

DOI: 10.11779/CJGE20211472

竖向受荷横截面异形桩弹塑性变分解

李籼橙^{1,2}, 周 航^{*1,2}, 亓戈平^{1,2}

(1. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045; 2. 重庆大学山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045)

摘要: 现有计算理论无法严格考虑弹塑性土中竖向受荷横截面异形桩的异形效应。针对该问题, 基于虚功原理推导出桩-弹塑性土模型的控制方程, 采用保角变换技术克服了复杂边界条件控制方程求解问题, 结合双曲形 D-P 本构模型的本构积分算法获得弹塑性土中竖向受荷横截面异形桩的半解析算法, 建立了能够考虑横截面异形效应的竖向受荷横截面异形桩荷载传递理论模型。将理论模型的预测结果与有限元计算结果对比, 验证了理论模型的可靠性和计算的高效性。最后, 通过参数分析探讨了横截面异形效应对荷载沉降曲线的影响, 结果表明: 在正常工作荷载下, 横截面异形效应对桩顶沉降影响不大; 横截面异形效应主要对桩的极限承载力大小产生影响。

关键词: 弹塑性土; 横截面异形桩; 虚功原理; 保角变换; D-P 本构模型; 荷载传递

中图分类号: TU473 文献标识码: A 文章编号: 1000-548(2023)01-0122-12

作者简介: 李籼橙(1998—), 男, 硕士研究生, 主要从事桩-土相互作用方面的理论研究。E-mail: cqulxc1113@163.com。

Elasto-plastic variational solution for vertically loaded noncylindrical piles

LI Xiancheng^{1,2}, ZHOU Hang^{1,2}, QI Geping^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China; 2. Key Laboratory of New Technology for Construction

of Cities in Mountain Area, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: The existing analytical or semi-analytical methods cannot rigorously capture the geometrical effects of noncylindrical piles in elasto-plastic soils. To solve this issue, based on the principle of virtual work, the governing equations for the pile-soil system are derived. Solving the governing equation with a complex boundary is overcome by the conformal mapping technique. A semi-analytical algorithm for the vertically loaded noncylindrical piles in elasto-plastic soils is developed by combining the use of integral algorithm for the hyperbolic D-P constitutive model. A general theoretical model for the load transfer of the vertically loaded noncylindrical piles considering the geometrical effects is proposed. The reliability and efficiency of the proposed semi-analytical method is validated by comparing the predicted results with those of FEM. Finally, detailed parametric studies are conducted to investigate the geometrical effects on the influences of load-settlement curve. It is found that the non-circular cross-section has insignificant influences on the settlement of the pile head under working loads, which principally affects the magnitude of the ultimate bearing capacity of the pile.

Key words: elasto-plastic soil; noncylindrical pile; principle of virtual work; conformal mapping; D-P constitutive model; load transfer

0 引言

横截面异形桩(以下简称异形桩)是旨在不增加混凝土用量的条件下, 通过改变传统圆桩的横截面形状, 将更多的上部结构荷载通过桩侧传递到桩周土中而发展的一种优质桩, 如现浇 X 形钢筋混凝土桩(以下简称 XCC 桩)。相对于传统圆桩, 异形桩的横截面通常表现为复杂的形状, 这使得桩-土接触面上的力学特性变得更加复杂, 同时也使得竖向受荷异形桩-土相互作用的严格分析成为一个三维(3D)问题^[1]。另外, 相对于等横截面面积的圆桩, 桩的横截面形状变化将引起桩位移、承载力及桩附近土体响应等的变化, 即

横截面“异形效应”。桩-土 3D 相互作用及异形效应问题, 增加了异形桩基础研究的复杂性和挑战性。

在过去几十年中, 针对竖向受荷桩-土相互作用问题已经开展了大量的研究, 提出的方法主要包括荷载传递法^[2]、基于 Mindlin 解^[3]的弹性理论法^[4-6]、变分法^[7-15]以及有限元(FE)法^[16-17]。荷载传递法通过 $t-z$ 曲线表示荷载传递机理, 使竖向受荷圆桩-土相互作用这样一个轴对称模型简化为了一维模型, 具有计算效

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51978105)

收稿日期: 2021-12-11

*通信作者(E-mail: zh4412517@163.com)

率高的优势, 且能够考虑土体的非线性等问题, 该方法仍是目前研究圆桩-土相互作用的主流方法, 但不适用于异形桩-土 3D 相互作用问题。基于 Mindlin 解的弹性理论法可预测桩基础正常工作荷载下的沉降, 但该方法对土体的假设过于理想化, 与土体的弹塑性特性差异较大。此外, 即便是均质、弹性土中的竖向受荷异形桩, 应用该方法也十分复杂。目前, 在桩-土相互作用研究中发展了两种变分法。第一种是由 Shen 等^[9]提出的变分法, 假设土体为均质弹性体, 在确定桩侧与桩端上的应力时需用到 Mindlin 解。雷国辉等^[14]将 Shen 等^[9]提出的变分法将圆桩群桩拓展到了壁板桩群桩的理论分析中。由于 Shen 等^[9]所提出的变分法依赖于 Mindlin 解得到桩表面上的应力, 因此该理论不适用于弹塑性土中桩基础的理论分析。第二种是由 Vallbhan 等^[7]提出的变分法, 该理论对土体的位移场进行了简化假设, 然后再基于最小势能原理导出桩-土体系的控制方程。Lee 等^[10]和 Seo 等^[11]将 Vallbhan 等^[7]提出的方法拓展到了多层弹性土中。Basu 等^[12]和 Tehrani 等^[13]基于第二种变分法分别研究了成层弹性土中矩形桩单桩和矩形桩群桩的弹性变分解, 并考察了矩形桩与等横截面面积圆桩位移的差异。周航等^[15]基于第二种变分法考察了均质、弹性土中 XCC 桩的异形效应。以上两种变分法的优点在于能够考虑桩-土 3D 相互作用、计算效率高、且计算前仅需输入桩的几何参数及其与土体的物理参数。有限元法, 能够考虑桩-土 3D 相互作用、复杂的边界条件及土体的弹塑性问题等, 被认为是一种严格的分析方法。但在 3D 问题中, FE 模型的建立和计算均需大量时间成本, 且不同的工况需要建立不同的 3D 计算模型, 这些问题使得 FE 法在桩基础的设计中并不常用^[18]。

在上面的分析方法中, 虽然已有将弹性理论法和变分法用于研究桩-土 3D 相互作用^[6, 12, 14], 部分研究也考察了桩的横截面异形效应^[1, 5, 13, 15], 但由于这些研究均假设土体为线弹性材料, 从而使得它们在应用中受到了极大的限制。目前, 针对弹塑性土中的竖向受荷异形桩问题, 除有限元法外, 尚未提出一种较为严格的理论模型。

近几年, Han 等^[19]和 Gupta 等^[20]通过对土体位移场进行假设, 最先将变分原理(虚功原理)用于弹塑性土及非线性弹性土中圆桩的水平受荷桩问题, 该问题属于桩-土 3D 相互作用问题, 研究结果表明: 该方法计算效率明显高于 FE 法, 且计算精度与 FE 法相当。同时, 这些研究也表明了变分原理在 3D 桩-弹塑性或非线性弹性土相互作用分析的优越性。

综上, 为了提高桩-土相互作用分析的效率, 更严

格地考虑弹塑性土中竖向受荷异形桩-土相互作用及横截面的异形效应, 采用变分原理是目前最有效的一种方法。为此, 本文基于虚功原理研究弹塑性土中竖向受荷异形桩的变分解。

1 双曲形 Drucker-Prager 模型

Drucker-Prager(以下简称 D-P)破坏准则由于形式简单, 参数少, 且物理意义明确, 因而在岩土工程中得到了广泛的应用^[21], 应指出该模型主要适用于砂土。如图 1 所示, 可以发现在子午面上 D-P 模型屈服面的存在一个尖点。为了消除 D-P 屈服面上尖点带来的奇异性, 可按照 Abbo 等^[22]的建议, 采用图 1 中所示的双曲近似来代替原 D-P 屈服面。对原 D-P 屈服面采用双曲近似后的双曲形 D-P 模型的屈服函数 f 可表示为^[19]

$$f = \frac{1}{3} \sqrt{b^2 \tan^2 \beta + 3q^2} - p \tan \beta - \kappa = 0 \quad (1)$$

式中: p 为示静水压力 ($p = I_1/3$), 其中 I_1 为应力张量 σ_{ij} 的第一不变量; q 为等效剪应力 ($q = \sqrt{3J_2}$), 其中 J_2 为偏应力张量 σ'_{ij} 的第二不变量; b 为线性和双曲形 D-P 屈服面尖点的距离 ($b \leq 0.25c \cot \varphi$); β 和 κ 分别为 D-P 模型的摩擦角和黏聚力, 其值与土体的内摩擦角和黏聚力 φ 有关:

$$\tan \beta = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \quad , \quad (2)$$

$$\kappa = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad . \quad (3)$$

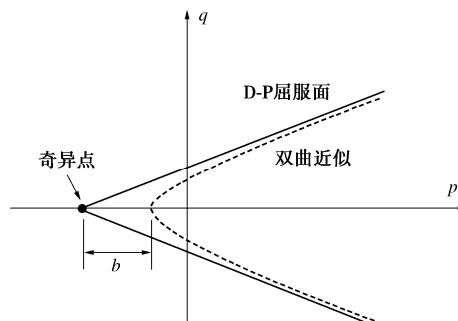


图 1 子午面上原 D-P 与双曲形 D-P 屈服面

Fig. 1 Original D-P and hyperbolic D-P yield surfaces in meridional plane

双曲形 D-P 模型非关联流动的塑性势函数 g 表示为

$$g = \frac{1}{3} \sqrt{b^2 \tan^2 \psi + 3q^2} - p \tan \psi = 0 \quad , \quad (4)$$

式中, ψ 为 D-P 模型的剪胀角。如果 $\psi = \beta$, 此时 $g = f$, 则非关联流动的 D-P 模型退化为相关联的模型。

2 异形桩-弹塑性土模型的表述

在半无限非均质、理想弹塑性土中，一竖向受荷横截面异形桩的力学模型如图 2 所示。由于研究对象几何及力学行为的非轴对称性，本文将桩-土体系建立在笛卡尔直角坐标系 ($o-xyz$) 下进行分析，其中坐标原点 o 与桩顶的形心重合， x 轴和 y 轴的位置可以根据实际问题的对称性确定， z 轴与桩轴线重合且方向向下。在静力荷载作用下，假设桩为弹性材料，其弹性模量、桩深和横截面面积分别为 E_p 、 L_p 和 A_p 。由于假设了土体的非均质性，因此在初始应力状态下，其剪切模量 G_s 及 Lamé 常数 λ_s 均为随空间坐标变化的函数。另外，关于该力学模型的其它基本假设包括：① 桩顶与地表齐平，地表为自由面，不考虑其它外部作用的影响。② 打桩等施工作用对土体的影响不在本文的研究范围内，因此不考虑施工效应。③ 由于桩的刚度远大于土体刚度，其受压缩引起的侧向变形很小。因此，忽略桩的侧向变形。④ 由于考虑土体水平位移场对竖向受荷桩-土相互作用影响较小，同时考虑到计算效率，本文忽略土体水平位移场。⑤ 桩端下与实桩等横截面面积的非圆柱体视为虚土桩。⑥ 假设桩与土的接触面连续，即在桩-土接触面上桩与土的位移相等。这里应注意，实际工程中，随着上部荷载的增加桩-土接触面可能出现相对滑移，因此，假设桩-土接触面连续可能导致预测的承载力偏大，而沉降偏小。然而，由于临近桩的土体非线性位移及桩身压缩量占总沉降的绝大部分，而相对滑移较小^[23]。因此，为方便分析本文的计算模型不考虑桩-土相对滑移。

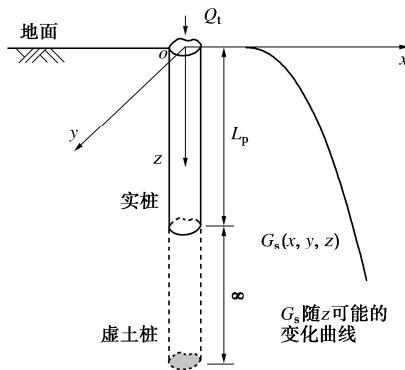


图 2 理想弹塑性土中竖向受荷横截面异形桩力学模型

Fig. 2 Mechanical model for axially loaded noncylindrical piles embedded in elasto-plastic soils

3 桩-土模型控制方程的推导与求解

3.1 竖向受荷桩-土模型虚功方程

在竖向增量荷载 ΔQ_t 作用下，桩与理想弹塑性体

系的虚功方程可以表示为

$$E_p A_p \int_0^{L_p} \frac{du}{dz} \delta \frac{du}{dz} dz + \int_{L_p}^{\infty} \iint_{s_0} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dx dy dz + \int_0^{\infty} \iint_{s_1} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dx dy dz = \Delta Q_t \delta u|_{z=0} \quad (5)$$

式中： u 为增量荷载 ΔQ_t 引起的桩位移； s_0 和 s_1 分别为水平面上异形桩的投影和不包含 s_0 的无限大平面域，如图 3 所示。根据土体内的应变分量^[13]，式 (5) 中的应变能密度可表示为

$$\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} = \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \quad (6)$$

式 (6) 等号右边的每一项可进一步表示为弹塑性刚度矩阵分量 C_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, 6$) 与位移、位移传递函数 ϕ 及它们导数乘积的形式。如等号右端第一项可表示为

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} &= (C_{31} \epsilon_{xx} + C_{32} \epsilon_{yy} + C_{33} \epsilon_{zz} + C_{34} \gamma_{xy} + \\ &C_{35} \gamma_{xz} + C_{36} \gamma_{yz}) \delta \epsilon_{zz} = \left(C_{33} \frac{du}{dz} \phi + C_{35} u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \right. \\ &\left. C_{36} u \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \left[\delta \left(\frac{du}{dz} \right) \phi + \frac{du}{dz} \delta \phi \right] , \end{aligned} \quad (7)$$

另外两项类似。关于函数 ϕ 的定义可参考文献 [1, 13]。

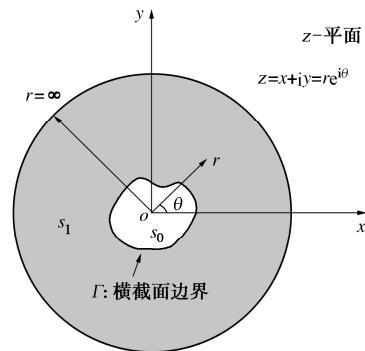


图 3 水平面内区域与边界的定义

Fig. 3 Definition of region and boundary in xy plane

将式 (6) 等号右端的展开形式代入到虚功方程中，再使用分部积分及格林公式便可获得仅由函数 u 和函数 ϕ 的一阶变分项表示的虚功方程，即

$$\begin{aligned} &- \left\{ \int_0^{L_p} \left(t_{s_1} \frac{d^2 u}{dz^2} + k_{s_1} \frac{du}{dz} + m_{s_1} u \right) dz + \left(t_{s_1} \frac{du}{dz} + k_{s_1} u \right) \Big|_0^{L_p} - \right. \\ &(Q - Q_0)|_{z=0} + \int_{L_p}^{\infty} \left(t_{s_2} \frac{d^2 u}{dz^2} + k_{s_2} \frac{du}{dz} + m_{s_2} u \right) dz + \\ &\left. \left(t_{s_2} \frac{du}{dz} + k_{s_2} u \right) \Big|_{L_p}^{\infty} \right\} \delta u - \iint_{s_1} \left(a_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \right. \\ &\left. a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial \phi}{\partial x} + a_5 \frac{\partial \phi}{\partial y} + a_6 \phi \right) dx dy \delta \phi = 0 , \quad (8) \end{aligned}$$

式中， Q_0 和 Q 分别为某一荷载增量 ΔQ_t 初值和终值。此外，一阶变分系数中的参数分别为

$$t_{s_1}(z) = E_p A_p + \iint_{s_1} C_{33} \phi^2 dx dy , \quad (9)$$

$$k_{s_1}(z) = \iint_{s_1} \left[\frac{dC_{33}}{dz} \phi + (C_{35} - C_{53}) \frac{\partial \phi}{\partial x} + (C_{36} - C_{63}) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \phi dx dy , \quad (10)$$

$$m_{s_1}(z) = \iint_{s_1} \left[\left(\frac{dC_{35}}{dz} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{dC_{36}}{dz} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \phi - (C_{56} + C_{65}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - C_{55} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - C_{66} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy , \quad (11)$$

$$t_{s_2}(z) = \iint_{s_0+s_1} C_{33} \phi^2 dx dy , \quad (12)$$

$$k_{s_2}(z) = \iint_{s_0+s_1} \left[\frac{dC_{33}}{dz} \phi + (C_{35} - C_{53}) \frac{\partial \phi}{\partial x} + (C_{36} - C_{63}) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \phi dx dy , \quad (13)$$

$$m_{s_2}(z) = \iint_{s_0+s_1} \left[\left(\frac{dC_{35}}{dz} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{dC_{36}}{dz} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \phi - (C_{56} + C_{65}) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - C_{55} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - C_{66} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy , \quad (14)$$

$$k_{s_{11}}(z) = \iint_{s_1} \left(C_{35} \frac{\partial \phi}{\partial x} + C_{36} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \phi dx dy , \quad (15)$$

$$k_{s_{21}}(z) = \iint_{s_0+s_1} \left(C_{35} \frac{\partial \phi}{\partial x} + C_{36} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \phi dx dy , \quad (16)$$

$$a_1(x, y) = \int_0^\infty C_{55} u^2 dz , \quad (17)$$

$$a_2(x, y) = \int_0^\infty C_{66} u^2 dz , \quad (18)$$

$$a_3(x, y) = \int_0^\infty (C_{65} + C_{56}) u^2 dz , \quad (19)$$

$$a_4(x, y) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial C_{55}}{\partial x} + \frac{\partial C_{65}}{\partial y} \right) u + (C_{53} - C_{35}) \frac{du}{dz} \right] u dz , \quad (20)$$

$$a_5(x, y) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial C_{56}}{\partial x} + \frac{\partial C_{66}}{\partial y} \right) u + (C_{63} - C_{36}) \frac{du}{dz} \right] u dz , \quad (21)$$

$$a_6(x, y) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial C_{53}}{\partial x} + \frac{\partial C_{63}}{\partial y} \right) u - C_{33} \frac{du}{dz} \right] du dz . \quad (22)$$

实际上, 该模型的虚功方程也可进一步写成如下的简化形式:

$$\Psi(z) \delta u + \Theta(x, y) \delta \phi = 0 . \quad (23)$$

根据虚功原理, 式(23)中 Ψ 和 Θ 分别表示位移和位移传递函数的控制方程及相应的力的平衡条件, 并且 Ψ 和 Θ 必须均为零。

应注意, 虚土桩主要受到桩端的压缩作用。此外, 对于典型的横截面异形桩, 如方形桩、矩形桩及 XCC 桩, 通常作为摩擦型桩将来自上部结构的大部荷载通过桩侧传递到附近的土体中, 而被传递到桩端下部土体中的荷载较少。因此, 本文将虚土桩横截面内的 ϕ

假设为常数, 并令其等于 1。从而, 在区域 s_0 内 ϕ 的一阶变分为零。这也是式(8)中, 函数 ϕ 的一阶变分项系数中未包含在区域 s_0 上二重积分的原因。

3.2 桩-土体系控制方程与边界条件

根据式(7), 当 $0 \leq z \leq L_p$ 时, 在增量荷载 ΔQ_t 下桩位移函数的控制方程表示为

$$t_{s_1} \frac{d^2 u_1}{dz^2} + k_{s_1} \frac{du_1}{dz} + m_{s_1} u_1 = 0 . \quad (24)$$

当 $z \geq L_p$ 时, 土体坚向位移分量随深度的变化规律仅由位移函数 u 描述, 同时该函数也表示虚土桩的位移, 其控制方程为

$$t_{s_2} \frac{d^2 u_2}{dz^2} + k_{s_2} \frac{du_2}{dz} + m_{s_2} u_2 = 0 . \quad (25)$$

将实桩与虚土桩的位移函数 u 分别记为 u_1 与 u_2 。由式(9)~(14)可以看出, 在式(24), (25)中, 参数 t_{s_i} , k_{s_i} 和 m_{s_i} ($i=1, 2$) 的量纲分别为 F , F/L^2 和 F/L^3 , 且这些参数取决于函数 $C_{ij}(x, y, z)$, $\phi(x, y)$ 及其导数。因此, 函数 u_1 与 u_2 的控制方程属于变系数、二阶常微分方程。

关于实桩与虚土桩位移函数控制方程的边界条件。首先可以根据虚功原理导出力的平衡条件, 在地表 ($z=0$ m) 满足

$$t_{s_1} \frac{du_1}{dz} + k_{s_{11}} u_1 + (Q - Q_0) = 0 ; \quad (26)$$

在桩端 ($z=L_p$) 满足

$$\left(t_{s_1} \frac{du_1}{dz} + k_{s_{11}} u_1 \right)_{L_p} = \left(t_{s_2} \frac{du_2}{dz} + k_{s_{21}} u_2 \right)_{L_p} . \quad (27)$$

此外, 函数 u_1 与 u_2 在桩端处必须满足位移连续条件, 即

$$u_1(L_p) = u_2(L_p) . \quad (28)$$

再考虑到, 当深度趋于无穷大时, 函数 u_2 必须趋于零。据此, 可给出控制方程(25)的另一个边界条件:

$$u_2(\infty) = 0 . \quad (29)$$

作用于桩上的轴力为

$$Q_n(z) = \begin{cases} t_{s_1} \frac{du_1}{dz} + k_{s_{11}} u_1 & (z=0m \text{ 或 } L_p) \\ t_{s_1} \frac{du_1}{dz} & (0 < z < L_p) \end{cases} . \quad (30)$$

同样地, 根据式(8)可以直接给出函数 ϕ 的控制方程, 即

$$a_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial \phi}{\partial x} + a_5 \frac{\partial \phi}{\partial y} + a_6 \phi = 0 , \quad (31)$$

式中, 参数 a_i ($i=1, 2, \dots, 6$) 由式(17)~(22)分别确定, 其取决于函数 $C_{ij}(x, y, z)$, $u(z)$ 及其导数。

求解一个二阶偏微分方程, 需要确定两个边界条

件。根据模型对位移场的定义^[13], 函数 ϕ 的控制方程需满足两个自然边界条件, 即

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x, y) \Big|_{\Gamma} = 1, \\ \phi(\pm\infty, \pm\infty) = 0 \end{array} \right\} \quad (32)$$

3.3 控制方程求解思路

由于方程(24), (25)为两个变系数的二阶常微分方程, 根据相应的边界条件求常微分方程的定解, 属于边值问题。因此, 它们均可直接借助 Matlab 内置的 bvp4c 求解。但应注意到, 这两个方程在 $z=L_p$ 处的共用相同的两个边界条件(即式(27), (28)), 且这两个边界条件相互耦合, 这表明方程(24), (25)也是相互耦合的。因此, 需结合迭代法求解。

对于函数 ϕ , 其控制方程也没有解析解。为此, 本文通过有限差分法进行求解。针对传递函数控制微分方程边界条件复杂的问题, 这里借助保角变换技术^[24], 即将 z -平面上带有非圆形孔的无限大的区域 s_1 (如图 3 所示) 映射到相平面 (ζ -平面) 内的单位圆外 (如图 4 所示)。当然, 对控制方程定义域进行变换时, 控制方程也需要进行保角变换, 即将 z -平面上的 ϕ 的控制方程转化为 ζ -平面上 ϕ 的控制方程。

3.4 迭代求解算法

在求解桩-土模型的控制方程时, 可以发现位移传递函数控制方程中的参数 a_i 取决于函数 u , C_{ij} 及其导数。同样地, 位移函数控制方程以及力边界条件中的

参数 t_{s_i} , k_{s_i} , m_{s_i} 以及 $k_{s_{11}}$ 和 $k_{s_{21}}$ 也取决于函数 ϕ , C_{ij} 及它们的导数。因此, 该模型的控制微分方程是一组耦合的微分方程, 需使用迭代法同时获得方程(24), (25), (31) 的数值解。此外, 由于土体的弹塑性特征, 随着外部荷载的不断增加, 土体的切线刚度逐渐减小。因此, 为准确刻画桩-土体系在外部荷载作用下的非线性行为, 在每一外部增量荷载施加后, 需对土体内任一超过屈服面的点上的应力状态进行更新, 从而对该点的弹塑性刚度进行更新。图 5 中给出了竖向受荷桩-理想弹塑性土模型的求解算法。

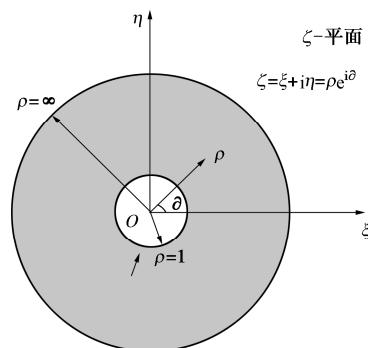


图 4 相平面的定义

Fig. 4 Definition of phase plane

如流程图 5(a) 所示, 本文将作用于桩顶上的竖向荷载 Q_t 假设为了无量纲的伪时间 T (取值为 0~1),

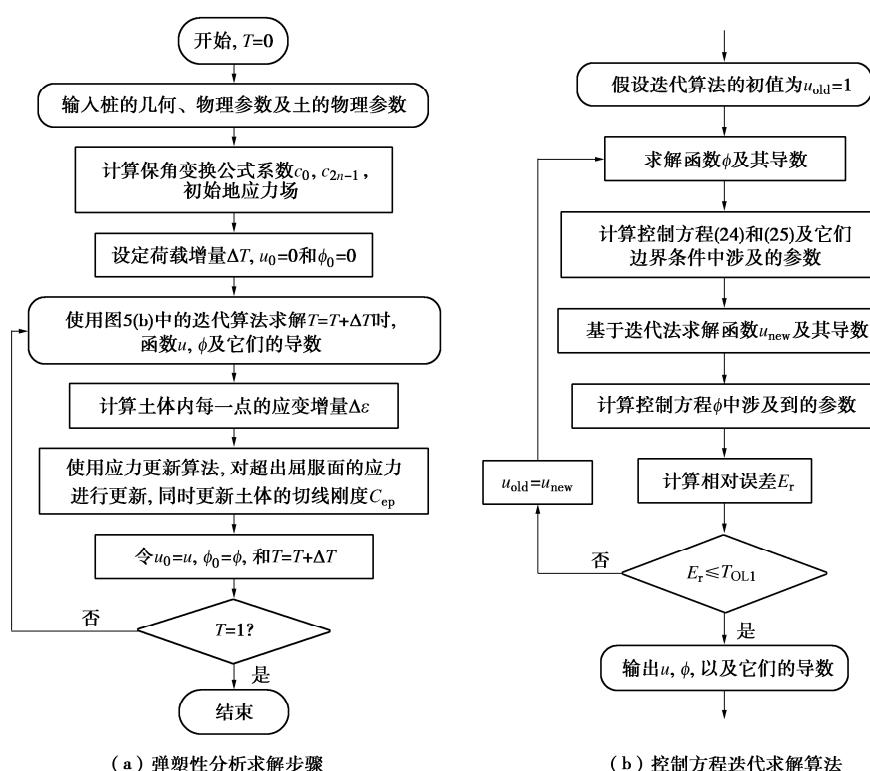


图 5 竖向受荷桩-土体系弹塑性分析求解方案

Fig. 5 Solution scheme for elasto-plastic analysis of axially loaded pile-soil system

增量荷载 ΔQ_t 表示成 ΔT 。在第一个荷载增量作用之前(即 $T=0$ 时),首先给出桩的几何参数以及桩和土的物理参数。由此可根据Zhou等^[24]提出的保角变换技术求出保角变换公式中的常系数 c_0 与 c_{2n-1} 。为了简化,本文仅将土体重力作用引起的应力场作为土体初始应力场。然后,给定荷载增量 ΔT 的大小,并根据图5(b)所示的迭代算法求解桩-土体系控制方程,获得函数 u , ϕ 及其导数,进而给出土体内任一点的应变增量。为使土体内任一点的应力满足屈服条件,在施加下一荷载增量 ΔT 之前,需使用应力更新算法对超出屈服面的应力进行更新,同时导出更新后的土体切线刚度。本文采用完全隐式的返回欧拉算法对土体中一点的应力和切线刚度进行更新。关于隐式本构积分算法的具体实施步骤已有大量的文献进行了介绍,可参考文献[25],本文不再赘述。随后,基于更新后的土体切线刚度,计算下一荷载增量 ΔT 施加后桩-土体系的位移场,并对土体内的应力及切线刚度进行更新。重复以上步骤,直到伪时间 $T=1$ 。

图5(b)给出了求解桩-土体系控制方程的迭代算法。在开始迭代计算时,首先将位移函数 u 的初值假设为 $u_{\text{old}}=1$ 。然后,基于有限差分法求解位移传递函数 ϕ 。并将首次求解的函数 ϕ 用于计算式(24),(25)及其边界条件中涉及到的参数 $t_{s_i}, k_{s_i}, m_{s_i}, k_{s_{11}}, k_{s_{21}}$ 。然后,再使用内循环迭代求解耦合的式(24),(25)。注意,内循环迭代是相对于求解整个桩-土体系控制方程的循环迭代而言的。本文取内循环迭代的收敛条件为相邻两次迭代解相对误差小于 10^{-5} ,且最大内循环次数为10次。如果内循环在10次内收敛,则使用收敛结果,否则采用第10次迭代的结果。随后,判断 u_{old} 与内循环的求解出 u_{new} 的相对误差 E_r 是否小于 T_{OL1} (取 $T_{\text{OL1}}=10^{-4}$)。若 E_r 满足收敛条件,则桩-土体系控制方程的解收敛,否则,取 $u_{\text{old}}=u_{\text{new}}$ 开始进行下一次迭代,直到 E_r 小于 T_{OL1} 。

注意到,本文在桩-土模型的位移场中,忽略了土体的水平位移场,为了避免忽略土体位移场引起土体刚度增加的现象,需要对土体的模量进行修正^[12]。Randolph等^[26]和Basu等^[12]建议,通过修正土体的剪切模量和假设土体的泊松为零对忽略水平位移场引起的人为刚度进行修正。本文采用Tehrani等^[13]通过参数分析与有限结果对比获得的土体剪切模量和体积模量修正公式。

4 半解析解的验证

在这一部分,通过两个坚向受荷横截面异形桩-土模型的(矩形和XCC桩)例子来验证本文所提出的半解析法的正确性,其中土体均采用双曲型的D-P

破坏准则进行模拟。由于目前尚未有弹塑性土中坚向受荷异形桩的解析或半解析解,因此,将本文半解析法预测的桩和土体的结果与使用Abaqus软件所计算的3D有限元结果进行对比,并对这两种方法的计算效率进行比较。此外,为验证本文半解析法能否正确地预测横截面的形状变化对桩位移和承载力的影响,即横截面“异形效应”,还同时给出了与异形桩等横截面面积的圆桩的结果。

在有限元中,模型的几何、物理参数及本构关系应均采用与本文半解析法相同的参数,另外,为保证桩-土接触面完全连续接触,本文使用单个部件建立桩-土模型。考虑到矩形和XCC桩的对称性,在有限元中取桩-土模型的四分之一以减小计算量。模型的底面边界取到桩端下一倍的桩深,坚向边界到桩轴的距离不小于30倍的等面积圆柱直径,对底面边界限制其所有位移分量,而对坚向边界仅约束其水平位移分量。为有效减少模型中网格的数量,但不影响精度,对靠近桩的土体采用较细的网格,而对远离桩的土体采用越来越粗的网格进行划分。桩和土均采C3D8R单元进行模拟。另外,作用于桩顶的坚向荷载采用与本文半解析法相同的荷载增量进行施加。

4.1 对比矩形桩解

考虑均质、理想弹塑性土中的坚向受荷矩形桩。矩形桩的弹性模量为29 GPa,桩深为20 m,横截面长和宽分别为1.253,0.626 m(即长宽比 $a_x/b_y=2$)。为了验证矩形桩的优越性,在不增加混凝土用量的条件下,按照等横截面面积的原则,相应圆柱的直径取为 $d_e=1$ m。土体重度和杨氏模量分别为 $\gamma_s=15$ kN/m³和 $E_s=100$ MPa,土体的泊松比、黏聚力、内摩擦角和剪胀角分别为 $\mu_s=0.35$, $c=0.1$ kPa, $\varphi=20^\circ$ 和 $\psi=15^\circ$ 。土体的静压力系数 $K_0=1-\sin\varphi$ 。作用于桩顶的最大集中荷载为9000 kN,划分为40个等增量荷载依次施加。在ABAQUS有限元分析软件中,该模型的长、宽和高分别为35,35,40 m,由103200个C3D8R单元组成。

图6给出了本文半解析法与有限元法计算均质、理想弹塑性土中坚向受荷矩形桩和土体响应的结果。图6(a),(b)分别对比了本文解与有限元法所计算的桩位移和桩轴力曲线,结果表明本文解与有限元法所计算的矩形桩位移曲线一致性较好,桩顶沉降分别为20.1,19.2 mm,相对误差约为4.5%;桩的轴力除在桩端处相对误差较大外,其它位置的相对误差小于10%。图6(c),(d)分别对比了沿x轴和y轴的归一化地表沉降,本文解与有限元法计算结果均表明:地表沉降在2.5倍的桩径范围内沉降较大,且变化十分显著;在2.5倍到15倍的桩径之间,地表沉降已经较

小, 位移变化比较平缓; 对 15 倍桩径以外土体的位移的影响可以忽略; 有限元的结果在临近桩的地表位移出现了负值, 即临近桩的地表出现了隆起现象, 而本文半解析法未能反映该现象, 这可能是由于本文半解析法忽略了土体水平位移场引起的。

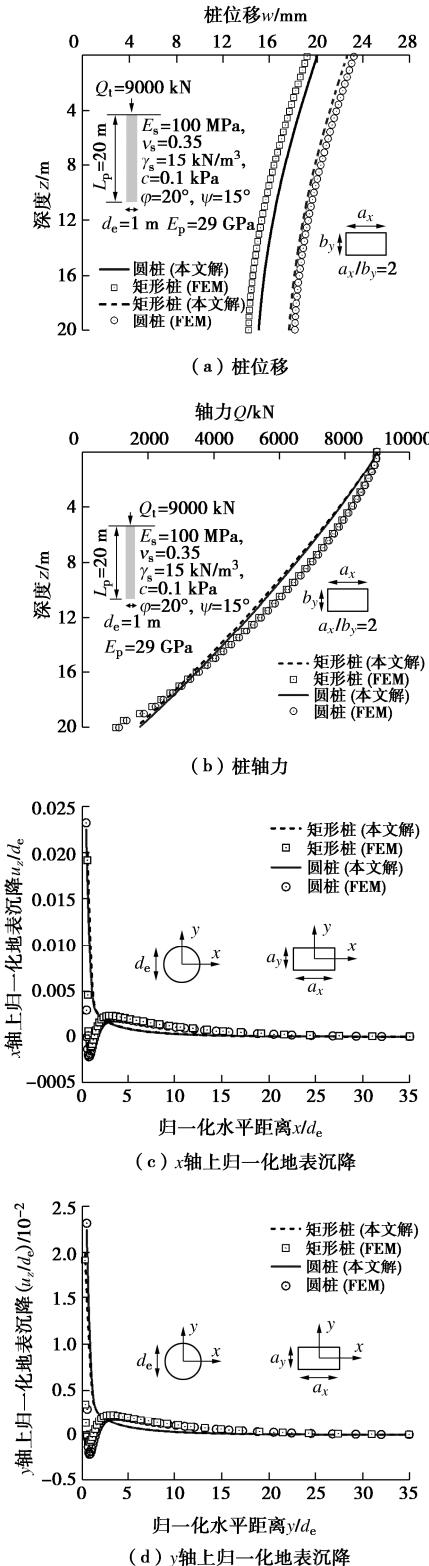


图 6 对比本文解与有限元法中矩形桩和土的响应

Fig. 6 Comparison of responses of rectangular piles and soils from present analysis and FE method

图 7 对比了本文解与有限元法所获得的矩形桩荷载沉降曲线, 结果表明本文半解析法预测结果与有限元的基本吻合, 两种方法的最大误差小于 5%。

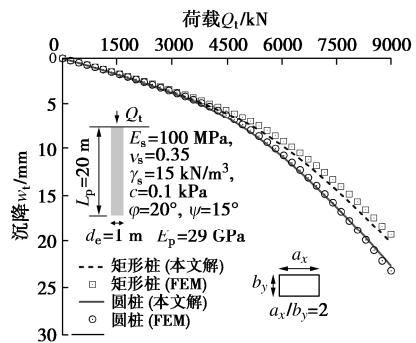


图 7 矩形桩与等横截面面积圆桩的荷载沉降曲线

Fig. 7 Load-settlement curves for rectangular and circular piles with same cross-sectional area

为了验证所提出的半解析法能否准确地预测矩形桩横截面异形效应, 将本文半解析法与有限元所计算的与矩形桩等横截面面积圆桩的结果也添加到了图 6, 7 中。与矩形桩对比的结果类似, 本文的半解析法能较好地预测圆桩的位移以及荷载沉降曲线, 其结果与有限元法基本一致。另外, 本文解表明: 圆桩与矩形桩之间的轴力曲线及归一化的地表沉降曲线差异较小, 但矩形桩的桩位移要明显小于圆桩的桩位移, 该结果也与有限元法的一致。同时, 对比结果进一步表明: 横截面异形效应对桩位移与荷载沉降曲线的影响较为明显。

关于两种方法的计算效率, 在同一台计算机中完成上述矩形桩-土模型, 有限元法和本文的半解析法所需的计算时间分别为 4301, 316 s。可以看出, 本文所提出的半解析法的计算效率明显高于有限元法。

4.2 对比 XCC 桩解

假设土体为双层土, 上层土体厚度为 16.8 m, 第二层土向下延伸至无穷大。在初始应力状态下, 每一层土都为均质土。XCC 桩的桩深为 18 m, 横截面的两对角直线段的距离 a 与开弧间距 b 分别为 1.005, 0.201 m (即 $a/b=5$), 开弧角 θ_{XCC} 为 90°, 桩端嵌入第二层土深度为 1.2 m。同样地, 在相同混凝土用量下, 按照等横截面面积原则, 相应圆桩的直径取 $d_e=0.8$ m, 桩和土的具体物理参数见图 8。在桩顶受到的最大竖向集中荷载为 8000 kN, 同样, 将其划分为 40 个等增量荷载依次施加。该桩-土模型在 ABAQUS 有限元分析软件中的尺寸为长×宽×高=30 m×30 m×36 m, 共由 95480 个 C3D8R 单元组成。

图 8 (a), (b) 给出了桩位移及轴力分布曲线。结果表明: 本文解与有限元计算桩位移曲线基本一致,

二者相对误差小于 5%; 与有限元法所计算的轴力相比, 本文半解析解的结果在桩端附近偏大, 其它位置偏小, 但整体上轴力随深度变化的规律基本一致。图 8 (c) 中给出了 x 轴上归一化地表沉降, 对比结果与矩形桩类似。图 9 给出了本文解与有限元法计算的 XCC 桩荷载-沉降曲线。结果表明: 本文解与有限法的结果基本一致, 在整个加载过程中, 桩顶的最大沉降差小于 5%。另外, 在图 8, 9 中还同时给出了两种方法获得的与 XCC 桩等横截面面积的圆柱结果, 对比结果表明: 本文半解析法也能够较好地反映 XCC 桩的横截面异形效应。

本文半解析法与有限元法计算上述 3D 模型的所花费的时间分别为 381, 3803 s。同样地, 在几乎相当的计算精度下, 本文半解析法的计算效率明显高于有限元法。

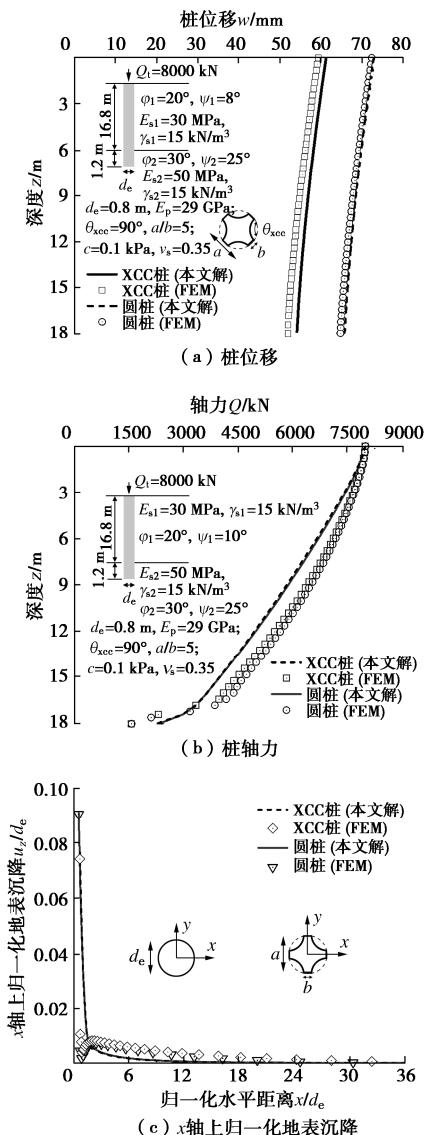


图 8 对比本文解与有限元法中 XCC 桩和土的响应

Fig. 8 Comparison of responses of XCC piles and soils from present analysis and FE method

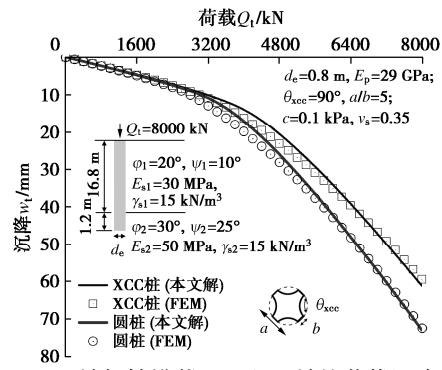


图 9 XCC 桩与等横截面面积圆桩的荷载沉降曲线

Fig. 9 Load-settlement curves for XCC and circular piles with same cross-sectional area

5 参数分析与讨论

为进一步研究异形桩的横截面异形效应对桩-土相互作用的影响, 本节将基于本文提出的半解析法, 对均质、理性弹塑性土中影响异形桩基础承载力和沉降的主要参数进行详细的分析。根据量纲分析, 导出了影响三维桩-土相互作用的 7 个主要无量纲化参数, 即桩长细比 L_p/d_e 、桩横截面参数 a/b (或 a_x/b_y)、桩-土模量比 E_p/E_s 、归一化黏聚力 c/E_s 、土体内摩擦角 φ 、土体的剪胀角 ψ 和归一化土体的重度 $\gamma L_p/E_s$ 。由于土体的泊松比对桩-土相互作用的影响较小, 故不再讨论土体泊松比的影响。图 10 中给出了以上 7 个参数对归一化的桩顶荷载 \bar{Q}_N ($\bar{Q}_N = Q_1/(E_s A_p)$) 与归一化桩顶位移 \bar{w}_t (\bar{w}_t/d_e) 关系曲线的影响。

图 10 (a) 所示为长细比对 \bar{Q}_N 与 \bar{w}_t 关系的影响。结果表明: 在 \bar{w}_t 发生突增前, 可视为弹性变形阶段, 无量纲化桩顶沉降 \bar{w}_t , 随 L_p/d_e 的增加而减小, 当 L_p/d_e 小于等于 40 时其对 \bar{w}_t 减小的影响更为明显, 但当 L_p/d_e 超过 40 后, 增加 L_p/d_e 对 \bar{w}_t 的影响较小; 另外, 可以看出对于不同的 L_p/d_e , 在弹性变形阶段, 等横截面面积的圆形、矩形和 XCC 桩之间的 \bar{w}_t 没有明显的差异。在 \bar{w}_t 发生突增后, 可视为塑性变形阶段, 随 L_p/d_e 的增加, 塑性变形阶段的斜率也逐渐增加, 即随 L_p/d_e 的增加, 塑性变形段的承载力也增加。

图 10 (b) 为桩的横截面参数对 \bar{Q}_N 与 \bar{w}_t 关系曲线的影响。对于矩形桩或 XCC 桩, 在保持横截面面积不变的条件下, 横截面参数 a/b 或 a_x/b_y 增加, 其承载力相对于等横截面面积的圆桩也逐渐增加, 其中, 随着矩形桩横截面长宽比 a/b 的增加, 承载力增加更加明显, 而随 XCC 桩横截面参数 a_x/b_y 的增加, 承载力增加较小, 并且当矩形桩的 a/b 大于等于 3 时, 其承载力将超过 a_x/b_y 为 5 时 XCC 桩的承载力。桩承载力增加主要原因是: 参数 a/b 或 a_x/b_y 增加, 引起了桩侧与土接触面积的增加, 这将导致矩形或 XCC 桩与土的接触面上的桩侧摩阻力 (除应力集中区域外) 小

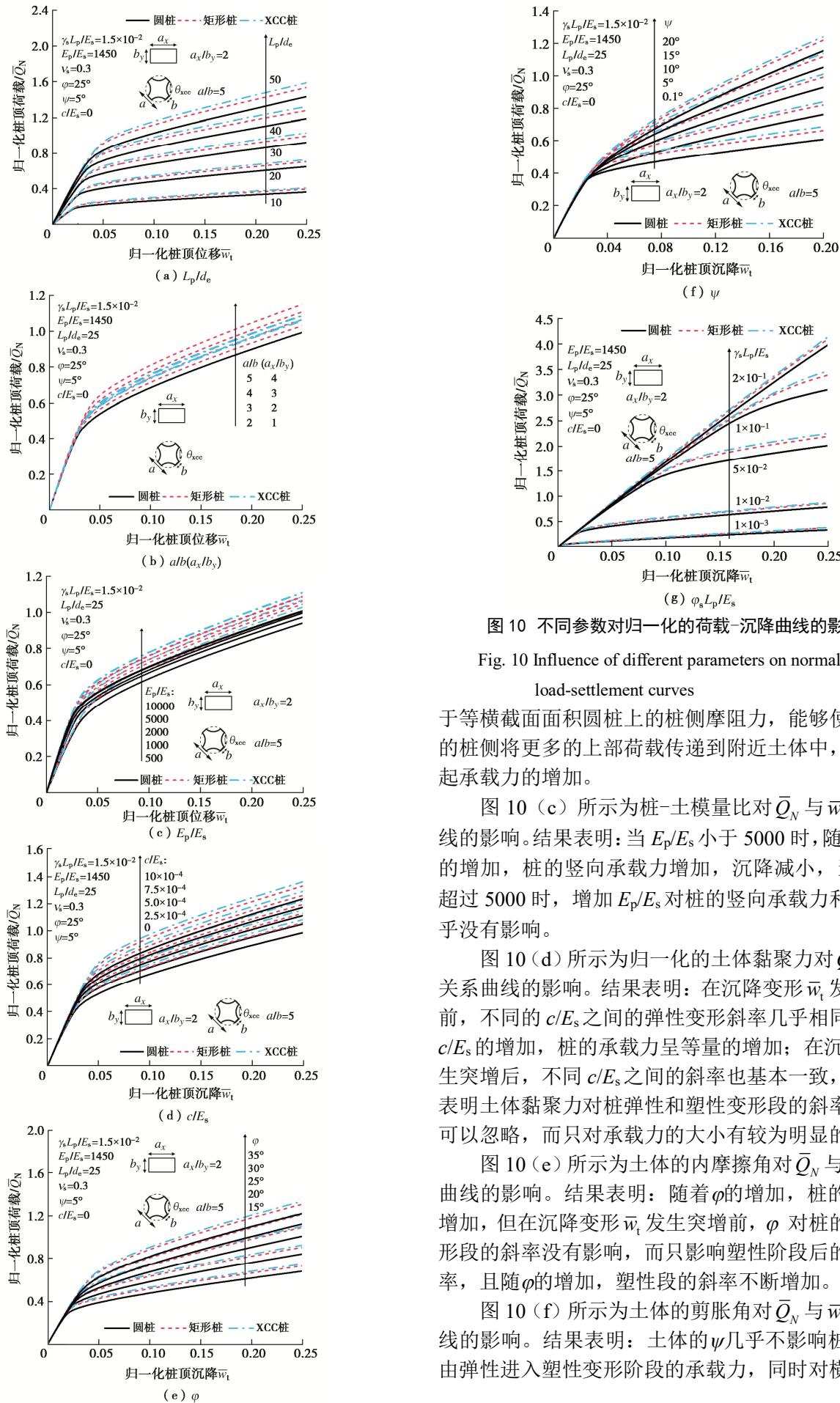


图 10 不同参数对归一化的荷载-沉降曲线的影响

Fig. 10 Influence of different parameters on normalized load-settlement curves

于等横截面面积圆桩上的桩侧摩阻力，能够使异形桩的桩侧将更多的上部荷载传递到附近土体中，从而引起承载力的增加。

图 10 (c) 所示为桩-土模量比对 \bar{Q}_N 与 \bar{w}_t 关系曲线的影响。结果表明：当 E_p/E_s 小于 5000 时，随着 E_p/E_s 的增加，桩的竖向承载力增加，沉降减小，当 E_p/E_s 超过 5000 时，增加 E_p/E_s 对桩的竖向承载力和沉降几乎没有影响。

图 10 (d) 所示为归一化的土体黏聚力对 \bar{Q}_N 与 \bar{w}_t 关系曲线的影响。结果表明：在沉降变形 \bar{w}_t 发生突增前，不同的 c/E_s 之间的弹性变形斜率几乎相同，随着 c/E_s 的增加，桩的承载力呈等量的增加；在沉降 \bar{w}_t 发生突增后，不同 c/E_s 之间的斜率也基本一致，进一步表明土体黏聚力对桩弹性和塑性变形段的斜率的影响可以忽略，而只对承载力的大小有较为明显的影响。

图 10 (e) 所示为土体的内摩擦角对 \bar{Q}_N 与 \bar{w}_t 关系曲线的影响。结果表明：随着 φ 的增加，桩的承载力增加，但在沉降变形 \bar{w}_t 发生突增前， φ 对桩的弹性变形段的斜率没有影响，而只影响塑性阶段后的曲线斜率，且随 φ 的增加，塑性段的斜率不断增加。

图 10 (f) 所示为土体的剪胀角对 \bar{Q}_N 与 \bar{w}_t 关系曲线的影响。结果表明：土体的 ψ 几乎不影响桩的沉降由弹性进入塑性变形阶段的承载力，同时对横截面的

异形效应影响也较小, 但对塑性变段曲线的斜率有较大的影响。

图 10 (g) 所示为土体的归一化重度对 \bar{Q}_N 与 \bar{w}_t 关系曲线的影响。结果表明: $\gamma_s L_p/E_s$ 对桩的承载力具有显著的影响, 随着 $\gamma_s L_p/E_s$ 的增加, 桩的承载力有显著的提高。这是由于土体的 $\gamma_s L_p/E_s$ 增加, 相当于增加了土体内的静水压力, 使该点在应力空间中离屈服面的距离更远, 从而增加了桩的承载力。同时这也表明: 土体的初始应力场对桩的承载力具有不可忽略的影响。

以上主要从定性角度分析和讨论了横截面异形效应对承载力的影响。为了进一步量化横截面异形效应对异形桩承载力的影响, 下面讨论 \bar{w}_t 为某一值时, 上述 7 个无量化参数对矩形和 XCC 桩承载力相对于等横截面面积圆柱承载力的增加量。在图 10 中容易看出, 除了图 10 (g) 外, 所有的桩集中在 \bar{w}_t 为 0.025~0.075 处开始出现突增的沉降。据此, 本文取 $\bar{w}_t = 0.075$ 时的 \bar{Q}_N 作为桩的极限承载力, 而对图 10 (g) 本文取 $\bar{w}_t = 0.25$ 时的 \bar{Q}_N 作为桩的承载力进行分析。图 11 (a)~(f) 中给出了 $\bar{w}_t = 0.075$ 时, 横截面异形桩(矩形桩和 XCC 桩)相对于等横截面面积圆柱的承载力增加百分比 $\bar{\omega}$ 随不同无量纲化参数的变化规律。图 11 (g) 表示 $\bar{w}_t = 0.075$ 时, 矩形桩和 XCC 桩的承载力相对于等横截面面积圆柱承载力增加百分比。其中 $\bar{\omega}$ 表示为

$$\bar{\omega} = \begin{cases} \left(\frac{\bar{Q}_{N,\text{rec}}}{\bar{Q}_{N,\text{cir}}} - 1 \right) \times 100\% & (\text{矩形桩}) \\ \left(\frac{\bar{Q}_{N,\text{xcc}}}{\bar{Q}_{N,\text{cir}}} - 1 \right) \times 100\% & (\text{XCC 桩}) \end{cases}, \quad (33)$$

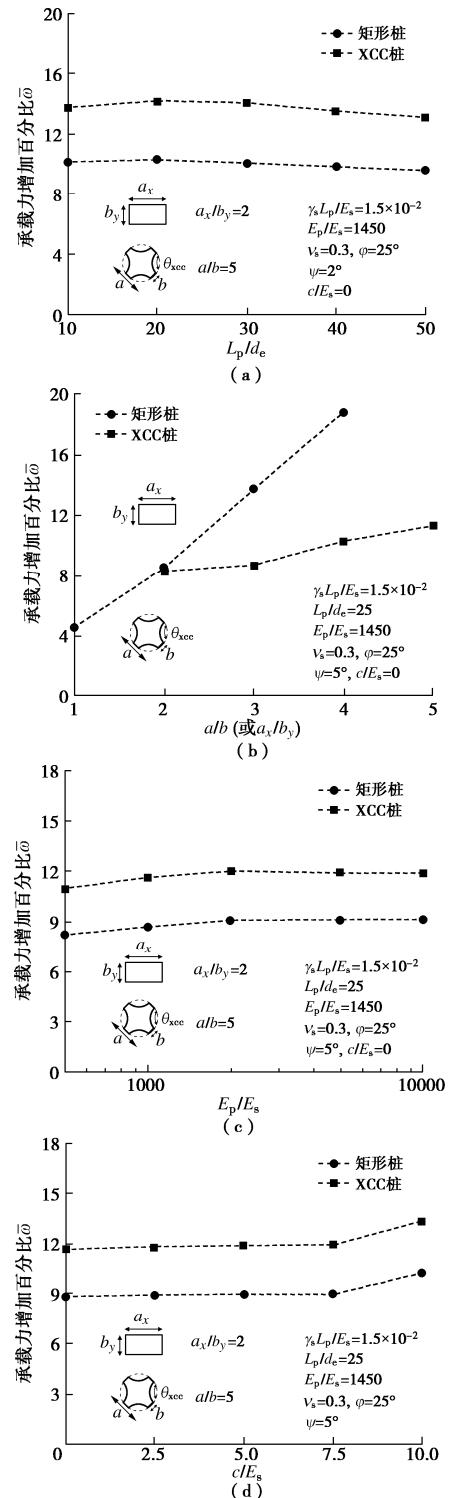
式中, $\bar{Q}_{N,\text{rec}}$, $\bar{Q}_{N,\text{xcc}}$, $\bar{Q}_{N,\text{cir}}$ 分别为矩形、XCC 和圆柱的归一化桩顶荷载。图 11 (a) 的结果表明: 随着桩长细比 L_p/d_e 的增加, 矩形桩和 XCC 桩的承载力相对于等横截面面积圆柱的承载力增加百分比 $\bar{\omega}$ 几乎不变, 该结果也表明桩的长细比不是异形效应的敏感参数; 对于不同的 L_p/d_e , 矩形桩和 XCC 桩的承载力相对于等横截面面积圆柱的承载力分别增加约 10% 和 14%。

图 11 (b) 表明随着桩的横截面参数 a/b 或 a_x/b_y 的增加, 矩形桩和 XCC 桩的承载力相对于等横截面面积圆柱的承载力逐渐增加, 但矩形桩的承载力受横截面参数的变化更为敏感, 对于长宽比 a/b 为 1, 4 时, 矩形桩的承载力相对于圆柱的承载力分别增加了 5%, 19%。

图 11 (c)~(e) 的结果表明: 随着 E_p/E_s , c/E_s 和 φ 的增加, 矩形桩和 XCC 桩的承载力相对于等横截面面积圆柱的承载力增加百分比 $\bar{\omega}$ 几乎没有明显, 矩形桩和 XCC 桩的承载力相对于圆柱的承载力分增加了 9%~10% 和 11%~14%。同时表明参数 E_p/E_s , c/E_s 和 φ 不是异形效应的敏感参数。

图 11 (f) 结果表明随着土体剪胀角 ψ 的增加, $\bar{\omega}$ 逐渐减小, 即土体剪胀角增加, 横截面异形柱的异形效应逐渐减小。当 $\psi = \varphi$ 时, 土体退化为相关联流动法则, 此时横截面异形柱的异形效应最小。

图 11 (g) 中当 $\gamma_s L_p/E_s$ 取最大值 0.2 时, $\bar{\omega}$ 最小, 这是由于 $\bar{w}_t = 0.25$ 时, 桩顶沉降处于弹性阶段, 矩形桩和 XCC 桩与等横截面面积圆柱的承载力和沉降没有出现明显差异; 当 $\gamma_s L_p/E_s$ 在 0.001~0.1 时, $\bar{\omega}$ 也基本相等。因此参数 $\gamma_s L_p/E_s$ 也不是横截面异形效应的敏感参数。



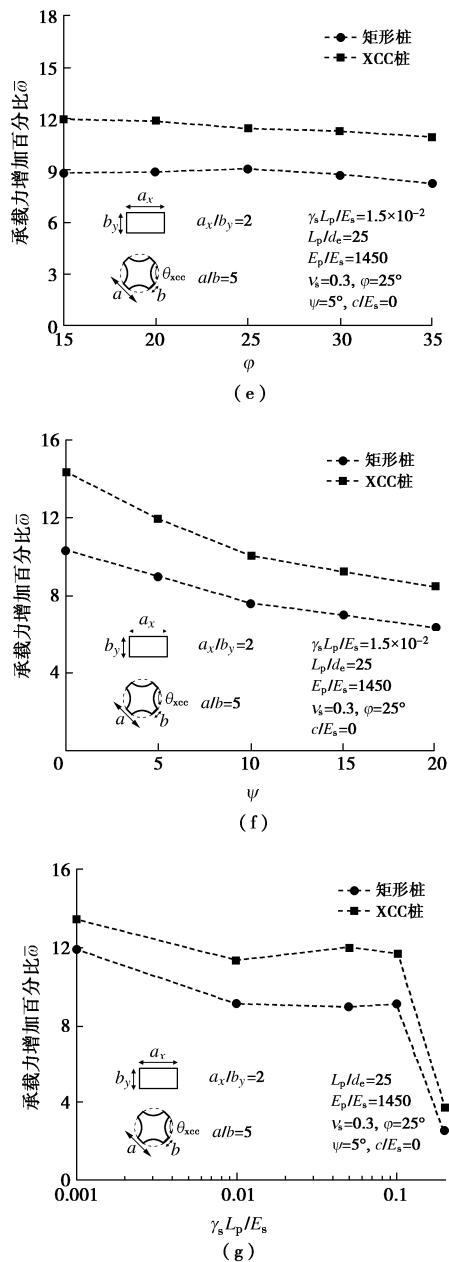


图 11 不同参数对横截面异形桩承载力增加量的影响

Fig. 11 Influences of different parameters on increment of bearing capacity of noncylindrical piles

6 结 论

本文提出的半解析法,计算时仅需要输入桩-土模型的几何与物理参数,能够获得与有限元相当的计算精度,但计算效率却明显高于3D有限元法。根据本文所提出的半解析法,对影响横截面异形桩异形效应的主要参数进行了详细的分析,得到以下3点结论。

(1) 当桩顶沉降处于弹性变形段时,桩的横截面参数 a/b 或 a_x/b_y 与土体参数(黏聚力、内摩擦角、剪胀角和重度)几乎不影响 $\bar{Q}_N - \bar{w}_t$ 曲线的斜率,而只影响桩极限承载力的大小;桩的长细比和桩-土模量比分别在小于40和5000时,对 $\bar{Q}_N - \bar{w}_t$ 曲线的斜率和桩的

极限承载力产生明显的影响,而在桩长细比和桩-土模量比分别超过40和5000时,对 $\bar{Q}_N - \bar{w}_t$ 曲线的斜率和承载力几乎没有影响。

(2) 在桩顶沉降处于弹性变形段时,等横截面面积的矩形桩、XCC桩和圆柱之间的桩顶沉降没有明显的差异,即未出现明显的异形效应,仅当桩顶沉降进入塑性变形段时,矩形桩和XCC桩的承载力或沉降才出现明显的异形效应。

(3) 在影响桩-土相互作用的所有参数中,仅有桩的横截面参数和土体的剪胀角为横截面异形效应的敏感参数,而其它参数均为不敏感参数。对于常规矩形桩和XCC桩横截面参数,即 $a/b=2$ 和 $a_x/b_y=5$ 时,矩形桩和XCC桩的承载力相对于等横截面面积圆桩的承载力可分别提高9%~10%和11%~14%。

参 考 文 献:

- [1] LI X C, ZHOU H, LIU H L, et al. Three-dimensional analytical continuum model for axially loaded noncircular piles in multilayered elastic soil[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2021, 45(18): 2654-2681.
- [2] SEED H B, REESE L C. The action of soft clay along friction piles[J]. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1957, 122(1): 731-754.
- [3] MINDLIN R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. Physics, 1936, 7(5): 195-202.
- [4] Poulos H G, Davis E H. The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers[J]. Géotechnique, 1968, 18(3): 351-371.
- [5] HIRAI H. Settlement analysis of rectangular piles in nonhomogeneous soil using a Winkler model approach[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2014, 38(12): 1298-1320.
- [6] 雷国辉, 洪鑫, 施建勇. 壁板桩承载特性的近似三维分析[J]. 岩土力学, 2004, 25(4): 590-594, 600. (LEI Guohui, HONG Xin, SHI Jianyong. Approximate three-dimensional analysis of load-carrying behaviour of barrettes[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(4): 590-594, 600. (in Chinese))
- [7] VALLABHAN C V G, MUSTAFA G. A new model for the analysis of settlement of drilled piers[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1996, 20(2): 143-152.
- [8] SHEN W Y, CHOW Y K, YONG K Y. A variational approach for vertical deformation analysis of pile group[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods

- in Geomechanics, 1997, **21**(11): 741-752.
- [9] SHEN W Y, CHOW Y K, YONG K Y. Variational solution for vertically loaded pile groups in an elastic half-space[J]. Géotechnique, 1999, **49**(2): 199-213.
- [10] LEE K M, XIAO Z R. A new analytical model for settlement analysis of a single pile in multi-layered soil[J]. Soils and Foundations, 1999, **39**(5): 131-143.
- [11] SEO H, PREZZI M. Analytical solutions for a vertically loaded pile in multilayered soil[J]. Geomechanics and Geoengineering, 2007, **2**(1): 51-60.
- [12] BASU D, PREZZI M, SALGADO R, et al. Settlement analysis of piles with rectangular cross sections in multi-layered soils[J]. Computers and Geotechnics, 2008, **35**(4): 563-575.
- [13] TEHRANI F S, SALGADO R, PREZZI M. Analysis of axial loading of pile groups in multilayered elastic soil[J]. International Journal of Geomechanics, 2016, **16**(2): 04015063.
- [14] 雷国辉, 詹金林, 洪鑫. 壁板桩群桩竖直荷载沉降关系的变分法分析[J]. 岩土力学, 2007, **28**(10): 2071-2076. (LEI Guohui, ZHAN Jinlin, HONG Xin. Variational analysis of load-settlement relationship of vertically loaded barrette groups[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(10): 2071-2076. (in Chinese))
- [15] 周航, 李籼橙, 刘汉龙, 等. 均质土中竖向受荷X形混凝土桩的三维弹性变分解[J]. 岩土力学, 2021, **42**(4): 1012-1024. (ZHOU Hang, LI Xiancheng, LIU Hanlong, et al. Three-dimensional variational elastic solution for axially loaded X-section cast-in-place concrete pile in homogeneous soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, **42**(4): 1012-1024. (in Chinese))
- [16] JEONG S, LEE J, LEE C J. Slip effect at the pile-soil interface on dragload[J]. Computers and Geotechnics, 2004, **31**(2): 115-126.
- [17] 吕亚茹, 丁选明, 刘汉龙, 等. 刚性荷载下现浇X形桩复合地基侧摩阻力数值分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(11): 2134-2140. (LÜ Yaru, DING Xuanming, LIU Hanlong, et al. Numerical analysis of side resistance of composite foundation with X-section cast-in-place concrete piles under rigid load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(11): 2134-2140. (in Chinese))
- [18] ZHANG Q Q, FENG R F, YU Y L, et al. Simplified approach for prediction of nonlinear response of bored pile embedded in sand[J]. Soils and Foundations, 2019, **59**(5): 1562-1578.
- [19] HAN F, SALGADO R, PREZZI M. Nonlinear analyses of laterally loaded piles-A semi-analytical approach[J]. Computers and Geotechnics, 2015, **70**: 116-129.
- [20] GUPTA B K, BASU D. Nonlinear solutions for laterally loaded piles[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2020, **57**(10): 1566-1580.
- [21] 周永强, 盛谦, 刘芳欣, 等. 一种修正的Drucker-Prager屈服准则[J]. 岩土力学, 2016, **37**(6): 1657-1664. (ZHOU Yongqiang, SHENG Qian, LIU Fangxin, et al. A study of modified Drucker-Prager yield criterion[J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, **37**(6): 1657-1664. (in Chinese))
- [22] ABBO A J, SLOAN S W. A smooth hyperbolic approximation to the Mohr-Coulomb yield criterion[J]. Computers & Structures, 1995, **54**(3): 427-441.
- [23] CHEN H H, LI L, LI J P, et al. A rigorous elastoplastic load-transfer model for axially loaded pile installed in saturated modified Cam-clay soils[J]. Acta Geotechnica, 2022, **17**(2): 635-651.
- [24] ZHOU H, LIU H L, YUAN J R. A novel analytical approach for predicting the noncylindrical pile penetration-induced soil displacement in undrained soil by combining use of cavity expansion and strain path methods[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2018, **42**(11): 1270-1305.
- [25] 詹云刚, 袁凡凡, 栾茂田. 纯摩擦型岩土介质本构积分算法及其在ABAQUS中开发应用[J]. 岩土力学, 2007, **28**(12): 2619-2623, 2628. (ZHAN Yungang, YUAN Fanfan, LUAN Maotian. Integration algorithm of constitutive equation for cohesionless-frictional geomaterial and its application to ABAQUS[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, **28**(12): 2619-2623, 2628. (in Chinese))
- [26] RANDOLPH M F. The response of flexible piles to lateral loading[J]. Géotechnique, 1981, **31**(2): 247-259.