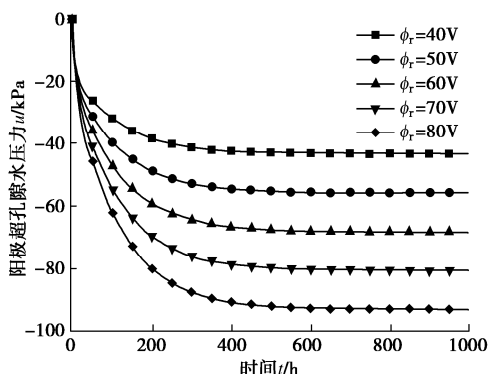


图8 残余电压对超孔隙水压力的影响

Fig. 8 Effects of residual voltage on excess pore water pressure

从图9中可以看出, 随着残余电压 ϕ_r 的增加, 沉降量 $S(t)$ 逐渐增大, 固结完成所需时间逐渐变长, 这与图8中超孔隙水压力 u 的变化规律一致。若定义土体达到80%固结度 U_s 所需要的固结时间为 t_{80} , 相比于 $\phi_r = 40\text{ V}$ 情况下的固结时间 t_{80} , $\phi_r = 80\text{ V}$ 时的固结时间 t_{80} 延长了约16.7%。当残余电压从40 V 提高到80 V 时, 土体最终沉降量 $S(t)$ 提高约114.3%。在实际电渗试验和施工过程中, 应尽量通过降低电极腐蚀速率、提高土体密实度等方法^[1-4, 23, 29], 从而提高土体中的有效电势, 以增加电渗固结过程的沉降量^[23]。

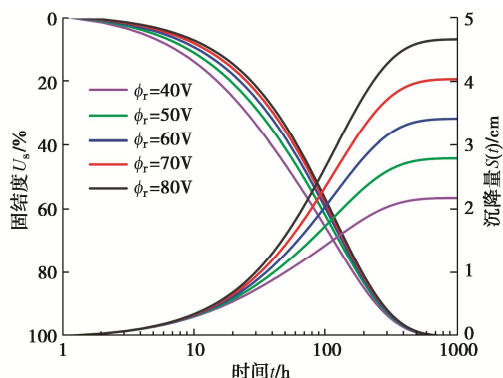


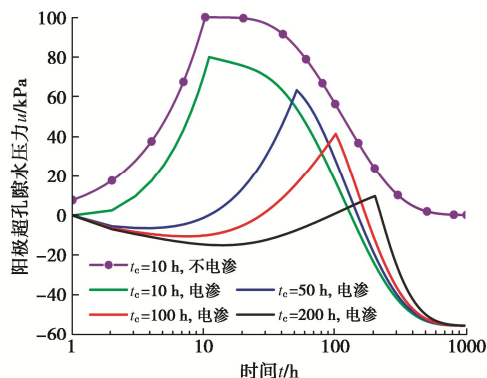
图9 残余电压对固结度的影响

Fig. 9 Effects of residual voltage on degree of consolidation

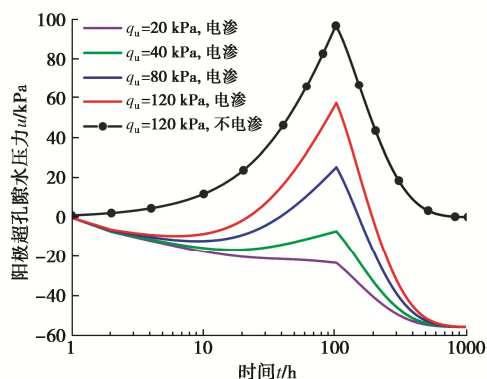
4.4 外荷载对电渗固结特性的影响

为认识外荷载随时间变化下软土地基的电渗固结特性, 本文以线性加荷为例, 图10, 11给出了线性加荷时间 t_c 和最终荷载 q_u 对电渗固结特性的影响曲线。从图10可知, 相比于不考虑电渗时, 电渗作用降低了任意时刻土体中的超孔隙水压力 u , 并降低了因外荷载引起的正超孔隙水压力 u 的最大值, 因而有助于提高固结排水时土体的稳定性。此外, 线性加荷时间 t_c 越长, 堆载引起的超孔隙水压力 u 越低; 最终荷载 q_u 越小, 土体中产生的最大超孔隙水压力 u 越

小, 且电渗对超孔隙水压力的影响越明显, 如当 $q_u = 20\text{ kPa}$ 时, 土体中的超孔隙水压力始终小于0。



(a) 加荷时间对超孔隙水压力的影响

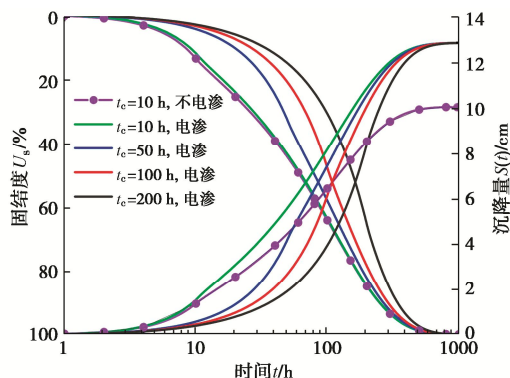


(b) 最终荷载对超孔隙水压力的影响

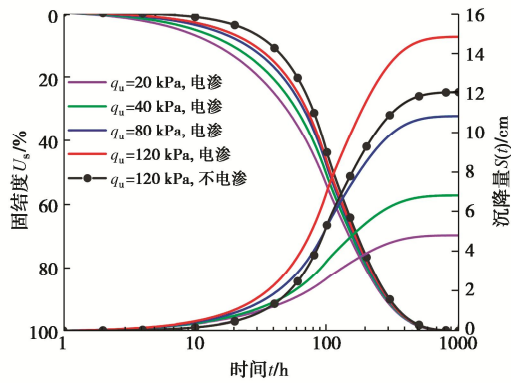
图10 变荷载对超孔隙水压力的影响

Fig. 10 Effects of time-dependent loading on excess pore water pressure

从图11中可以看出, 电渗的存在增大了软土地基沉降量 $S(t)$ 。此外, 从图11(a)中可以发现, 线性加荷时间 t_c 越短, 土体固结速率越快, 但最终沉降量相同。当考虑电渗作用时, 相比于 $t_c = 10\text{ h}$ 情况下的固结时间 t_{80} , $t_c = 200\text{ h}$ 时的固结时间 t_{80} 延长了约54.1%。从图11(b)中可以看出, 随着最终荷载 q_u 的增加, 沉降量 $S(t)$ 不断增大, 固结完成所需时间逐渐变长。因此, 采用电渗联合堆载法处理软土地基有利于降低固结排水时土体中的超孔隙水压力, 从而提高土体稳定性、增大沉降量。此外, 当采用线性加荷时, 缩短线性加荷时间有助于土体的快速固结。



(a) 加荷时间对固结度的影响



(b) 最终荷载对固结度的影响
图 11 变荷载对固结度的影响

Fig. 11 Effects of time-dependent loading on degree of consolidation

5 结 论

本文针对电渗处理土体时存在起始电势梯度的问题,将起始电势梯度概念引入电渗固结理论,求解得到了外荷载随时间变化下电渗固结通解,并给出了常见加荷形式下解析解表达式。随后,通过多种方法验证了本文解答正确性。最后,基于所提解析解,对软土地基电渗固结特性展开分析,得到以下 4 点结论。

(1) 起始电势梯度的存在会降低软土地基沉降量(排水量),但在一定程度上可缩短固结完成所需的时间。相对于不考虑起始电势梯度情况下的沉降量, $i_{e0} = 20.0 \text{ V/m}$ 时软土地基沉降量降低了约 39.9%。

(2) 电渗透系数与水力渗透系数之比越大,软土地基沉降量越大;水力渗透系数的减小反而有利电渗排水固结过程的进行,这从理论角度解释了电渗排水法处理低渗透性、细颗粒土具有较好效果。

(3) 残余电压越大,土体中有效电势越高,越有利于电渗排水固结。因此,在电渗试验和施工过程中,要尽量减少有效电压的损耗、提高土体中的有效电势。

(4) 在采用电渗-堆载联合排水法时,电渗的存在降低了任意时刻土体中的超孔隙水压力,并使得因外荷载引起的正超孔隙水压力的最大值减小,因而有助于提高固结排水时土体的稳定性,并增大软土地基沉降量。

参考文献:

[1] 郑凌透, 谢新宇, 谢康和, 等. 电渗法加固地基试验及应用研究进展[J]. 浙江大学学报(工学版), 2017, **51**(6): 1064-1073. (ZHENG Lingwei, XIE Xinyu, XIE Kanghe, et al. Test and application research advance on foundation reinforcement by electro-osmosis method[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2017, **51**(6): 1064-1073. (in Chinese))

[2] GE S Q, ZANG J C, WANG Y C, et al. Combined stabilization/solidification and electroosmosis treatments for dredged marine silt[J]. Marine Georesources & Geotechnology, 2021, **39**(10): 1157-1166.

[3] OU C Y, CHIEN S C, SYUE Y T, et al. A novel electroosmotic chemical treatment for improving the clay strength throughout the entire region[J]. Applied Clay Science, 2018, **153**: 161-171.

[4] 刘飞禹, 张志鹏, 王 军, 等. 分级真空预压联合间歇电渗法加固疏浚淤泥宏观分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2020, **39**(9): 1893 - 1901. (LIU Feiyu, ZHANG Zhipeng, WANG Jun, et al. Macro and micro analyses of stepped vacuum preloading combined with intermittent electroosmosis for dredger slurry[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2020, **39**(9): 1893 - 1901. (in Chinese))

[5] LIU H L, CUI Y L, SHEN Y, et al. A new method of combination of electroosmosis, vacuum and surcharge preloading for soft ground improvement[J]. China Ocean Engineering, 2014, **28**(4): 511-528.

[6] ZHUANG Y F. Large scale soft ground consolidation using electrokinetic geosynthetics[J]. Geotextiles and Geomembranes, 2021, **49**(3): 757-770.

[7] GAN Q Y, ZHOU J, LI C Y, et al. Vacuum preloading combined with electroosmotic dewatering of dredger fill using the vertical-layered power technology of a novel tubular electrokinetic geosynthetics: test and numerical simulation[J]. International Journal of Geomechanics, 2022, **22**(1): 05021004.

[8] ESRIG M I. Pore pressures, consolidation, and electrokinetics[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1968, **94**(4): 899-921.

[9] WAN T Y, MITCHELL J K. Electro-osmotic consolidation of soils[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1976, **102**(5): 473-491.

[10] FELDKAMP J R, BELHOMME G M. Large-strain electrokinetic consolidation: theory and experiment in one dimension[J]. Géotechnique, 1990, **40**(4): 557-568.

[11] 王柳江, 刘斯宏, 王子健, 等. 堆载-电渗联合作用下的一维非线性大变形固结理论[J]. 工程力学, 2013, **30**(12): 91-98. (WANG Liujang, LIU Sihong, WANG Zijian, et al. A consolidation theory for one-dimensional large deformation problems under combined action of load and electroosmosis[J]. Engineering Mechanics, 2013, **30**(12): 91-98. (in Chinese))

[12] WU H, HU L M, QI W G, et al. Analytical solution for electroosmotic consolidation considering nonlinear variation

- of soil parameters[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2017, **17**(5): 06016032.
- [13] DENG A, ZHOU Y D. Modeling electroosmosis and surcharge preloading consolidation. I: model formulation[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2016, **142**(4): 04015093.
- [14] 杨晓宇, 董建华. 考虑有效电势衰减的一维电渗固结多态继承计算方法[J]. *岩石力学与工程学报*, 2020, **39**(12): 2530-2539. (YANG Xiaoyu, DONG Jianhua. A polymorphic inheritance calculation method of one-dimensional electro-osmotic consolidation considering effective potential attenuation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2020, **39**(12): 2530-2539. (in Chinese))
- [15] 王柳江, 王耀明, 刘斯宏, 等. 考虑有效电压衰减的二维真空预压联合电渗排水固结解析解[J]. *岩石力学与工程学报*, 2019, **38**(S1): 3134-3141. (WANG Liujiang, WANG Yaoming, LIU Sihong, et al. 2D analytical solution of consolidation for vacuum preloading combined with electro-osmosis drainage considering reduction of effective voltage[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2019, **38**(S1): 3134-3141. (in Chinese))
- [16] WANG L J, SHEN C M, LIU S H, et al. A hydro-mechanical coupled solution for electro-osmotic consolidation in unsaturated soils considering the decrease in effective voltage with time[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, **133**: 104050.
- [17] SHANG J Q. Electroosmosis-enhanced preloading consolidation via vertical drains[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1998, **35**(3): 491-499.
- [18] 王 军, 符洪涛, 蔡袁强, 等. 线性堆载下软黏土一维电渗固结理论与试验分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, **33**(1): 179-188. (WANG Jun, FU Hongtao, CAI Yuanqiang, et al. Analyses of one dimensional electro-osmotic consolidation theory and test of soft clay under linear load[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, **33**(1): 179-188. (in Chinese))
- [19] 李 瑛, 龚晓南, 卢萌盟, 等. 堆载-电渗联合作用下的耦合固结理论[J]. *岩土工程学报*, 2010, **32**(1): 77-81. (LI Ying, GONG Xiaonan, LU Mengmeng, et al. Coupling consolidation theory under combined action of load and electro-osmosis[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, **32**(1): 77-81. (in Chinese))
- [20] SHANG J Q, TANG M, MIAO Z. Vacuum preloading consolidation of reclaimed land: a case study[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1998, **35**(5): 740-749.
- [21] 黄鹏华, 王柳江, 刘斯宏, 等. 真空堆载预压联合电渗竖向排水地基非线性固结解析解[J]. *岩石力学与工程学报*, 2021, **40**(1): 206-216. (HUANG Penghua, WANG Liujiang, LIU Sihong, et al. Nonlinear analytical solutions for vertical drainage consolidation of foundations under vacuum-surcharge preloading combined with electroosmosis[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2021, **40**(1): 206-216. (in Chinese))
- [22] 苏金强, 王 钊. 电渗的二维固结理论[J]. *岩土力学*, 2004, **25**(1): 125-131. (SU Jinqiang, WANG Zhao. Theory of two-dimensional electro-osmotic consolidation of soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, **25**(1): 125-131. (in Chinese))
- [23] 谢新宇, 郑凌透, 谢康和, 等. 电势梯度与电极间距变化的滨海软土电渗模型试验研究[J]. *土木工程学报*, 2019, **52**(1): 108-114, 121. (XIE Xinyu, ZHENG Lingwei, XIE Kanghe, et al. Experimental study on electro-osmosis of marine soft soil with varying potential gradient and electrode spacing[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2019, **52**(1): 108-114, 121. (in Chinese))
- [24] XIE K H, WANG K, WANG Y L, et al. Analytical solution for one-dimensional consolidation of clayey soils with a threshold gradient[J]. *Computers and Geotechnics*, 2010, **37**(4): 487-493.
- [25] 李传勋, 董兴泉, 金丹丹, 等. 考虑起始水力坡降的软土大变形非线性固结分析[J]. *岩土力学*, 2017, **38**(2): 377-384. (LI Chuanxun, DONG Xingquan, JIN Dandan, et al. Nonlinear large-strain consolidation analysis of soft clay considering threshold hydraulic gradient[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, **38**(2): 377-384. (in Chinese))
- [26] TANG X W, ONITSUKA K. Consolidation by vertical drains under time-dependent loading[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2000, **24**(9): 739-751.
- [27] 江文豪, 詹良通, 杨 策. 连续排水边界条件下饱和软土一维大变形固结解析解[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2020, **51**(5): 1289-1298. (JIANG Wenhao, ZHAN Liangtong, YANG Ce. Analytical solution for one-dimensional large strain consolidation of saturated soft soils with continuous drainage boundary[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2020, **51**(5): 1289-1298. (in Chinese))
- [28] JEYAKANTHAN V, GNANENDRAN C T, LO S C R. Laboratory assessment of electro-osmotic stabilization of soft clay[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2011, **48**(12): 1788-1802.
- [29] JONES C J F P, LAMONT-BLACK J, GLENDINNING S. Electrokinetic geosynthetics in hydraulic applications[J]. *Geotextiles and Geomembranes*, 2011, **29**(4): 381-390.