

DOI: 10.11779/CJGE20211299

考虑颗粒破碎的砂土 UH 模型及其参数反演

熊海斌¹, 余 虔², 张 升¹, 童晨曦^{*1}, 兰 鹏¹, 刘光庆^{1,3}

(1. 中南大学土木工程学院, 湖南 长沙 410075; 2. 民航机场规划设计研究总院有限公司, 北京 101312;

3. 福建兆翔机场建设有限公司, 福建 厦门 361000)

摘 要: 颗粒破碎对粒状土临界状态的影响十分显著, 研究认为在 e - $\ln p$ 空间内, 粒状土的临界状态线会随着破碎的进行向下漂移, 而捕捉颗粒破碎量与临界状态线漂移量之间的一一映射关系是一项巨大的挑战。通过引入颗粒破碎参数 e_B 对砂土 UH 模型进行了修正, 并将其嵌入实数编码免疫遗传算法 (RIGA) 中, 构建了 RIGA-MUH 模型, 提出了可获取不同破碎程度下临界状态线的新方法。为得到更加准确的临界状态参数, 模型通过调整粒状土临界状态下在误差函数中的权重比进行优化改进, 并通过 Toyoura 砂和 Cambria 砂的常规排水三轴压缩试验结果, 验证模型的稳定性、合理性和准确性。结果表明, 该模型可以得到某一颗粒破碎量下精度较高的临界状态线, 为提出考虑颗粒破碎的本构方程提供一种新方法。

关键词: 颗粒破碎; 临界状态; UH 模型; 实数编码; 免疫遗传算法; 参数反演

中图分类号: TU441

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)01-0134-10

作者简介: 熊海斌(1998—), 男, 硕士研究生, 主要从事智能岩土工程的研究。E-mail: xiong_haibin@csu.edu.cn。

UH model and parameter inversion for crushable sands

XIONG Haibin¹, YU Qian², ZHANG Sheng¹, TONG Chenxi¹, LAN Peng¹, LIU Guangqing^{1,3}

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 2. China Airport Construction Group Corporation, Beijing 101312, China; 3. Fujian Panport Airport Construction Co., Ltd., Xiamen 361000, China)

Abstract: The effect of particle breakage on the critical state of granular soils is of great significance. The existing studies have shown that the critical state line (CSL) of granular soils in the e - $\ln p$ space shifts downward as a result of particle breakage. However, it remains a big challenge for capturing the degree of particle breakage and the movement of CSL. In this study, the UH model for sands is modified by introducing the particle breakage parameter e_B and embedded in the real number encoding immune genetic algorithm (RIGA) to establish the RIGA-MUH model, which proposes a new method that can obtain the CSLs for the sands with varying particle-size distributions. The model is optimized and improved to obtain more accurate critical state parameters by adjusting the weight ratio in the error function under the critical state of granular soils. The stability, rationality and accuracy of the model are verified through the results of conventional drainage triaxial compression tests on the Toyoura sand and Cambria sand. The results show that the proposed model can be used to obtain the CSLs with high accuracy under a certain amount of particle breakage, which provides new insight into the constitutive modeling of crushable sands.

Key words: particle breakage; critical state; UH model; real number encoding; immune genetic algorithm; parameter inversion

0 引 言

砂土广泛运用于桩基础工程、铁路路基工程等岩土工程领域中。在外荷载作用下, 砂土本身会持续地被压碎, 如中国南海用于填海造陆的主要材料钙质砂, 其在较低的围压下会产生颗粒破碎现象, 进而影响土体的力学性质^[1-2]。因此, 研究考虑颗粒破碎的粒状土本构模型具有重要意义^[3]。

为此, 学者们基于颗粒破碎相关试验前后得到的颗粒级配曲线 (PSD), 提出了一系列不同的颗粒破碎指标用于表征颗粒破碎量^[4-5]。在大量的试验研究和数

值分析结果中, 学者们发现 PSD 的变化显著影响临界状态线 (CSL) 在 e - $\ln p$ 空间内的位置^[3-4, 6-8]。其中, Daouadji 等^[6]基于颗粒破碎导致不均匀系数改变的现象, 提出了颗粒破碎导致 CSL 漂移的假设。此后, 大量学者验证了该假设, 认为颗粒破碎将导致 CSL 在 e - $\ln p$ 空间内截距变化^[3-4, 6-7]。值得注意的是, 通过常

基金项目: 国家自然科学基金项目 (52008402); 湖南省自然科学基金项目 (2021JJ40758); 湖湘高层次人才聚集工程项目 (2019RS1008)

收稿日期: 2021-12-07

***通信作者** (E-mail: cxtong@csu.edu.cn)

规试验方法很难得到不同破碎指标与临界状态的定量关系。其原因为：颗粒破碎在外荷载的作用下是持续发生的，导致 CSL 的漂移量时刻变化，进而无法控制达到临界状态时的颗粒破碎量。故通过常规试验方法难以得到在某一特定颗粒破碎程度下 CSL 的位置变化。

为解决这一问题，学者们通过数值模拟方法开展了系列研究^[4,8]。其中，Muir 等^[4]通过 DEM 数值模拟，以最大与最小粒径的比值 R_D 设计了不同的初始 PSD，得到了在低应力范围内 CSL 随着颗粒破碎指标 I_G 的增加而下降的结论。Li 等^[8]通过不断增大初始不均匀系数 C_u 模拟一系列不同 PSD 下的三轴试验，建立了 C_u 与 CSL 位置之间的关系。但这类数值模拟研究都是基于颗粒为理想材料即颗粒在受荷过程不破碎的假设，设计一系列初始 PSD 模拟不同的颗粒破碎程度，来建立颗粒破碎与 CSL 位置之间的定量关系。故上述研究只揭示了初始级配对临界状态参数的影响，忽视加载过程中土体级配的演化。

考虑到 CSL 位置变化与颗粒破碎具有复杂的非线性映射关系，传统的数学方法如最小二乘法等难以解决。因此，针对这类复杂的系统问题，机器学习智能优化反演算法被广泛应用^[9-10]。其中，以 Holland 等^[10]开发的遗传算法（GA）最为典型。该算法以适应度作为目标进行随机搜索寻优，但当处理多峰值问题时，易较早地收敛于局部最优解，即发生早熟现象。而保持种群个体的多样性对于解决该问题尤为重要，故学者们对 GA 中可增加种群多样性的交叉/变异算子进行了改进^[11]。随着人工免疫系统的发展，学者们注意到其与 GA 结合的优越性^[12-13]。王煦法等^[12]在 GA 的基础上，以个体平均信息熵作为个体是否相同的标准，以此计算个体浓度，并通过个体浓度与适应度对选择概率进行调整来确保个体多样性。Han 等^[13]在王煦法的基础上，以各个个体向量之间的几何距离作为判断标准，并在选择概率的公式中将浓度以指数形式进行表示。本文则直接以个体对问题解决的程度来考虑个体之间是否相同，即适应度是否相同，并综合考虑浓度和适应度进行搜索寻优，更好地在保持种群多样性的基础上搜索适应度更大的个体。

姚仰平团队基于修正剑桥（MCC）模型，建立了考虑超固结性的统一硬化（UH）模型^[14-15]，并针对不同土的不同特征对 UH 模型进行了拓展^[16-18]。其中，砂土 UH 模型^[18]可以充分考虑砂土的 3 种典型特性：压硬性、剪胀性以及临界状态特性，该模型继承了 MCC 模型的特色，参数较少，且物理意义明确。因此，本文首先建立考虑颗粒破碎的砂土 UH 模型（MUH 模型），并将其嵌入实数编码免疫遗传算法（RIGA）

中构建 CSL 参数反演模型（RIGA-MUH 模型）。最后，结合不同砂土的常规三轴压缩试验数据，分析了模型的稳定性、合理性和准确性，得到了平均主应力 p 为 0~30 MPa 内颗粒破碎指标与在 $e-\ln p$ 空间内的 CSL 位置之间的一一映射关系。

1 考虑颗粒破碎的砂土 UH 模型

姚仰平等^[18]在 UH 模型的基础上增加了压硬性参数 Z/p_s 、剪胀性参数 m 和临界状态参数 χ ，得到了砂土 UH 模型，其在 $p-q$ 平面上的本构关系为

$$\begin{Bmatrix} dp \\ dq \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K \cdot A_1 & 3KG \cdot A_2 \\ 3KG \cdot A_2 & 3G \cdot A_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_v \\ d\varepsilon_d \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中： K 和 G 分别为弹性体积模量和弹性剪切模量； A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 为不同的塑性影响因子。

该模型在 $e-\ln p$ 空间内的 CSL 为

$$e_{cs} = Z - \lambda \ln \left(\frac{p + p_s}{1 + p_s} \right) - \overline{\Delta e_p} \quad (2)$$

式中： e_{cs} 为临界状态下孔隙比； Z 为在 $e-\ln p$ 空间内等向固结线（NCL）上平均主应力 p 为 1 kPa 时所对应的孔隙比； λ 为在 $e-\ln p$ 空间内 NCL 渐近线的斜率； $\overline{\Delta e_p}$ 为在任意一 p 下，在 $e-\ln p$ 空间内 CSL 与 NCL 之间的垂直距离，其表达式为

$$\overline{\Delta e_p} = (\lambda - \kappa) \cdot \ln \left(\frac{p}{(p + p_s)(1 - \chi)} + 1 \right) \quad (3)$$

式中， κ 为在 $e-\ln p$ 空间内回弹再加载曲线的斜率。

此外，有学者研究表明^[3,19]，在 $e-\ln p$ 空间内，不同破碎程度的土体在高应力水平下，其 CSLs 均会趋于同一条线，且与极限压缩线平行。因此，将式（3）代入式（2），对 $\ln p$ 求偏导，结果为

$$\frac{\partial e_{cs}}{\partial \ln p} = -\frac{\lambda}{1 + p_s/p} + \frac{(\lambda - \kappa) \cdot (1 - \chi)}{1 + 2 \cdot p_s/p + p_s^2/p^2} - \frac{(\lambda - \kappa) \cdot (1 - \chi)}{1 + p_s/p} \quad (4)$$

从式（4）可知，当 p 足够大时，CSL 在 $e-\ln p$ 空间内的斜率最终趋于 $-\lambda$ 。因此，为建立考虑颗粒破碎因素的砂土 UH（MUH）模型，本文引入了颗粒破碎参数 e_B ，如图 1 所示，其物理含义为由颗粒破碎产生的额外孔隙比变化量，其几何含义为在 $e-\ln p$ 空间内 CSL 沿斜率为 $-\lambda$ 的方向漂移位移在 e 轴方向上的投影距离，将砂土 UH 模型在 $e-\ln p$ 空间内 CSL 修正为

$$e_{cs} = Z - \lambda \ln \left(\frac{p_B + p_s}{1 + p_s} \right) - e_B - (\lambda - \kappa) \cdot \ln \left(\frac{p_B}{(p_B + p_s)(1 - \chi)} + 1 \right) \quad (5)$$

式中， p_B 与颗粒破碎参数 e_B 类似， $\ln p_B$ 的几何含义

为在 $e-\ln p$ 空间内 CSL 沿斜率为 $-\lambda$ 的方向漂移位移在 $\ln p$ 轴方向上的投影距离 (如图 1 所示), p_B 为其数值解, 表达式为

$$p_B = p / \exp \frac{e_B}{\lambda} \quad (6)$$

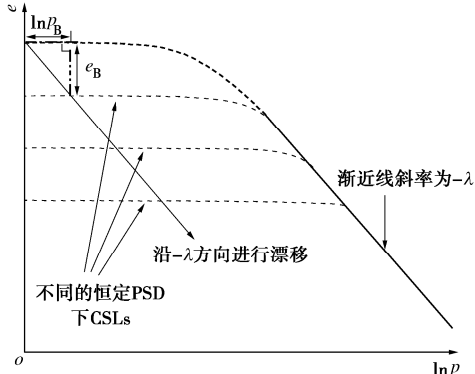


图 1 CSL 随 PSD 漂移及颗粒破碎参数示意图

Fig. 1 Schematic diagram of shifting CSL with varying PSDs and particle breakage parameter

当 $e_B=0$ 时, $p_B=p$, 该 CSL 退回为砂土 UH 模型 CSL。同时, 为考虑不同的应力比 η 将发生不同程度的颗粒破碎而导致不同程度的漂移现象, 将砂土 UH 模型中的 e_η 表达式修正为

$$e_\eta = Z - \lambda \ln \left(\frac{p_b + p_s}{1 + p_s} \right) - e_b - (\lambda - \kappa) \cdot \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{\eta^2}{M^2 - \chi \eta^2} \right) p_b + p_s}{p_b + p_s} \right] \quad (7)$$

式中, e_η 为在 $e-\ln p$ 空间内等应力比 η 线上任意一 p 所对应的孔隙比。 p_b 与 p_B 类似, 其表达式为

$$p_b = p / \exp \left(\frac{e_b}{\lambda} \right) \quad (8)$$

式中, e_b 为不同等应力比 η 上在 $e-\ln p$ 空间内 e_η 沿 e 轴方向发生漂移位移, 考虑到其与 p 呈正相关性, 可得其表达式为

$$e_b = (p+1)^\beta - 1 \quad (9)$$

式中, β 为不同等应力比 η 上的 e_b 线弯曲程度, 且 $0 < \beta < 1$ 。当 $p=p_{cs}$ 时, $e_b=e_B$, 可知其表达式为

$$\beta = \frac{\ln(e_B + 1)}{\ln(p_{cs} + 1)} \quad (10)$$

式中, p_{cs} 为临界状态下的 p 。

2 基于 RIGA 临界状态参数反演

相比原始砂土 UH 模型, MUH 模型中增加了颗粒破碎参数 e_B , 共 9 个参数; 当 $e_B=0$ 时, MUH 模型退回为砂土 UH 模型。MUH 模型参数中, 与 CSL 位置相关的模型参数为颗粒破碎参数 e_B 和临界状态参

数 χ , 本文将这两个参数统称为 CSL 参数。MUH 模型中除 CSL 参数外, 其余 7 个参数均可通过等向固结和常规三轴试验进行有效标定。对于 CSL 参数, 本文通过 Python 代码, 实现了实数编码遗传算法 (RGA), 并将 MUH 模型嵌入 RGA, 构建了考虑颗粒破碎的 CSL 参数反演模型, 即 RGA-MUH 模型; 此外, 引入免疫超参数, 建立了 RIGA-MUH 模型。

2.1 RGA-MUH 模型的构建

RGA-MUH 模型基于 GA 进行模型构建, 如图 2, 3 所示。

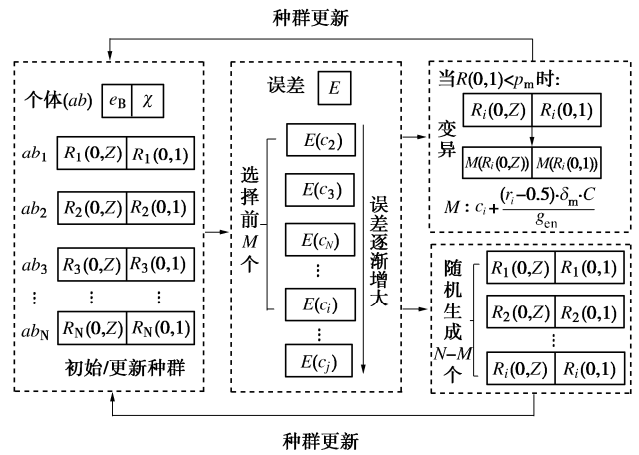


图 2 GA 流程图

Fig. 2 Flow chart of GA

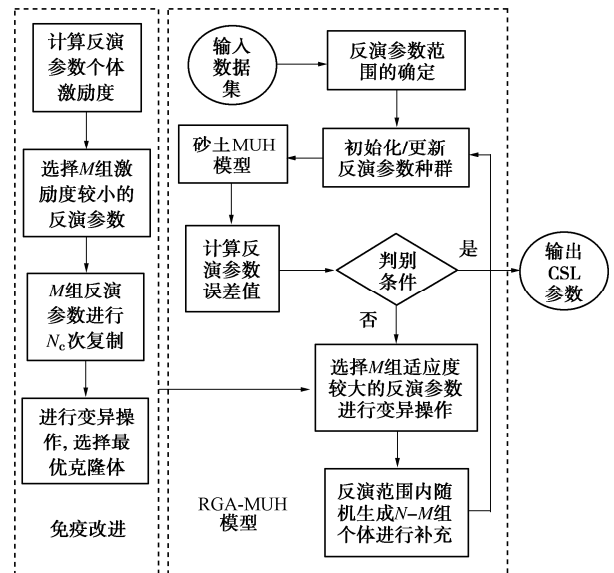


图 3 RIGA-MUH 模型流程图

Fig. 3 Flow chart of RIGA-MUH model

具体实现步骤如下:

(1) 反演参数范围的确定。对待解决的问题进行分析, 确定模型待反演参数为颗粒破碎参数 e_B 和临界状态参数 χ 的反演范围分别为 $(0, Z)$ 和 $(0, 1)$, 其中, Z 与式 (2) 中的含义相同。

(2) 初始化反演参数种群。在步骤 (1) 中所确

定的待反演参数范围内随机生成 N 组 CSL 参数, 即 N 个个体, 构成初始种群, 其中, N 为种群规模。

(3) 计算反演参数的误差值。根据 MUH 模型临界状态先验知识, 得到评价反演参数优劣的误差函数, 再将种群个体代入其中, 得到每个个体的误差值。其中, 模型的误差函数将在后续章节中进行详细介绍。

(4) 选择 M 组误差值较小的反演参数进行变异操作。按步骤 (3) 中所得到的误差值, 对种群中所有个体从小到大进行排序, 选择前 M 组反演参数。同时, 为考虑种群个体变异的随机性, 在 $(0, 1)$ 范围内对应生成 M 个随机数, 若随机数小于变异概率 p_m , 则对其对应个体进行变异优化, 其计算表达式为

$$c_i = c_i + \frac{(r_i - 0.5) \cdot \delta_m \cdot C}{g_{cn}} \quad (11)$$

式中: c_i 为种群中第 i 个个体; r_i 为第 i 个个体在 $(0, 1)$ 范围内所对应生成的随机数; δ_m 为变异系数; C 为反演参数取值范围最大值与最小值之差; g_{cn} 为种群代数。

(5) 反演参数种群更新。在反演范围内随机生成的 $N-M$ 个个体, 并与选择变异操作后产生的 M 个个体结合, 生成新种群。

(6) 终止判断条件。达到最大迭代次数 G 且误差值在最后 10 代内无明显变化, 停止迭代, 得到最优反演参数。否则回到步骤 (3)。

2.2 引入免疫超参数改进 GA

本文为降低 GA 在搜索寻优过程中发生早熟现象的概率, 参考免疫理论, 借鉴生物抵抗外来抗原的免疫机制, 在 RGA 的基础上引入激励度系数 α 、克隆次数 N_c 和相似度阈值 δ_s 三个免疫超参数进行改进。得到实数编码免疫遗传算法 (RIGA), 并将 MUH 模型嵌入其中, 构建 RIGA-MUH 模型, 如图 3 所示, 具体改进方法如下:

(1) 选择操作改进 (免疫选择)。将 RGA 步骤

(4) 中选择个体的评价指标改为考虑个体误差和多样性的综合质量指标, 称其为激励度。其中, 衡量个体多样性评价指标为浓度, 其计算表达式为

$$d_{cn}(c_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S(c_i, c_j) \quad (12)$$

式中, $d_{cn}(c_i)$ 为种群中第 i 个个体的浓度, N 为种群规模, $S(c_i, c_j)$ 为第 i 个个体和第 j 个个体是否相似, 其计算表达式为

$$S(c_i, c_j) = \begin{cases} 0 & (|E(c_i) - E(c_j)| \geq \delta_s) \\ 1 & (|E(c_i) - E(c_j)| < \delta_s) \end{cases} \quad (13)$$

式中: δ_s 为相似度阈值, 即为衡量两个个体是否相似的评价指标; $E(c_i)$ 为第 i 个个体的误差值。

从浓度表达式中可以看出, d_{cn} 值越小, 与其不同的个体越多; 反之越少。故为了保证种群的多样性, 应对 d_{cn} 值越大的个体进行抑制, 选择 d_{cn} 值和误差值均较小的优良个体。因此, 本文 RIGA-MUH 模型中提出的激励度函数表达式为

$$s_{im}(c_i) = \alpha \cdot E(c_i) + (1 - \alpha) \cdot d_{cn}(c_i) \quad (14)$$

式中: $s_{im}(c_i)$ 为种群中第 i 个个体的激励度; α 为激励度系数, 且 $0 < \alpha < 1$ 。

(2) 增加免疫克隆操作。将免疫选择后激励度较小的前 M 组反演参数进行 N_c 次复制, 并对每个克隆体进行变异操作, 按激励度排序保留最佳克隆变异体, 得到 M 个优良个体。其中, 免疫变异操作与 RGA 中的变异操作相同。

2.3 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型评价指标

土的临界状态与土受载下应力应变的变化密切相关, 故采用孔隙比和偏应力作为模型的评价指标。另外, 由于孔隙比和偏应力有数量级的差别, 为保证模型精度, 在计算模型误差时对评价指标的误差进行归一化处理, 归一化表达式为

$$\bar{x} = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} (M_{\max} - M_{\min}) - M_{\min} \quad (15)$$

式中: x 为输入变量的实际值; x_{\max} , x_{\min} 分别为输入变量的最大值和最小值; \bar{x} 为输入变量归一化后所得值; M_{\max} , M_{\min} 分别为归一化后取值范围的边界最大值和边界最小值, 模型取 0 和 1。

此外, 土体在受载的过程中, 会不断地发生颗粒破碎, PSD 在此过程中也时刻变化, 随之 CSL 不断迁移, 故传统的临界状态定义不再适用。基于此, 学者们扩充了传统临界状态定义, 认为在轴向应变 ε_1 较大时达到此 PSD 状态的临界状态^[20-21]。因此, 模型中认为当轴向应变 ε_1 达到某一定值即临界轴向应变时土体达到该 PSD 状态的临界状态。故提高轴向应变 ε_1 大于临界轴向应变后评价指标所产生的误差在总误差中的占比, 可以更好地保证模型输出 CSL 参数的准确性。

为了达到这一目的, 本文在误差函数中引入了一个新的指标即临界误差权重 w_c , 其为大于 1 的实数, 得到模型的误差函数, 其表达式为

$$E = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n_c} (|\bar{e}_{ei}| + |\bar{e}_{qi}|) + w_c \sum_{i=n_c+1}^n (|\bar{e}_{ei}| + |\bar{e}_{qi}|) \right] \quad (16)$$

式中: n , n_c 分别为数据点总数和轴向应变 ε_1 达到临界轴向应变之前的数据点数; $|\bar{e}_{ei}|$, $|\bar{e}_{qi}|$ 分别为孔隙比误差绝对值和偏应力误差绝对值归一化后所得值。

3 模型超参数的确定与稳定性分析

3.1 数据集的收集

为了验证 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型,

本文采用 Verdugo 等^[22]对 Toyoura 砂在初始围压为 500 kPa 下的常规三轴试验结果(e_0 为 0.810, 0.886, 0.960) 作为验证数据集。表 1 为结合其等向压缩试验结果得到的砂土 UH 模型参数。

表 1 Toyoura 砂 UH 模型参数

Table 1 UH model parameters of Toyoura sand

M	χ	ν	Z	m	λ	κ	N
1.25	0.55	0.3	0.943	1.8	0.135	0.04	1.973

如图 4 所示, 将验证数据集和其砂土 UH 模型的预测结果, 绘制在 $(J_{2D})^{0.5}-J_1-e$ 空间中, 其中, $(J_{2D})^{0.5}$ 为第二不变偏应力张量; J_1 为第一不变应力张量; e 为孔隙比。结果表明, 砂土 UH 模型对验证数据集拟合效果较好, 故可采用该数据集对 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型进行验证。

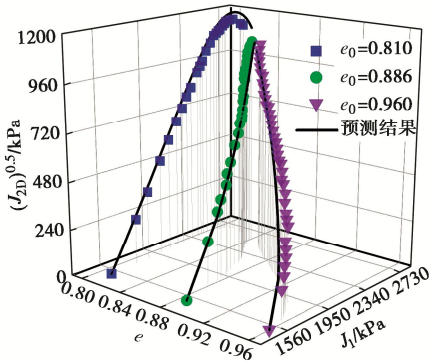


图 4 Toyoura 砂的三轴试验结果和预测结果对比

Fig. 4 Comparison between triaxial test results and predicted results for Toyoura sand

3.2 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型临界误差权重 w_c 的确定

超参数优化是机器学习的关键组成部分, RGA-MUH 模型综合考虑优化时间和结果精度, 如表 2 所示为模型所设置的参数取值。同时, 根据验证数据集的应力应变曲线特征, 将临界轴向应变取为 20%。

表 2 RGA-MUH 模型超参数

Table 2 Hyperparameters of RGA-MUH model

参数名称	RGA 参数取值
种群规模 N	50
变异概率 p_m	0.7
选择操作后个体数 M	25
最大迭代次数 G	100
变异系数 δ_m	0.5

由于验证数据集的初始围压为 500 kPa, 其颗粒破碎量可忽略不计, 颗粒破碎参数 e_b 为 0。故采用验证数据集作为输入, 临界状态参数 χ 作为单一输出, 分别取临界误差权重 w_c 为 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0, 4.5, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0 和 7.5, 对临界误差权重 w_c 的取值进行分析。由于 RGA 的早熟现象, 导致 RGA-MUH 模型输出结果的离散性较大, 故其输出结果以 5 组输

出值中抛弃异常值后的输出值的平均数表示。

图 5 为不同初始孔隙比下 RGA-MUH 模型输出的临界状态参数 χ 随临界误差权重 w_c 的变化关系, 其中虚线表示实际标定值即 0.55。结果表明, 在不同初始孔隙比的验证数据集下, 随着临界误差权重 w_c 的增加 RGA-MUH 模型结果刚开始稳定不变后突然增大再趋于稳定。主要原因为: 在本研究中, 计算模型误差时, 采用了误差归一化处理, 误差最大值均为 1, 导致出现第一稳定阶段实际误差较大(图 6)而计算误差较小的情况。然而, 随着 w_c 的不断增大, 最终解的误差与第一阶段稳定解的误差均在不断增大, 但由于第一稳定阶段 w_c 较小导致临界状态误差值较大, 故最终

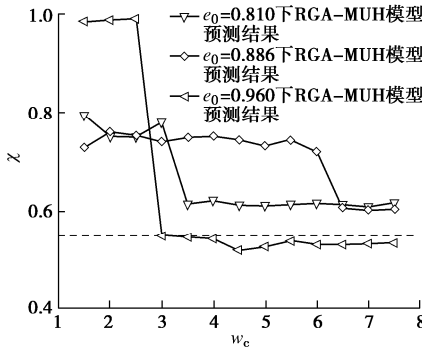
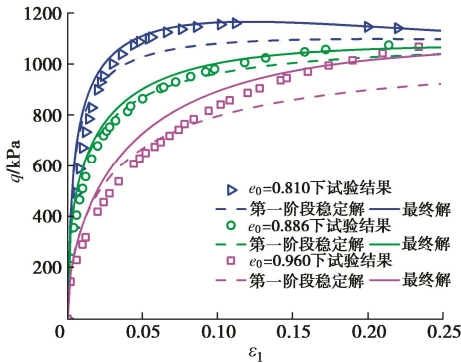
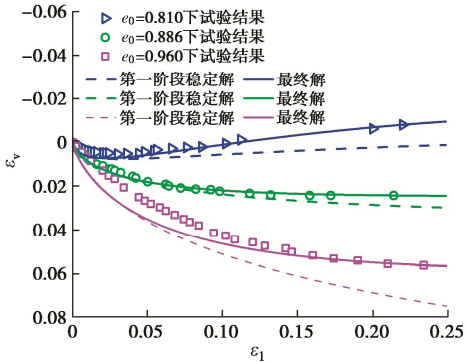


图 5 不同初始孔隙比下 $\chi-w_c$ 曲线

Fig. 5 $\chi-w_c$ curves under different initial void ratios



(a) 偏应力 q -轴应变 ϵ_1 关系



(b) 体应变 ϵ_v -轴应变 ϵ_1 关系

图 6 第一阶段稳定解与最终解预测结果对比

Fig. 6 Comparison of predicted results between first-stage stable solution and final solution

解误差增大的速度小于第一阶段稳定解的误差速度。因此, 当增大到某一值时, 最终解的误差小于第一阶段稳定解的误差, 故呈现出“刚开始稳定不变后突然增大再趋于稳定”的规律。

另外, 当临界误差权重 w_c 大于等于 6.5, 3 组数据输出结果均趋于稳定。考虑到 w_c 过大将导致非临界状态误差在总误差中的占比太小而影响模型整体结果的精度, 故 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型的临界误差权重 w_c 确定为 6.5。

3.3 RIGA-MUH 模型免疫超参数的确定

模型在搜索寻优时, 为综合考虑个体误差和多样性, 引入了激励度系数 α 、克隆次数 N_c 和相似度阈值 δ_s 3 个免疫超参数。其中, 激励度系数是控制两个因素的权重, 其值越大, 表示搜索寻优过程中考虑个体误差影响越多; 克隆次数用于保留激励度较大个体, 防止搜索寻优过程中破坏优良个体, 可以保证种群整体的多样性; 相似度阈值是用来浓度计算的, 其值越大, 表示个体多样性变化越小, 将会弱化多样性因素在搜索寻优过程中的影响。3 个免疫超参数对种群多样性影响方式不同, 激励度系数直接对多样性的影响程度进行控制, 而克隆次数和相似度阈值都是通过改变自身多样性大小进行控制; 前者是总体调控, 而后者是多样性内部调控。

因此, 本文不考虑 3 个免疫超参数之间的交互作用对模型性能的影响, 每一参数设计 3 种水平, 选用 $L_9(3^4)$ 正交表, 并设置一空列用于后续各参数显著性分析。根据设计的正交表, 采用初始孔隙比为 0.886 的验证数据集作为输入, 临界状态参数 χ 作为单一输出。表 3 列出了免疫超参数分析试验方案及结果。

表 3 RIGA-MUH 模型免疫超参数分析试验方案及结果

Table 3 Experimental protocols and results of immune hyperparameter analysis of RIGA-MUH model				
试验号	激励度系数 α	克隆次数 N_c	相似度阈值 δ_s	试验结果
1	1(0.3)	1(3)	1(0.1)	0.621
2	1	2(6)	2(0.2)	0.603
3	1	3(9)	3(0.3)	0.610
4	2(0.6)	1	2	0.623
5	2	2	3	0.594
6	2	3	1	0.622
7	3(0.9)	1	3	0.597
8	3	2	1	0.596
9	3	3	2	0.597

根据正交试验结果, 可以看出当激励度系数取 0.9 时, 模型结果基本无变化, 且较为准确。换言之, 当激励度系数取值合适时, 克隆次数和相似度阈值在一

定范围内波动, 故三者相互作用关系不会影响模型的准确性。此后, 计算各参数的统计量, 通过假设检验的方法, 采用 F 值进行显著性分析, 各参数方差分析见表 4。并利用统计学理论, 可以得到在显著性水平为 0.1 下显著临界值 $F_{0.90}(2, 2)=9$ 。

表 4 各参数方差分析

Table 4 Analysis of variance for each parameter				
方差来源	平方和	自由度	均方差	F 值
激励度系数 α	0.000494	2	0.000247	5.501
克隆次数 N_c	0.000457	2	0.000229	5.100
相似度阈值 δ_s	0.000284	2	0.000142	3.163
空列误差	0.0000897	2	0.0000449	
总和	0.00132	8		

结果表明, 3 个免疫超参数的 F 值结果均小于 9, 说明 3 个参数对 RIGA-MUH 模型性能没有明显影响的可能性有 90%, 即 RIGA-MUH 模型本身相对稳定。比较各参数所对应的 F 值, 可以得到各参数对模型性能影响程度按由强到弱的顺序依次为激励度系数 α 、克隆次数 N_c 和相似度阈值 δ_s , 故应优先确定前两个参数的取值。据表 3 可知, 随着激励度系数 α 不断增大, 模型精度持续增加, 而随着克隆次数 N_c 持续增长, 模型精度先增大后减小, 故选择正交试验中试验号为 8 的参数值作为 RIGA-MUH 模型免疫超参数值。

3.4 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型稳定性比较

为了验证 RIGA 早熟现象能否得到解决。本文将验证数据集分别用 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型进行 10 次重复计算, 如图 7 为 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型稳定性分析对比。其中, 异常值被定义为小于下四分位数 $Q_1-1.5IQR$ 或大于上四分位数 $Q_3+1.5IQR$ 的值。

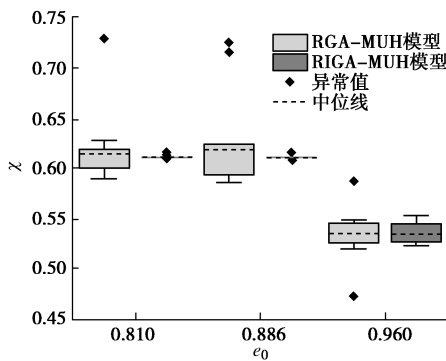


图 7 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型稳定性分析对比
Fig. 7 Comparison of stability analysis between RGA-MUH model and RIGA-MUH model

图 7 表明, 以初始孔隙比为 0.810 和 0.886 的验证数据集作为输入时, RIGA-MUH 模型的稳定性明显优于 RGA-MUH 模型; 以初始孔隙比为 0.960 的验证数

据集作为输入时，RIGA-MUH 模型的稳定性与 RGA-MUH 模型相当，但 RGA-MUH 模型在任意一组验证数据下均会产生异常值，表明其寻优过程中陷入局部最优即发生早熟现象。故改进后的模型可以有效地解决 GA 的早熟现象，提高模型的稳定性。

此外，将 RIGA-MUH 模型的输出结果代入 MUH 模型中对验证数据的应力应变关系进行预测，如图 8 所示为模型预测结果与试验结果对比。

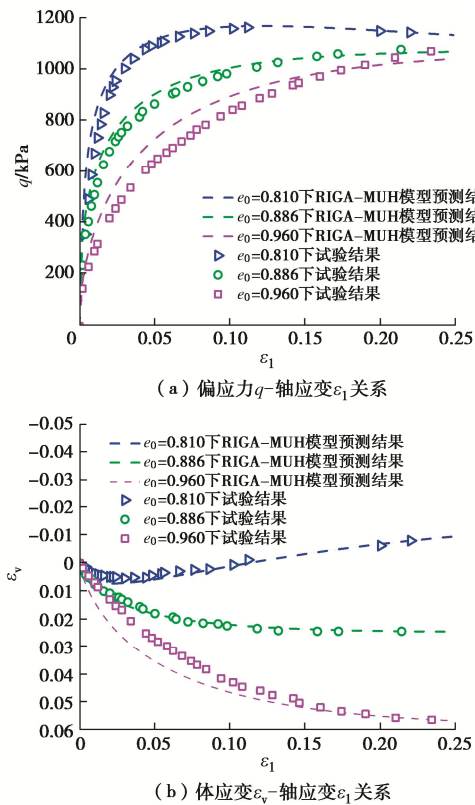


图 8 Toyoura 砂试验结果与模型预测结果

Fig. 8 Test results and model predictions of Toyoura sand

图 8 表明，预测结果在整体上可以较好地反映砂土的应力应变趋势，且在数值上也较为接近。这表明 RIGA-MUH 模型得到的临界状态参数 λ 具有合理性。综上所述，RIGA-MUH 模型在稳定上优于 RGA-MUH 模型，且该模型输出结果较为准确，故 RIGA-MUH 模型可以用于 CSL 参数的反演。

4 实例分析

4.1 数据来源

为了验证考虑颗粒破碎因素下 RIGA-MUH 模型的准确性和探究颗粒破碎量与 CSL 位置变化的一一映射关系，本文采用 Yamamuro 等^[23]对 Cambria 砂的排水三轴试验结果作为实例数据集进行分析。该实例数据集由初始孔隙比 e_0 为 0.52 的 Cambria 砂在围压分别为 5.8, 8.0, 11.5, 15.0, 17.2 MPa 下的排水三轴压

缩试验结果构成。结合其等向压缩试验结果对 MUH 模型参数进行标定，其结果如表 5 所示。同时，根据实例数据集的应力应变曲线特征，取临界轴向应变为 35%。

表 5 RIGA-MUH 模型参数

Table 5 Parameters of RIGA-MUH model						
M	ν	Z	m	λ	κ	N
1.45	0.1	0.61	3	0.112	0.0102	1.5578

关于颗粒破碎量的衡量，本文采用 Hardin^[5]提出的颗粒破碎指标 B_r ，其表达式为

$$B_r = \frac{B_t}{B_p} \quad (17)$$

式中： B_p 为初始颗粒级配曲线与 0.074 mm 粒径线之间的面积； B_t 为试验前后的颗粒级配曲线之间的面积。如图 9 所示， P_0 和 P_1 分别为初始和试验后的 PSD。

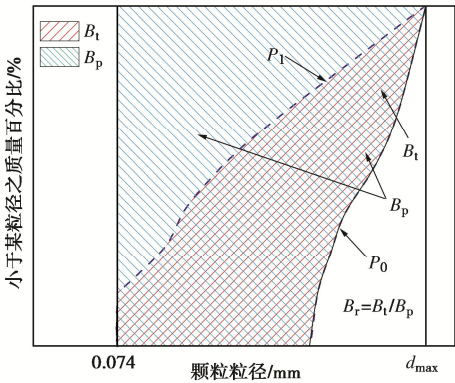


图 9 B_r 定义

Fig. 9 Definition of B_r

此外，表 6 列出了 Cambria 砂在不同围压下达到临界状态时的 B_r 数值。可以看出：当围压小于 15000 kPa 时， B_r 随围压增大而持续增长；当围压达到 15000 kPa 后， B_r 趋于稳定，表明颗粒破碎不再进行。

表 6 不同围压下颗粒破碎指标 B_r

Table 6 Values of B_r under different confining pressures					
围压 /kPa	5800	8000	11500	15000	17200
B_r	0.151	0.247	0.280	0.341	0.340

4.2 CSL 参数预测结果验证

将实例数据集分别输入 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型内对 CSL 参数进行预测，如表 7 所示为模型预测结果。由 RIGA-MUH 模型预测结果可知，随着围压的持续增加，颗粒破碎参数 e_b 不断增大，表明在 e - $\ln p$ 空间内 CSL 随着颗粒破碎不断进行而持续向下漂移，符合漂移现象特征，即初步表明 RIGA-MUH 模型输出结果较为合理。

为更好地对比 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型的准确性以及 MUH 模型与 UH 模型对存在颗粒破

碎现象的砂土试验数据的预测效果, 根据表 7 中 CSL 参数, 对实例数据集的应力应变关系进行预测, 并将实例数据集分为两组, 分别为中高围压组 (5.8, 8.0, 1.15 MPa) 和高围压组 (11.5, 15.0, 17.2 MPa)。

表 7 RIGA-MUH 模型和 RGA-MUH 模型预测结果

Table 7 Predicted results of RIGA-MUH and RGA-MUH models

参数名称		围压/MPa				
		5.8	8.0	11.5	15.0	17.2
RIGA	χ	0.886	0.899	0.883	0.866	0.843
	e_B	0.072	0.090	0.114	0.215	0.237
RGA	χ	0.827	0.883	0.926	0.883	0.816
	e_B	0.115	0.151	0.088	0.228	0.266

图 10, 11 为两组围压下排水三轴压缩试验结果、砂土 UH 模型预测结果、RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型预测结果对比图。首先, 对比 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型预测结果, 在剪应力变化中, 两者预测结果基本一致; 但在体应变变化中, 轴向应变较大时, RIGA-MUH 模型的预测结果明显更为准确。其次, RIGA-MUH 模型预测结果相比砂土 UH 模型预测结果, 在体应变变化中, 轴向应变较大时, 其预测结果明显更为准确; 在剪应力变化中, 轴向应变较小时, 其预测效果明显更佳。且 RIGA-MUH 模型预测结果在整体上可以较好地反映发生颗粒破碎现象时砂土的应力应变趋势, 在数值上也较为接近, 验证了 RIGA-MUH 模型的准确性。

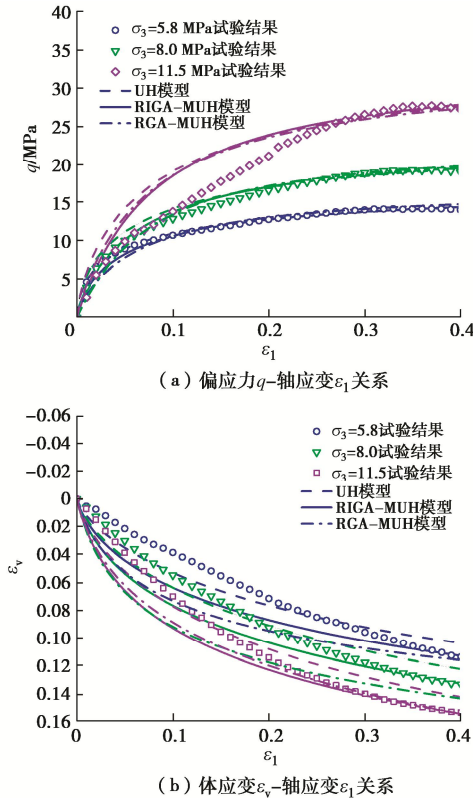


图 10 Cambria 砂中高围压组试验结果与模型预测结果对比
Fig. 10 Comparison between test results and model predictions for Cambria sand subjected to medium and high confining pressures

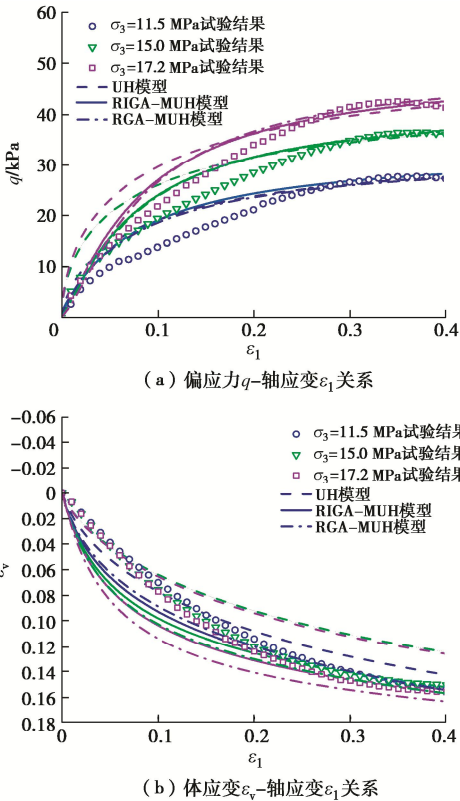


图 11 Cambria 砂高围压组试验结果与模型预测结果对比
Fig. 11 Comparison between test results and model predictions for Cambria sand subjected to high confining pressure

但对比图 10 (a), 11 (a) 可以看出, 当围压为 5.8, 8.0 MPa 时, 模型整体预测结果较好; 而当围压为 11.5, 15.0, 17.2 MPa 时, 轴向应变较小时偏应力增长速度较快, 主要原因是: 颗粒破碎将导致砂土体积应变增大, 使得其直接进入剪缩阶段, 导致其初始抗剪强度较低; 且随着围压的增大, 砂土的颗粒破碎对其剪切强度劣化的影响增大^[1]。从本质上来说, 在轴向应变较小时, 偏应力的增长速度由初始剪切模量控制, 初始围压的变化将导致初始颗粒破碎量变化, 进而引起了初始剪切模量变化。并且试验结果表明, 初始剪切模量随着平均粒径 D_{50} 增大而增加^[24]。在本研究中, 随着初始围压的不断增大, 初始颗粒破碎量不断增加, 细颗粒不断增加, 导致平均粒径 D_{50} 不断减小, 初始剪切模量不断减小, 故在较高围压下, 其轴向应变较小时偏应力增长速度较快。

4.3 颗粒破碎指标 B_r 与 CSL 位置的关系

将表 7 中 RIGA-MUH 模型所得到的 CSL 参数, 代入式 (5) 中, 得到如图 12 所示的不同颗粒破碎指标 B_r 下的 CSLs, 并将不同围压下 Cambria 砂的临界状态点绘制在其对应 CSL 上。

结果表明, 随着 B_r 的不断增大, 其对应的 CSL 在 $e-\ln p$ 空间内持续向下移动。当 B_r 达到 0.340 后, 即在 p 超过 30 MPa 后, Cambria 砂 CSL 达到破碎完

成阶段, CSL 在 e - $\ln p$ 空间内的位置基本不变。另外, 随着 B_r 的不断增大, 其 Cambria 砂的临界状态点对应的临界状态线的切线斜率不断减小, 这一现象也验证了现有关于颗粒破碎导致 CSL 在 e - $\ln p$ 空间内发生偏转的规律^[25-26]。

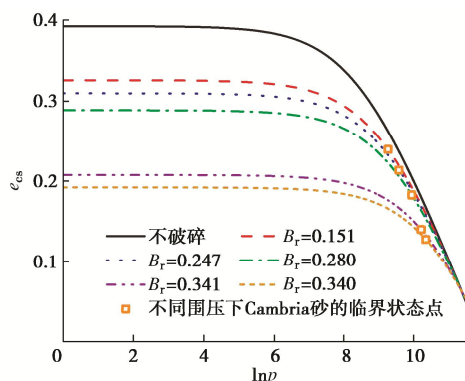


图 12 Cambria 砂不同 B_r 下的 CSL

Fig. 12 CSLs of Cambria sands with different B_r

图 13 为 Cambria 砂 CSL 截距 Z_{cs} 与 B_r 之间的关系。结果表明, p 在 0~30 MPa, Cambria 砂 B_r 与 CSL 在 e - $\ln p$ 空间内的截距 Z_{cs} 呈线性负相关。与其他相关研究中的双曲线负相关规律^[27]不一致, 其原因为本文研究的是 B_r 在 (0, 0.35) 与 CSL 在 e - $\ln p$ 空间内的截距之间的规律, 而其他研究是全 B_r 范围下即 (0, 1) 的规律。

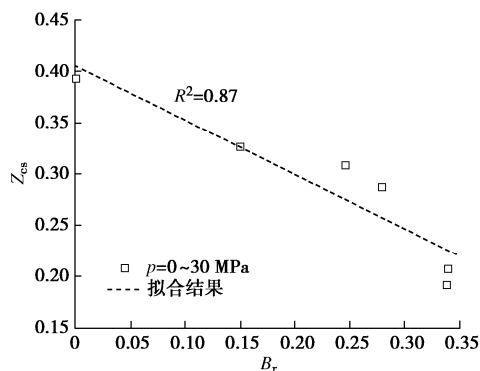


图 13 Cambria 砂不同颗粒破碎指标 B_r 下的 CSL 截距

Fig. 13 Intercepts of CSL of Cambria sands with different particle breakage index B_r

5 结 论

本文考虑颗粒破碎影响对砂土 UH 模型进行修正, 并将其嵌入 RIGA 模型中, 构建了可以得到较高精度 CSL 参数的 RIGA-MUH 模型。通过 Toyoura 砂和 Cambria 砂的排水三轴压缩试验结果, 分析了模型的稳定性、合理性和准确性, 并探讨了平均主应力 p 在 0~30 MPa 范围内, 颗粒破碎指标 B_r 与 CSL 位置之间的关系, 得到以下 5 点结论。

(1) 通过引入颗粒破碎参数 e_b 对砂土 UH 模型修正, 结果表明相比砂土 UH 模型, MUH 模型对发生颗粒破碎现象砂土的应力应变关系预测结果更为准确, 且对于其临界状态的预测效果更佳。

(2) 提出了以适应度作为衡量免疫遗传算法中个体多样性的优化策略, 并在本构模型参数反演中取得了较好的应用, 为后续 GA 优化提供了一种新途径。

(3) 采用 Toyoura 砂排水三轴压缩试验结果, 对比了 RGA-MUH 模型和 RIGA-MUH 模型对反演 CSL 参数的稳定性, 验证了 RIGA-MUH 模型的合理性, 为今后构建本构方程提供了一种新思路。

(4) 为探究修正 UH 模型对考虑颗粒破碎 CSL 的适用性, 将 Cambria 砂排水三轴压缩试验结果输入 RIGA-MUH 模型, 与砂土 UH 模型预测结果对比, 验证了 RIGA-MUH 模型对临界状态预测的准确性, 为后续进行颗粒破碎 CSL 研究提供一种新方法。

(5) 通过 RIGA-MUH 模型对不同 B_r 下 CSL 在 e - $\ln p$ 空间内的位置进行预测, 研究表明: 在同一土体中, 随着颗粒破碎量的持续增加, CSL 在 e - $\ln p$ 空间内不断向下移动; 且平均主应力 p 在 0~30 MPa, B_r 与 CSL 在 e - $\ln p$ 空间内的截距呈线性负相关。

后续研究可将本文建立的考虑颗粒破碎的砂土 UH 模型进一步拓展到三维应力空间, 实现对一般应力路径下的砂土力学特性的统一描述。

参考文献:

- [1] 张家铭, 蒋国盛, 汪 稔. 颗粒破碎及剪胀对钙质砂抗剪强度影响研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(7): 2043-2048. (ZHANG Jiaming, JIANG Guosheng, WANG Ren. Research on influences of particle breakage and dilatancy on shear strength of calcareous sands[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(7): 2043-2048. (in Chinese))
- [2] TONG C X, BURTON G J, ZHANG S, et al. Particle breakage of uniformly graded carbonate sands in dry/wet condition subjected to compression/shear tests[J]. Acta Geotechnica, 2020, 15(9): 2379-2394.
- [3] TONG C X, ZHAI M Y, LI H C, et al. Particle breakage of granular soils: changing critical state line and constitutive modelling[J]. Acta Geotechnica, 2022, 17(3): 755-768.
- [4] WOOD D M, MAEDA K. Changing grading of soil: effect on critical states[J]. Acta Geotechnica, 2008, 3(1): 3-14.
- [5] HARDIN B O. Crushing of soil particles[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(10): 1177-1192.
- [6] DAOUADJI A, HICHER P Y, RAHMA A. An elastoplastic model for granular materials taking into account grain

- breakage[J]. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2001, **20**(1): 113-137.
- [7] BANDINI V, COOP M R. The influence of particle breakage on the location of the critical state line of sands[J]. *Soils and Foundations*, 2011, **51**(4): 591-600.
- [8] LI G, LIU Y J, DANO C, et al. Grading-dependent behavior of granular materials: from discrete to continuous modeling[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2015, **141**(6): 276-285.
- [9] 兰 鹏, 李海潮, 叶新宇, 等. PINNs 算法及其在岩土工程中的应用研究[J]. *岩土工程学报*, 2021, **43**(3): 586-592. (LAN Peng, LI Haichao, YE Xinyu, et al. PINNs algorithm and its application in geotechnical engineering[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2021, **43**(3): 586-592. (in Chinese))
- [10] HOLLAND J. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*[M]. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.
- [11] WANG L, TANG D B. An improved adaptive genetic algorithm based on hormone modulation mechanism for job-shop scheduling problem[J]. *Expert Systems With Applications*, 2011, **38**(6): 7243-7250.
- [12] 王煦法, 张显俊, 曹先彬, 等. 一种基于免疫原理的遗传算法[J]. *小型微型计算机系统*, 1999, **20**(2): 117-120. (WANG Xufa, ZHANG Xianjun, CAO Xianbin, et al. An improved genetic algorithm based on immune principle[J]. *Mini-Micro Systems*, 1999, **20**(2): 117-120. (in Chinese))
- [13] HAN H, DING Y S, HAO K R, et al. An evolutionary particle filter with the immune genetic algorithm for intelligent video target tracking[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2011, **62**(7): 2685-2695.
- [14] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. Constitutive model for overconsolidated clays[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2008, **51**(2): 179-191.
- [15] YAO Y P, HOU W, ZHOU A N. UH model: three-dimensional unified hardening model for overconsolidated clays[J]. *Géotechnique*, 2009, **59**(5): 451-469.
- [16] YAO Y P, LIU L, LUO T, et al. Unified hardening (UH) model for clays and sands[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, **110**: 326-343.
- [17] YAO Y P, WANG N B, CHEN D. UH model for granular soils considering low confining pressure[J]. *Acta Geotechnica*, 2021, **16**(6): 1815-1827.
- [18] 姚仰平, 刘 林, 罗 汀. 砂土的UH模型[J]. *岩土工程学报*, 2016, **38**(12): 2147-2153. (YAO Yangping, LIU Lin, LUO Ting. UH model for sands[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, **38**(12): 2147-2153. (in Chinese))
- [19] DE BONO J P, MCDOWELL G R. Micro mechanics of the critical state line at high stresses[J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, **98**: 181-188.
- [20] RUSSELL A R, KHALILI N. A bounding surface plasticity model for sands exhibiting particle crushing[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2004, **41**(6): 1179-1192.
- [21] KIKUMOTO M, WOOD D M, RUSSELL A. Particle crushing and deformation behaviour[J]. *Soils and Foundations*, 2010, **50**(4): 547-563.
- [22] VERDUGO R, ISHIHARA K. The steady state of sandy soils[J]. *Soils and Foundations*, 1996, **36**(2): 81-91.
- [23] YAMAMURO J A, LADE P V. Drained sand behavior in axisymmetric tests at high pressures[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1996, **122**(2): 109-119.
- [24] 史金权, 肖 杨, 刘汉龙, 等. 钙质砂小应变初始剪切模量试验研究[J]. *岩土工程学报*, 2022, **44**(2): 324-333. (SHI Jinquan, XIAO Yang, LIU Hanlong, et al. Experimental study on small-strain shear modulus of calcareous sand[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2022, **44**(2): 324-333. (in Chinese))
- [25] XIAO Y, LIU H L, DING X M, et al. Influence of particle breakage on critical state line of rockfill material[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2016, **16**(1): 04015031.
- [26] WANG L, MENG M Q, LIU H L, et al. Numerical investigation on the effect of grain crushing process on critical state on rockfill material[M]//*Challenges and Innovations in Geomechanics*. Cham: Springer International Publishing, 2021: 295-302.
- [27] HU W, YIN Z Y, SCARINGI G, et al. Relating fragmentation, plastic work and critical state in crushable rock clasts[J]. *Engineering Geology*, 2018, **246**: 326-336.