

DOI: 10.11779/CJGE202112004

基于应力率正交分解的广义非共轴理论

王 兴^{1, 2}, 孔 亮^{*1, 2}, 李学丰³

(1. 青岛理工大学理学院, 山东 青岛 266033; 2. 青岛理工大学土木工程学院, 山东 青岛 266033; 3. 宁夏大学固体力学研究所, 宁夏 银川 750021)

摘要: 传统非共轴理论中非共轴塑性应变率与非共轴应力率之间通常采用线性假设并且二者始终同向, 这与土体实际的非共轴变形特性不相符。为了弥补这一缺陷, 首先基于数学推导证明了总应力率可以分解为6个正交方向上的分量应力率之和, 由此揭示出传统非共轴理论中定义的非共轴应力率是由多项正交分量所构成。针对非共轴应力率中的每一正交分量, 基于广义塑性力学, 通过直接定义加载强度指标、塑性模量和塑性流动方向建立相应的非线性加载机制描述其所诱发的塑性变形。将总的非共轴塑性变形视为每一分量诱发的塑性变形之和, 从而建立了一种广义形式的非共轴理论。推导了基于广义非共轴理论建立土体弹塑性模型时的应力应变关系式。针对模型评估的数值试验显示了广义非共轴理论的合理性, 从而表明了新建理论能够为土体非共轴模型的建立提供更为广泛的理论基础。

关键词: 传统非共轴理论; 应力率正交分解; 广义非共轴理论; 数值试验

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2021)12-2180-10

作者简介: 王 兴(1988—), 男, 博士研究生, 主要从事岩土本构关系方面的研究。E-mail: 1306825892@qq.com。

Generalized non-coaxial theory based on orthogonal decomposition of stress rate

WANG Xing^{1, 2}, KONG Liang^{1, 2}, LI Xue-feng³

(1. School of Sciences, Qingdao University of Technology, Qingdao 266033, China; 2. School of Civil Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266033, China; 3. Solid Mechanics Institute, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: In the traditional non-coaxial theories, linear assumption is usually made between non-coaxial plastic strain rate and non-coaxial stress rate, and they are always in the same direction, which is inconsistent with the real non-coaxial deformation characteristics of soils. In order to make up for this defect, firstly, it is proved by the mathematical derivation that the total stress rate can be decomposed into the sum of the component stress rates in six orthogonal directions, and then it is revealed that the non-coaxial stress rate defined in the traditional non-coaxial theories is composed of multiple orthogonal components. For each orthogonal component of the non-coaxial stress rate, based on the generalized plastic mechanics, the corresponding nonlinear loading mechanism is established by defining the loading strength index, plastic modulus and plastic flow direction explicitly, and the total non-coaxial plastic deformation is regarded as the sum of the plastic deformation induced by each component, thus a generalized non-coaxial theory is established. The stress-strain relationship of elastoplastic model for soils based on the generalized non-coaxial theory is derived. The numerical tests for model evaluation show the rationality of the generalized non-coaxial theory, which preliminarily indicates that the new theory can provide a broader theoretical basis for the establishment of non-coaxial model for soils.

Key words: traditional non-coaxial theory; orthogonal decomposition of stress rate; generalized non-coaxial theory; numerical test

0 引言

传统弹塑性模型由于隐含了共轴性假设, 无法模拟土体变形的非共轴特性^[1-3]。针对这一问题, 国内外学者从不同角度入手, 提出了多种形式的非共轴模型。一些研究将土体的非共轴行为归因于其细观结构的各向异性, 并基于土体细观结构的演化规律, 采用多尺度的方法建立非共轴模型^[4-9]。另一方面, 通过

直接采用数学公式描述宏观试验现象来构建土体本构模型也是一种非常有效的方法, 因此, 一些研究者也采用引入非共轴塑性理论的方式建立土体本构模型^[10-13]。Rudnicki等^[14]在研究裂隙岩体分叉行为时, 为了提

基金项目: 国家自然科学基金项目(51778311); 宁夏重点研发项目(2018DWHZ0084); 宁夏科技创新领军人才计划(KJT2019001)

收稿日期: 2021-02-26

*通信作者(E-mail: qdkongliang@163.com)

高理论预测的精确性, 引入了非共轴应力率引发的塑性变形, 由此提出了原始的非共轴理论。但这一早期理论是在二维应力空间内所建立, 并不适用于三维化的模型。后来, Hashiguchi 等^[15]通过重新定义非共轴应力率表达式, 建立了三维形式的非共轴理论。钱建固等^[16]采用 Gram-Schmidt 张量正交化理论, 将第三应力不变量的影响加入到了非共轴理论中。基于钱建固等^[16]的研究, 李学丰等^[17], 陈洲泉等^[18]分别采用非共轴模型对空心圆柱扭剪试验中砂土的力学响应进行了模拟。刘元雪等^[13]研究了三维条件下主应力轴旋转加载过程中应力率的数学描述问题, 并在此基础上建立了考虑非共轴塑性变形的本构模型。这些研究表明, 通过将非共轴理论引入已有的共轴模型中, 可以一定程度上再现单剪试验与空心圆柱试验中的非共轴现象。

分析已有研究结果可以发现, 传统非共轴理论均采用从总应力率减去所谓共轴应力率的方式定义非共轴应力率, 不同理论中定义的非共轴应力率之间的区别还没有被明确地探讨过。最近, Li 等^[19]从纯数学角度对两个张量之间的非共轴性进行了研究, 但与传统非共轴理论同样地采用从总量减去所谓共轴量的方式定义非共轴量, 这种定义方式一定程度上给非共轴应力率的理解带来了困难。另一方面, 虽然传统非共轴理论在模拟土体变形方面取得了一些成功, 但非共轴塑性应变率与非共轴应力率之间通常采用线性假设并且二者始终同向, 这与土体的实际变形特性不符。针对上述问题, 本文在总结已有理论基础上, 通过建立一种针对对称二阶张量的分解法将应力率进行了正交分解, 由此可从另一角度对非共轴应力率进行表述。进一步地, 在 Zienkiewicz^[20]建立的广义塑性力学基础上, 针对诱发非共轴塑性变形的每一分量应力率建立相应的非线性加载机制, 提出了广义形式的非共轴理论。然后, 基于该理论建立了一个非共轴模型并采用两种数值试验对模型的合理性进行了检验, 以期广义非共轴理论能够为土体非共轴模型的构建提供更为广阔的理论基础。

1 传统的非共轴理论

首先需要说明的是, 本文对于非共轴理论的介绍均是基于小变形假设。因此, 对于采用了 Jaumann 应力率的非共轴理论, 本文在介绍时均采用普通应力率代替。

在 Rudnicki 等^[14]提出的早期非共轴理论中, 总应变率 $\dot{\epsilon}$ 被分解为弹性应变率 $\dot{\epsilon}^e$, 共轴塑性应变率 $\dot{\epsilon}^{cp}$ 与非共轴塑性应变率 $\dot{\epsilon}^{np}$ 三者之和:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{cp} + \dot{\epsilon}^{np} , \quad (1)$$

Rudnicki 等^[14]认为非共轴塑性应变率 $\dot{\epsilon}^{np}$ 与静水压力部分无关, 其方向与 s 正交, 由此将 $\dot{\epsilon}^{np}$ 表示为

$$\dot{s}_{nc} = \dot{s} - \frac{s : \dot{s}}{s : s} s , \quad (2a)$$

$$\dot{\epsilon}^{np} = \frac{1}{H_t} \dot{s}_{nc} , \quad (2b)$$

式中, H_t 为非共轴塑性模量, s 为偏应力, \dot{s} 为偏应力率, \dot{s}_{nc} 为非共轴应力率。然而式 (2a), (2b) 由于没有考虑第三应力不变量的影响, 并不适用于一般化的三维模型。

Hashiguchi 等^[15]通过假设非共轴塑性应变率与屈服面偏切线方向的应力率同向且二者之间为线性关系, 将非共轴塑性应变率 $\dot{\epsilon}^{np}$ 的表达式修正为

$$\dot{\epsilon}^{np} = TE^{-1} : \dot{s}_{nc} . \quad (3)$$

式中 T 为一个无量纲的标量系数; E 为弹性刚度张量; \dot{s}_{nc} 为

$$\dot{s}_{nc} = I_t : \dot{\sigma} , \quad (4a)$$

式中

$$I_t = I - \frac{1}{3} I \otimes I - \frac{f'_\sigma}{\|f'_\sigma\|} \otimes \frac{f'_\sigma}{\|f'_\sigma\|} , \quad (4b)$$

$$f'_\sigma = f_\sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(f_\sigma) I , \quad (4c)$$

其中, σ 为应力, $\dot{\sigma}$ 为应力率, I_t 为偏切线投影张量, I 为对称转换张量, 其分量形式为 $I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$, δ_{ij} 为 Kronecker 符号, f'_σ 为屈服函数梯度的偏量部分, $f_\sigma = \partial f / \partial \sigma$ 表示屈服函数的梯度 (本文中 $f_a = \partial f / \partial a$, 下文不再说明), I 为二阶单位张量, 其分量为 δ_{ij} 。

钱建固等^[16]为考虑第三应力不变量的影响提出了另一种三维化的非共轴理论。在该理论中, 非共轴塑性应变率的表达式与式 (2b) 相同, 但非共轴应力率 \dot{s}_{nc} 的表达式修改为

$$\dot{s}_{nc} = \dot{s} - \frac{s : \dot{s}}{s : s} s - \frac{S : \dot{s}}{S : S} S , \quad (5a)$$

$$S = s^2 - \frac{2}{3} J_2 I - \frac{3}{2} \frac{J_3}{J_2} s . \quad (5b)$$

式中 S 为二阶张量, 分别正交于 I 和 s ; $J_2 = \text{tr}(s^2)/2$ 为偏应力第二不变量; $J_3 = \text{tr}(s^3)/3$ 为偏应力第三不变量。

分析上述非共轴理论可知, 非共轴应力率的定义均采用从总应力率中减去所谓共轴应力率的方式, 这与 Li 等^[19]对于两个张量之间非共轴性的定义方式相类似。但这种定义方式不能说明非共轴应力率是由多项正交应力率分量所构成这一事实。为了对此问题进行更加清楚的解释, 有必要对应力率的分量表达形式

进行研究。

2 非共轴应力率的正交分解

令 3 个单位基矢量 $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ 分别代表 3 个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 所在的方向。则在这一坐标系中, 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 可为

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (6)$$

3 个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别为

$$\sigma_1 = p + \frac{2}{3}q \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \quad , \quad (7a)$$

$$\sigma_2 = p + \frac{2}{3}q \sin(\theta) \quad , \quad (7b)$$

$$\sigma_3 = p + \frac{2}{3}q \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \quad . \quad (7c)$$

式中 p 为平均应力, $p = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$; q 为广义剪应力, $q = \sqrt{3s:s/2}$; θ 为罗德角, $\theta = -[\sin^{-1}(27J_3/2q^3)]/3$ 。

现假设 $\boldsymbol{\sigma}$ 经过微小的增量 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ 变化为 $\boldsymbol{\sigma}^*$, 则可以采用如下取极限的方式定义一个与 $\boldsymbol{\sigma}$ 相关的方向量:

$$\mathbf{n} = \lim_{\boldsymbol{\sigma}^* \rightarrow \boldsymbol{\sigma}} \frac{\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}\|} \quad . \quad (8)$$

进一步地, 假设 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ 由平均应力变化 Δp 引发, 令 $\Delta p \rightarrow 0^+$, 则根据式 (8) 可得到方向 $\hat{\mathbf{n}}_p$ 为

$$\hat{\mathbf{n}}_p = \frac{\sqrt{3}}{3} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 \quad . \quad (9)$$

同理, 当 $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ 分别是由广义剪应力 q 和罗德角 θ 的独立变化所引发时, 令 $\Delta q \rightarrow 0^+$ 和 $\Delta\theta \rightarrow 0^+$ 可分别得到方向 $\hat{\mathbf{n}}_q$ 和 $\hat{\mathbf{n}}_\theta$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_q &= \frac{\sqrt{6}}{3} \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + \\ &\quad \frac{\sqrt{6}}{3} \sin(\theta) \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\sqrt{6}}{3} \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 \quad , \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_\theta &= \frac{\sqrt{6}}{3} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + \\ &\quad \frac{\sqrt{6}}{3} \cos(\theta) \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\sqrt{6}}{3} \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 \quad . \end{aligned} \quad (11)$$

进一步地, 假设 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 是由 $\boldsymbol{\sigma}$ 经过绕 σ_1 轴旋转 α 角所得, 则 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 可表示为 $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^T$, 相应的正交变换张量 \boldsymbol{Q} 为

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad . \quad (12)$$

将 $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^T$ 和式 (12) 代入式 (8), 令 $\Delta\alpha \rightarrow 0^+$ 可得方向 $\hat{\mathbf{n}}_{rl}$ 为

$$\hat{\mathbf{n}}_{rl} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 \quad . \quad (13)$$

假设 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 分别由 $\boldsymbol{\sigma}$ 绕 σ_2 轴和 σ_3 轴旋转所得, 经过与前述相同的运算, 可以得到方向 $\hat{\mathbf{n}}_{r2}, \hat{\mathbf{n}}_{r3}$ 为

$$\hat{\mathbf{n}}_{r2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 \quad , \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_{r3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 \quad , \quad (15)$$

可以证明, 这样得到的 6 个方向 $\hat{\mathbf{n}}_p, \hat{\mathbf{n}}_q, \hat{\mathbf{n}}_\theta, \hat{\mathbf{n}}_{rl}, \hat{\mathbf{n}}_{r2}, \hat{\mathbf{n}}_{r3}$ 是相互正交的 (本文中任意两个方向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 正交意味着 $\mathbf{a} : \mathbf{b} = 0$) 并且 6 个方向量与对称转换张量 \boldsymbol{I} 存在如下关系:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \hat{\mathbf{n}}_p \otimes \hat{\mathbf{n}}_p + \hat{\mathbf{n}}_q \otimes \hat{\mathbf{n}}_q + \hat{\mathbf{n}}_\theta \otimes \hat{\mathbf{n}}_\theta + \\ &\quad \hat{\mathbf{n}}_{rl} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{rl} + \hat{\mathbf{n}}_{r2} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{r2} + \hat{\mathbf{n}}_{r3} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{r3} \quad . \end{aligned} \quad (16)$$

当应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 处于屈服面上时, 并假设屈服函数具有 $f(p, q, \theta) = 0$ 的形式, 则其偏法线方向 $\hat{\mathbf{n}}_f$ 可以表示为

$$\hat{\mathbf{n}}_f = (f_q q \hat{\mathbf{n}}_q + f_\theta \hat{\mathbf{n}}_\theta) / \sqrt{(f_q q)^2 + f_\theta^2} \quad . \quad (17)$$

屈服面的偏切线方向 $\hat{\mathbf{n}}_t$ 为

$$\hat{\mathbf{n}}_t = (f_q q \hat{\mathbf{n}}_q - f_\theta \hat{\mathbf{n}}_\theta) / \sqrt{(f_q q)^2 + f_\theta^2} \quad . \quad (18)$$

容易证明, 6 个方向量 $\hat{\mathbf{n}}_p, \hat{\mathbf{n}}_f, \hat{\mathbf{n}}_t, \hat{\mathbf{n}}_{rl}, \hat{\mathbf{n}}_{r2}, \hat{\mathbf{n}}_{r3}$ 之间也是相互正交的并满足关系:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \hat{\mathbf{n}}_p \otimes \hat{\mathbf{n}}_p + \hat{\mathbf{n}}_f \otimes \hat{\mathbf{n}}_f + \hat{\mathbf{n}}_t \otimes \hat{\mathbf{n}}_t + \\ &\quad \hat{\mathbf{n}}_{rl} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{rl} + \hat{\mathbf{n}}_{r2} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{r2} + \hat{\mathbf{n}}_{r3} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{r3} \quad . \end{aligned} \quad (19)$$

需注意的是, 上述讨论都是限制在主应力空间内进行的。为将式 (19) 推广至一般应力空间, 现假设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为一般应力空间的 3 个单位基矢量, 令单位正交张量 \boldsymbol{Q} 表示主应力空间与一般应力空间之间的转换, 则 \boldsymbol{Q} 可表示为

$$\boldsymbol{Q} = Q_j \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \quad , \quad (20a)$$

$$Q_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad . \quad (20b)$$

在一般应力空间中, 定义方向 $\mathbf{n}_p = \boldsymbol{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_p \cdot \boldsymbol{Q}$, $\mathbf{n}_q = \boldsymbol{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_q \cdot \boldsymbol{Q}$, $\mathbf{n}_\theta = \boldsymbol{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_\theta \cdot \boldsymbol{Q}$, $\mathbf{n}_f = \boldsymbol{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_f \cdot \boldsymbol{Q}$, $\mathbf{n}_t = \boldsymbol{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_t \cdot \boldsymbol{Q}$, $\mathbf{n}_{rl} = \boldsymbol{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_{rl} \cdot \boldsymbol{Q}$, $\mathbf{n}_{r2} = \boldsymbol{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_{r2} \cdot \boldsymbol{Q}$, $\mathbf{n}_{r3} = \boldsymbol{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}_{r3} \cdot \boldsymbol{Q}$ 。则可以证明, $\mathbf{n}_p, \mathbf{n}_q, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_f, \mathbf{n}_t, \mathbf{n}_{rl}, \mathbf{n}_{r2}, \mathbf{n}_{r3}$ 与对称转换张量 \boldsymbol{I} 之间存在关系:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \mathbf{n}_p \otimes \mathbf{n}_p + \mathbf{n}_q \otimes \mathbf{n}_q + \mathbf{n}_\theta \otimes \mathbf{n}_\theta + \\ &\quad \mathbf{n}_{rl} \otimes \mathbf{n}_{rl} + \mathbf{n}_{r2} \otimes \mathbf{n}_{r2} + \mathbf{n}_{r3} \otimes \mathbf{n}_{r3} + \\ &\quad \mathbf{n}_p \otimes \mathbf{n}_p + \mathbf{n}_f \otimes \mathbf{n}_f + \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t + \\ &\quad \mathbf{n}_{rl} \otimes \mathbf{n}_{rl} + \mathbf{n}_{r2} \otimes \mathbf{n}_{r2} + \mathbf{n}_{r3} \otimes \mathbf{n}_{r3} \quad . \end{aligned} \quad (21)$$

利用式 (21), 可将应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 表示为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{I} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{n}}_p + \dot{\mathbf{n}}_q + \dot{\mathbf{n}}_\theta + \dot{\mathbf{n}}_{rl} + \dot{\mathbf{n}}_{r2} + \dot{\mathbf{n}}_{r3} \\ &= \dot{\mathbf{n}}_p + \dot{\mathbf{n}}_f + \dot{\mathbf{n}}_t + \dot{\mathbf{n}}_{rl} + \dot{\mathbf{n}}_{r2} + \dot{\mathbf{n}}_{r3} \quad . \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\dot{\sigma}_p = (\dot{\sigma} : \mathbf{n}_p) \mathbf{n}_p$, $\dot{\sigma}_q = (\dot{\sigma} : \mathbf{n}_q) \mathbf{n}_q$, $\dot{\sigma}_\theta = (\dot{\sigma} : \mathbf{n}_\theta) \mathbf{n}_\theta$, $\dot{\sigma}_f = (\dot{\sigma} : \mathbf{n}_f) \mathbf{n}_f$, $\dot{\sigma}_t = (\dot{\sigma} : \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t$, $\dot{\sigma}_{rl} = (\dot{\sigma} : \mathbf{n}_{rl}) \mathbf{n}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2} = (\dot{\sigma} : \mathbf{n}_{r2}) \mathbf{n}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3} = (\dot{\sigma} : \mathbf{n}_{r3}) \mathbf{n}_{r3}$ 。式(22)表明, 总应力率 $\dot{\sigma}$ 既可以分解为 $\dot{\sigma}_p$, $\dot{\sigma}_q$, $\dot{\sigma}_\theta$, $\dot{\sigma}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$ 之和, 也可以分解为 $\dot{\sigma}_p$, $\dot{\sigma}_f$, $\dot{\sigma}_t$, $\dot{\sigma}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$ 之和, 并且上述分解方式适用于任意的对称二阶张量。此外, 从上述推导过程可知, 应力率分量 $\dot{\sigma}_p$, $\dot{\sigma}_q$, $\dot{\sigma}_\theta$, $\dot{\sigma}_f$, $\dot{\sigma}_t$ 都是由主应力大小的改变所引发, 而 $\dot{\sigma}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$ 3 个应力率分量是由主应力方向的改变所引发。进一步地,

$$\mathbf{n}_q = \lim_{\Delta q \rightarrow 0^+} \frac{\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}\|} = \frac{\partial q / \partial \boldsymbol{\sigma}}{\|\partial q / \partial \boldsymbol{\sigma}\|} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}, \quad (23)$$

$$\mathbf{n}_\theta = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0^+} \frac{\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}\|} = \frac{\partial \theta / \partial \boldsymbol{\sigma}}{\|\partial \theta / \partial \boldsymbol{\sigma}\|} = \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\mathbf{S} : \mathbf{S}}}. \quad (24)$$

利用式(22)~(24), 可将 Rudnicki 等^[14]定义的非共轴应力率表示为

$$\dot{\mathbf{s}}_{nc} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_q = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_\theta + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rl} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{r2} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{r3}. \quad (25)$$

式(25)的几何解释如图1所示。

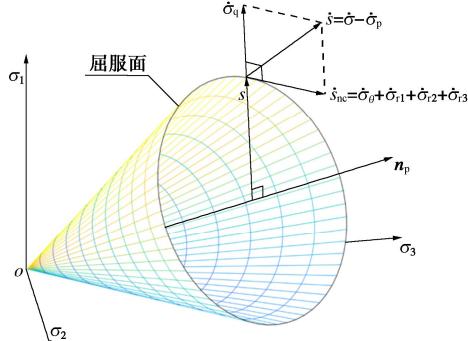


图1 传统的非共轴理论^[14]

Fig. 1 Traditional non-coaxial theory by Ref. [14]

同理, 可将 Hashiguchi 等^[15]定义的非共轴应力率表示为

$$\dot{\mathbf{s}}_{nc} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_f = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_t + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rl} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{r2} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{r3}. \quad (26)$$

式(26)的几何解释如图2所示。

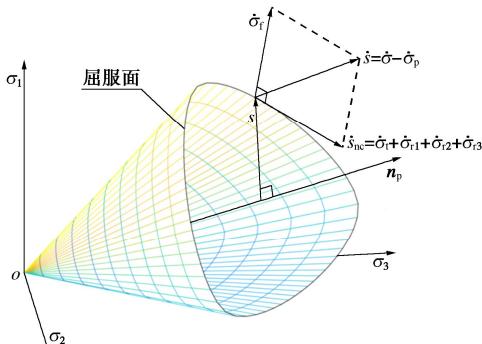


图2 传统的非共轴理论^[15]

Fig. 2 Traditional non-coaxial theory by Ref. [15]

而钱建固等^[16]定义的非共轴应力率可重新表示为

$$\dot{\mathbf{s}}_{nc} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_q - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_\theta = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rl} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{r2} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{r3}. \quad (27)$$

式(27)的几何解释如图3所示。

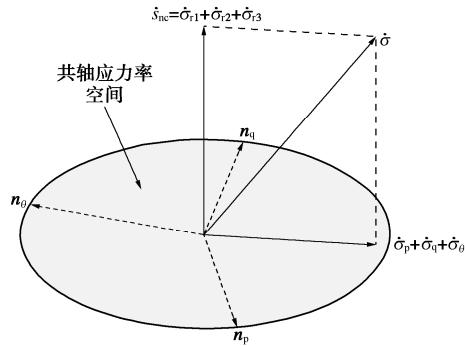


图3 传统的非共轴理论^[16]

Fig. 3 Traditional non-coaxial theory by Ref. [16]

通过上述分析可清楚得知, Rudnicki 等^[14]定义的非共轴应力率包含 $\dot{\sigma}_\theta$, $\dot{\sigma}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$ 共 4 项正交分量, Hashiguchi 等^[15]定义的非共轴应力率包含 $\dot{\sigma}_t$, $\dot{\sigma}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$ 共 4 项正交分量, 而钱建固等^[16]给出非共轴应力率包含 $\dot{\sigma}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$ 共 3 项正交分量。其中, Rudnicki 等^[14]理论与 Hashiguchi 等^[15]理论的主要区别体现在 $\dot{\sigma}_\theta$ 和 $\dot{\sigma}_t$ 的不同。而钱建固等^[16]定义的非共轴应力率仅包含主应力方向改变引发的应力率 $\dot{\sigma}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$, 从而完全排除了主应力大小改变的影响, 这是其区另外两种非共轴理论的标志。

需要指出的是, 上述结论是基于式(8)定义的方向量和式(22)表示的应力率的正交分解基础上推出的, 而基于传统非共轴理论以及 Li 等^[19]研究给出的非共轴应力率的表述方式难以得出类似结论。

3 广义非共轴理论

传统弹塑性理论^[21]中通常将加载强度指标 L 定义为

$$L = \frac{1}{K_p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (28)$$

式中, K_p 为塑性模量。利用应力率的分解式(22)并根据分量之间的正交关系, 可将式(28)表示为

$$L = \frac{1}{K_p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{K_p} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_p + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_f). \quad (29)$$

由式(29)可知, 传统弹塑性模型中仅考虑了应力率分量 $\dot{\sigma}_p$ 与 $\dot{\sigma}_f$ 诱发的塑性变形, 而忽略了非共轴应力率分量 $\dot{\sigma}_t$, $\dot{\sigma}_{rl}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$ 的影响。尽管 Hashiguchi 等^[15]非共轴理论可以反映这 4 项的影响, 但该理论将非共轴塑性应变率与非共轴应力率之间表示为了线性关系并且二者始终同向, 这一假设与岩土材料的试验结果不相符。例如, Gutierrez 等^[22]在对 Toyoura 砂进行空心圆柱扭剪试验时发现, 在主应力幅值保持不变而方向连续改变的旋转加载条件下, 非共轴塑性应变率显著偏离了非共轴应力率的方向。此外, 砂土试验结果^[23-26]表明, 非共

轴应力率所诱发的塑性变形不仅包括偏应变也包括体应变，而且砂土的非共轴塑性应变率还受当前孔隙比、应力状态和各向异性等因素的影响。此外，需要注意的是， $\dot{\sigma}_t$ 表示主应力大小的改变，而 $\dot{\sigma}_{r1}$ ， $\dot{\sigma}_{r2}$ ， $\dot{\sigma}_{r3}$ 三项代表了主应力方向的改变，因而 $\dot{\sigma}_t$ 与 $\dot{\sigma}_{r1}$ ， $\dot{\sigma}_{r2}$ ， $\dot{\sigma}_{r3}$ 代表了两类不同的加载机制。

为了精确描述非共轴应力率的影响，本文建议针对每一分量应力率建立独立的非线性加载机制。首先以分量 $\dot{\sigma}_t$ 为例，本文将与其相关的加载称为第一类非共轴加载。参考 Zienkiewicz 等^[20]提出的广义塑性力学，通过直接定义加载强度指标、塑性模量和塑性流动方向，可将相应的加载机制表示为

$$L_t = \frac{1}{K_p^t} (\mathbf{n}_t : \dot{\sigma}) = \frac{1}{K_p^t} (\mathbf{n}_t : \dot{\sigma}_t) , \quad (30a)$$

$$\dot{\epsilon}_t^p = L_t \left(\mathbf{n}_t^* + \frac{1}{3} D_t \sqrt{2/3} \right) , \quad (30b)$$

$$K_p^t = K_p^t(\sigma, \psi, C) , \quad (30c)$$

$$D_t = D_t(\sigma, \psi, C) . \quad (30d)$$

式中 L_t 为 \mathbf{n}_t 方向的加载强度指标； $\dot{\epsilon}_t^p$ 为分量 $\dot{\sigma}_t$ 诱发的塑性应变率； \mathbf{n}_t^* 为 $\dot{\sigma}_t$ 诱发的塑性偏应变率的方向； K_p^t ， D_t 为与 $\dot{\sigma}_t$ 对应的塑性模量和剪胀系数，二者可表示为前应力 σ 、状态参数 ψ 和代表材料特性的一组参数 C 的函数。考虑到当前的研究普遍认为非共轴性源于材料的各向异性，因此参数 C 中应当包括代表各向异性程度的幅值参量，并且当材料为各向同性时，需满足塑性模量 $K_p^t = +\infty$ ，以保证 \mathbf{n}_t 方向的应力率不会诱发塑性变形。注意到，在 Gutierrez 等^[22]进行的主应力轴纯旋转加载试验中，随着应力比的增加，砂土变形的非共轴性会相应减弱，且当应力状态接近临界状态时，非共轴性几乎消失。基于这一规律，Gutierrez 等^[22]建议用应力率与边界面交点处的外法线方向表示塑性流动方向，如图 4 所示。

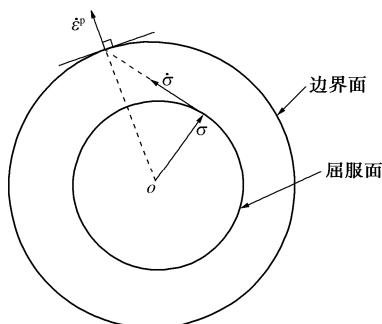


图 4 塑性流动方向^[22]

Fig. 4 Plastic flow direction by Ref [22]

关于 \mathbf{n}_t^* 方向的确定，这里采用与 Gutierrez 等^[22]相似的方法，将 $\dot{\sigma}_t$ 诱发的塑性偏应变率方向定义为 \mathbf{n}_t 与边界面交点处的外法线方向，该方法的几何解

释如图 5 所示。

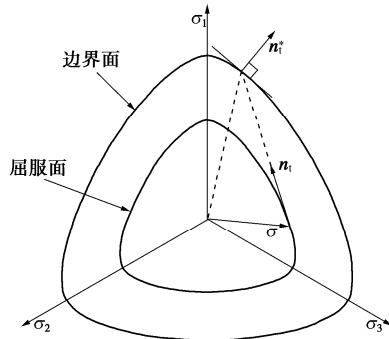


图 5 几何映射方法示意图

Fig. 5 Schematic diagram of geometric mapping method

此外，也可以采用如下的方式定义 \mathbf{n}_t^* 为

$$\mathbf{n}_t^* = \sqrt{1-\chi} \mathbf{n}_t + \sqrt{\chi} \mathbf{n}_f , \quad (31)$$

式中， χ 称为方向系数且 $0 \leq \chi \leq 1$ 。理论上，通过将 χ 表示为随应力状态变化的函数也可达到与上述几何映射方法相似的描述效果，如图 6 所示。

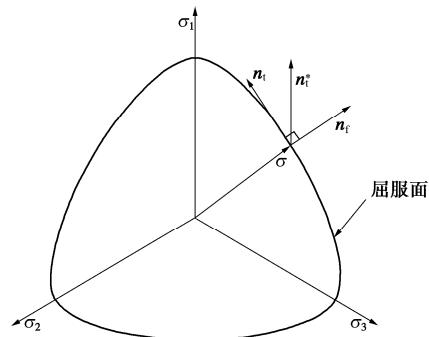


图 6 插值系数法示意图

Fig. 6 Schematic diagram of interpolation coefficient method

另一方面，从几何角度可知， \mathbf{n}_t 和 $-\mathbf{n}_t$ 均表示偏平面上屈服函数的切线方向。关于加载过程中 \mathbf{n}_t 和 $-\mathbf{n}_t$ 的选择，可类比于传统弹性塑性模型中加卸载的概念，引入加载与反向加载的概念，如图 7 所示。

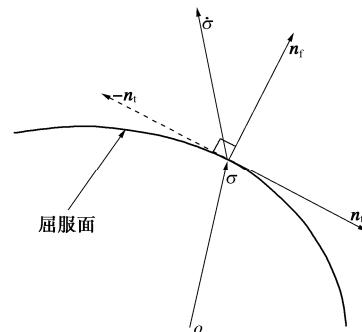


图 7 加载与反向加载

Fig. 7 Loading and reverse loading

在弹性塑性加载过程中，首先按照弹性变形计算试探应力率 $\dot{\sigma}^{\text{trial}}$ ，若 $\dot{\sigma}^{\text{trial}} : \mathbf{n}_t \geq 0$ ，选用 \mathbf{n}_t 计算；相反，若 $\dot{\sigma}^{\text{trial}} : \mathbf{n}_t < 0$ ，选用 $-\mathbf{n}_t$ 替代式 (30) 中的 \mathbf{n}_t 进

行计算。

至此, 完成了对应于分量 $\dot{\sigma}_t$ 的加载机制的描述。采用同样的方式, 可以将对应于分量 $\dot{\sigma}_{r1}$, $\dot{\sigma}_{r2}$, $\dot{\sigma}_{r3}$ 的加载称为第二类非共轴加载, 并将相应的加载机制表示为

$$L_{ri} = \frac{1}{K_p^{ri}} (\mathbf{n}_{ri} : \dot{\sigma}) = \frac{1}{K_p^{ri}} (\mathbf{n}_{ri} : \dot{\sigma}_t) , \quad (32a)$$

$$\dot{\epsilon}_{ri}^p = L_{ri} \left(\mathbf{n}_{ri}^* + \frac{1}{3} D_{ri} \sqrt{2/3} \right) , \quad (32b)$$

$$K_p^{ri} = K_p^{ri}(\sigma, \psi, C) , \quad (32c)$$

$$D_{ri} = D_{ri}(\sigma, \psi, C) . \quad (32d)$$

式中 指标 ri 分别取 $r1$, $r2$, $r3$; L_{ri} 为 \mathbf{n}_{ri} 方向的加载强度指标; $\dot{\epsilon}_{ri}^p$ 为分量 $\dot{\sigma}_{ri}$ 诱发的塑性应变率; \mathbf{n}_{ri}^* 为 $\dot{\sigma}_{ri}$ 诱发的塑性偏应变率的方向; K_p^{ri} , D_{ri} 为与 $\dot{\sigma}_{ri}$ 对应的塑性模量和剪胀系数, 二者同样地都可以表示为当前应力 σ 、状态参数 ψ 和代表材料特性参数 C 的函数。3个加载机制的示意图如图8所示。

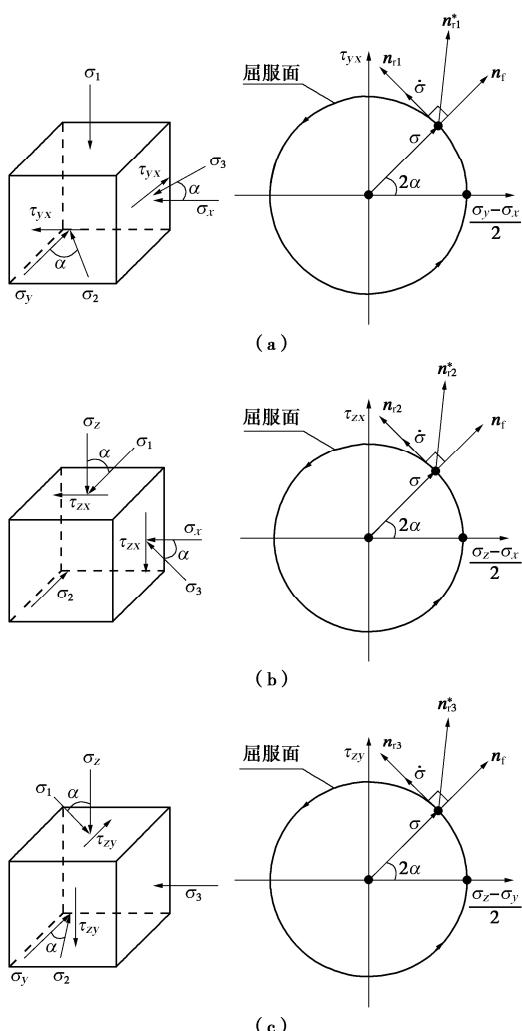


图8 第二类非共轴加载

Fig. 8 Second kind of non-coaxial loading

其中, 非共轴塑性流动方向 \mathbf{n}_{ri}^* 可为

$$\mathbf{n}_{ri}^* = \sqrt{1-\chi} \mathbf{n}_{ri} + \sqrt{\chi} \mathbf{n}_f . \quad (33)$$

也可采用图5所示的映射方法确定, 只需将图中的 \mathbf{n}_t 理解为 \mathbf{n}_{ri} 即可。

将非共轴应力率进行正交分解并参考 Zienkiewicz 等^[20]的广义塑性力学, 通过直接定义塑性指标变量建立了多重非线性加载机制, 用于描述每一非共轴应力率分量诱发的塑性变形。通过采用边界面理论中的几何映射法则或采用方向插值系数法可描述非共轴塑性流动方向在屈服面偏切线方向与偏法线方向之间连续变化。因而相较于传统理论, 本理论在描述土体的非共轴塑性变形方面具有更强的灵活性。

4 数值试验

为了评估本文建立的非共轴理论在分析岩土材料非共轴变形方面的合理性, 结合该理论与 Li 等^[27]发展的状态相关模型, 建立砂土的非共轴本构模型。模型中的状态变量定义为

$$\psi = e - e_c = e - [e_r - \lambda_c(p/p_a)^\xi] . \quad (34)$$

式中 e 为当前孔隙比; e_c 为临界孔隙比; e_r , λ_c , ξ 均为材料常数; p_a 为大气压力。

剪切模量 G 和体积模量 K 为

$$G = G_0 \frac{(2.97 - e)^2}{1+e} \sqrt{pp_a} , \quad (35)$$

$$K = G \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} , \quad (36)$$

式中, G_0 为材料常数, ν 为泊松比。

屈服函数 f 为

$$f = q - Mg(\theta)p = 0 , \quad (37)$$

式中, M 为硬化内变量, $g(\theta)$ 为角隅函数^[10],

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{(1+c^2)^2 + 4(1-c^2)\sin 3\theta} - (1+c^2)}{2(1-c)\sin 3\theta} , \quad (38)$$

其中, c 为三轴拉伸与压缩条件下极限应力比的比值。

塑性模量 K_p 为

$$K_p = hGe^{n\psi} \left[\frac{M_c g(\theta)e^{-n\psi}}{\eta} - 1 \right] . \quad (39)$$

式中 M_c 为临界状态应力比; 应力比 $\eta = q/p$; n 为材料常数; $h = h_1 - h_2 e$, h_1 , h_2 为 2 个材料常数。剪胀系数 D 和塑性势函数 g 为

$$D = \frac{d_0}{M_c g(\theta)} [M_c g(\theta)e^{n\psi} - \eta] , \quad (40a)$$

$$g = q - \frac{d_0 M_c g(\theta)e^{n\psi} p}{d_0 - M_c g(\theta)} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{d_0}{M_c g(\theta)} - 1} \right] , \quad (40b)$$

其中, d_0 , m 为 2 个材料常数, p_0 为塑性势面与 p 轴的交点。

基于小变形假设, 将总应变率 $\dot{\epsilon}$ 分解为弹性应变率 $\dot{\epsilon}^e$ 、共轴塑性应变率 $\dot{\epsilon}^{cp}$ 与非共轴塑性应变率 $\dot{\epsilon}_t^p$, $\dot{\epsilon}_{rl}^p$, $\dot{\epsilon}_{r2}^p$, $\dot{\epsilon}_{r3}^p$ 之和:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^{cp} + \dot{\epsilon}_t^p + \dot{\epsilon}_{rl}^p + \dot{\epsilon}_{r2}^p + \dot{\epsilon}_{r3}^p \quad (41)$$

式(41)中的共轴塑性应变率 $\dot{\epsilon}^{cp}$ 由传统位势理论确定, 而非共轴塑性应变率 $\dot{\epsilon}_t^p$, $\dot{\epsilon}_{rl}^p$, $\dot{\epsilon}_{r2}^p$, $\dot{\epsilon}_{r3}^p$ 由多重非共轴加载机制确定。令 $L_1 = L$, $L_2 = L_t$, $L_3 = L_{rl}$, $L_4 = L_{r2}$, $L_5 = L_{r3}$, $N_1 = \partial f / \partial \sigma$, $N_2 = n_t$, $N_3 = n_{rl}$, $N_4 = n_{r2}$, $N_5 = n_{r3}$, $N_1^* = \partial g / \partial \sigma$, $N_2^* = n_{rl}^* + D_{rl} \sqrt{2/3} I/3$, $N_3^* = n_{r2}^* + D_{r2} \sqrt{2/3} I/3$, $N_4^* = n_{r3}^* + D_{r3} \sqrt{2/3} I/3$ 。利用弹性本构关系与式(30), (32), (41) 可得

$$\dot{\sigma} = E : \dot{\epsilon} - \sum_{I=1}^5 L_I E : N_I^* \quad (42)$$

令 $K_p^1 = K_p$, $K_p^2 = K_p^t$, $K_p^3 = K_{rl}^t$, $K_p^4 = K_p^{r2}$, $K_p^5 = K_p^{r3}$, 分别用 N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , N_5 双点积分(42), 则可得

$$(K_p^I + N_I : E : N_I^*) L_I + \sum_{J=1, J \neq I}^5 N_I : E : N_J^* L_J = N_I : E : \dot{\epsilon}^e \quad (43)$$

式(43)是关于加载强度指标 L_I 的一组线性方程, 令 A 表示 L_I 的系数矩阵, 求解该方程组可得

$$L_J = \sum_{I=1}^5 b_I A_{IJ}^* / \det(A) \quad (44)$$

式中 $b_I = N_I : E : \dot{\epsilon}^e$; A^* 为 A 的伴随矩阵; $\det(A)$ 为 A 的行列式。将式(44)代入式(42), 可得非共轴本构关系式:

$$\dot{\sigma} = \left[E^e - E^e : \left(\sum_{I=1}^5 N_I^* \otimes M_I \right) : E^e \right] : \dot{\epsilon} \quad (45a)$$

$$M_J = \sum_{I=1}^5 N_I A_{IJ}^* / \det(A) \quad (45b)$$

为了评估模型描述砂土本构反应的合理性, 本文设计了应力与应变两种探测试验。如图 8(b) 所示, 应力探测试验模拟主应力绕中主应力 σ_2 的纯旋转加载。

材料假设为 Toyoura 砂, 共轴模型参数取自文献 [2], 并假设 $K_p^t = K_{rl}^t = K_p^{r2} = K_p^{r3} = K_p$, $D_t = D_{rl} = D_{r2} = D_{r3} = D$ 。初始时刻平均应力 $p = 98$ kPa, 剪应力 $q = 50$ kPa, 罗德角 $\theta = 0.0$, 初始孔隙比 $e_0 = 0.78$ 。加载过程中, 大主应力方向角 α 从 0° 连续增加至 180° 。非共轴塑性流动方向采用式(31)确定, 方向系数 χ 分别为 0.0 , 0.25 , 0.5 , 0.75 , 模拟结果如图 9 所示。

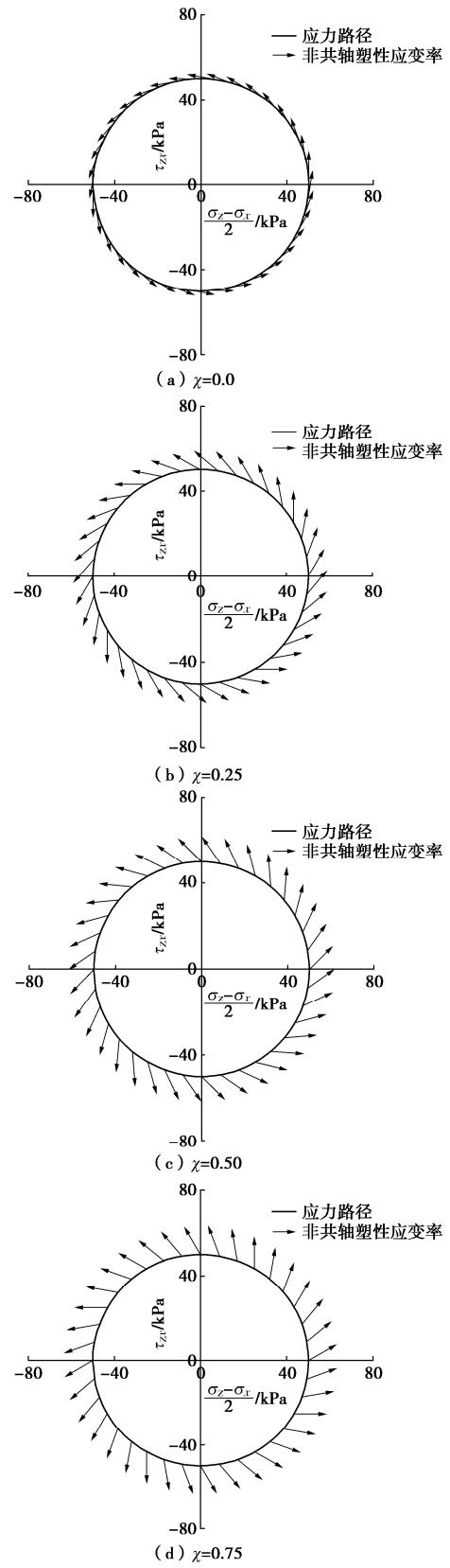


图 9 应力探测示意图

Fig. 9 Schematic diagram of stress probe tests

图 9 表明, 当 $\chi = 0.0$ 时, 计算的非共轴塑性应变率方向与应力路径正切; 当 $\chi \neq 0.0$ 时, 计算的非共轴塑性应变率方向处于应力路径的切线方向与法线方向之间, 更符合试验结果。随着 χ 的增大, 非共轴塑性增量方向由切线方向逐渐向法线方向靠近。因

此, 基于广义非共轴理论建立的模型可以更加真实的反映砂土的变形特点。

如图 10 所示, 在应变探测试验中, 初始时刻的应力状态用 A 点表示, 并假设与前述应力探测试验中的初始状态相同。然后在二维空间内, 沿任意方向施加应变率幅值 $\|\dot{\epsilon}\|$ 为 0.0001 的应变荷载。Gudehus^[28]首先提出了应变探测方法, 并认为合理的应力率响应包络线应满足的基本条件是连续性。

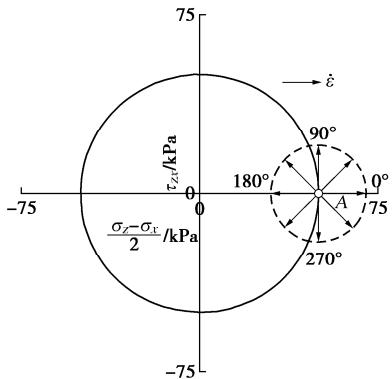
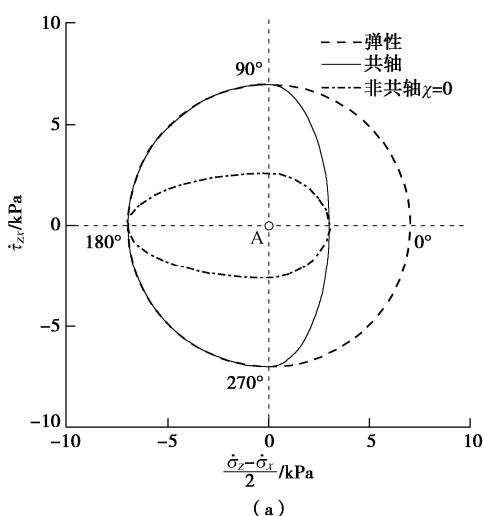


图 10 应变探测示意图

Fig.10 Schematic diagram of stress probe tests

图 11 (a) 展示了弹性模型、共轴弹塑性模型和非共轴弹塑性模型 ($\chi=0.0$) 计算的应力率响应包络线。显然, 3 种模型预测的包络线满足连续性要求。此外, 由图 11 (a) 可知, 沿着 0° 方向和 180° 方向加载, 非共轴模型 ($\chi=0.0$) 与共轴模型计算的应力率相同, 而沿其他方向加载, 非共轴模型 ($\chi=0.0$) 的计算结果显示出了更加软化的力学响应。图 11 (b) 展示了不同 χ 条件下, 非共轴模型计算的应力率包络线。由图 11 可知, 随着 χ 的增加, 在 $90^\circ \sim 180^\circ \sim 270^\circ$ 范围内, 模型展示出了相对硬化的力学响应, 而在 $270^\circ \sim 0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内, χ 对包络线的影响并不明显。此外, 不同 χ 条件下, 模型计算的包络线均满足连续性要求。应变探测试验结果初步表明, 基于广义非共轴理论建立的模型满足数值计算的稳定性要求。



(a)

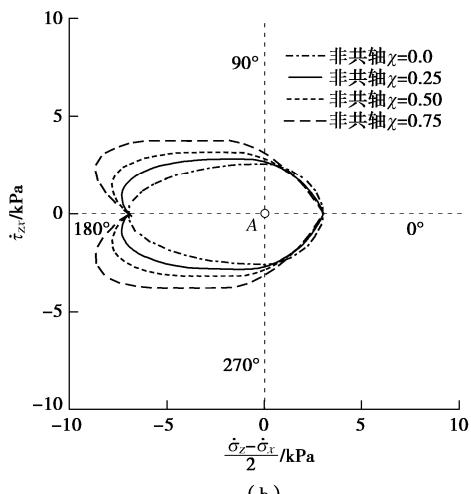


图 11 应力率响应包络线

Fig. 11 Response envelopes of stress rate

5 结 论

(1) 传统非共轴理论将非共轴应力率定义为总应力率减去所谓共轴应力率的剩余部分, 无法说明非共轴应力率由多项正交分量构成的事实。本文通过严格的数学推导证明了总应力率可以分解为 6 项正交应力率分量之和。在此基础上, 对于已有的非共轴理论进行了总结和比较, 指出, Rudnicki 等与 Hashiguchi 等定义的非共轴应力率包含 4 项正交的应力率分量, 而钱建固等定义的非共轴应力率包含 3 项正交的应力率分量。

(2) 传统非共轴理论假设非共轴塑性应变率与非共轴应力率之间为线性关系并且二者始终同向, 这与试验结果不相符。将非共轴应力率正交分解为 4 项, 然后采用多重非线性加载机制描述每一非共轴应力率分量诱发的塑性变形, 而总的非共轴塑性变形视为分量非共轴塑性变形之和, 从而建立了一种广义形式的非共轴理论。新建理论能够描述非共轴应力率与非共轴塑性应变率之间的非线性关系, 同时也能描述二者方向之间的非一致性。

(3) 推导了基于广义非共轴理论建立弹塑性模型时的应力-应变关系式。然后用两种数值试验评估了模型的合理性, 结果表明, 基于广义非共轴理论建立的模型预测的应力率响应包络线满足连续性要求, 在描述砂土非共轴变形方面具有更强的灵活性。数值试验结果初步显示了广义非共轴理论在砂土本构模型方面的优越性和合理性, 表明该理论能够为土体非共轴模型的构建提供更为广阔的基础。

参 考 文 献:

- [1] 郑颖人, 孔亮. 岩土塑性力学[M]. 2 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2019. (ZHENG Ying-ren, KONG Liang.

- Geotechnical Plastic Mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: China Architecture and Building Press, 2019. (in Chinese))
- [2] 王兴, 孔亮, 李学丰. 砂土非共轴本构模型及其在地基承载力方面的应用[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(5): 892 - 899. (WANG Xing, KONG Liang, LI Xue-feng. Three-dimensional non-coaxial constitutive model for sand and its application in bearing capacity of foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(5): 892 - 899. (in Chinese))
- [3] 王兴, 孔亮, 李学丰. 基于改进角点理论的砂土非共轴模型及其应用[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(2): 254 - 262. (WANG Xing, KONG Liang, LI Xue-feng. Non-coaxial sand model based on improved vertex theory and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, 43(2): 254 - 262. (in Chinese))
- [4] TIAN Y, YAO Y P. Constitutive modeling of principal stress rotation by considering inherent and induced anisotropy of soils[J]. Acta Geotechnica, 2018, 13(6): 1299 - 1311.
- [5] TIAN Y, YAO Y P. Modelling the non-coaxiality of soils from the view of cross-anisotropy[J]. Computers and Geotechnics, 2017, 86: 219 - 229.
- [6] 田雨, 姚仰平, 罗汀. 从各向异性的角度解释和模拟土的非共轴特性[J]. 岩土力学, 2018, 39(6): 2035 - 2042. (TIAN Yu, YAO Yang-ping, LUO Ting. Explanation and modeling of non-coaxiality of soils from anisotropy[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(6): 2035 - 2042. (in Chinese)).
- [7] GAO Z W, ZHAO J D. A non-coaxial critical-state model for sand accounting for fabric anisotropy and fabric evolution[J]. International Journal of Solids and Structures, 2017(106/107): 200 - 212.
- [8] PETALAS A L, DAFALIAS Y F, PAPADIMITRIOU A G. SANISAND-FN: an evolving fabric-based sand model accounting for stress principal axes rotation[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2019, 43(1): 97 - 123.
- [9] HU N, YU H S, YANG D S, et al. Constitutive modelling of granular materials using a contact normal-based fabric tensor[J]. Acta Geotechnica, 2020, 15(5): 1125 - 1151.
- [10] LI X S, DAFALIAS Y F. A constitutive framework for anisotropic sand including non-proportional loading[J]. Géotechnique, 2004, 54(1): 41 - 55.
- [11] 袁冉, 杨文波, 余海岁, 等. 土体非共轴各向异性对城市浅埋土质隧道诱发地表沉降的影响[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(4): 673 - 680. (YUAN Ran, YANG Wen-bo, YU Hai-sui, et al. Effects of non-coaxiality and soil anisotropy on tunneling-induced subsurface settlements[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(4): 673 - 680. (in Chinese))
- [12] 吕玺琳, 黄茂松, 钱建固. 基于非共轴本构模型的砂土真三轴试验分叉分析[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(5): 646 - 651. (LÜ Xi-lin, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Bifurcation analysis in true traxial tests on sands based on non-coaxial elasto-plasticity model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(5): 646 - 651. (in Chinese))
- [13] 刘元雪, 郑颖人. 考虑主应力轴旋转对土体应力-应变关系影响的一种新方法[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(2): 45 - 47. (LIU Yuan-xue, ZHENG Ying-ren. A new method to analyze the influence of principal stress axes rotation on the stress strain relation of soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(2): 45 - 47. (in Chinese))
- [14] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1975, 23(6): 371 - 394.
- [15] HASHIGUCHI K, TSUTSUMI S. Shear band formation analysis in soils by the subloading surface model with tangential stress rate effect[J]. International Journal of Plasticity, 2003, 19(10): 1651 - 1677.
- [16] 钱建固, 黄茂松, 杨峻. 真三维应力状态下土体应变局部化的非共轴理论[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(4): 510 - 515. (QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song, YANG Jun. Effect of non-coaxial plasticity on onset strain localization in soils under 3D stress condition[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(4): 510 - 515. (in Chinese))
- [17] 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 宏-细观结合的砂土单剪试验非共轴特性分析[J]. 岩土力学, 2013, 34(12): 3417 - 3424. (LI Xue-feng, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Analysis of non-coaxial characters of sand for simple shear test with the method of macro-meso-incorporation[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(12): 3417 - 3424. (in Chinese))
- [18] 陈洲泉, 黄茂松. 砂土各向异性与非共轴特性的本构模拟[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(2): 243 - 251. (CHEN Zhouquan, HUANG Mao-song. Constitutive modeling of anisotropic and non-coaxial behaviors of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(2): 243 - 251. (in Chinese))
- [19] LI X S, DAFALIAS Y F. Noncoaxiality between two tensors

- with application to stress rate decomposition and fabric anisotropy variable[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2020, **146**(3): 4020004.
- [20] ZIENKIEWICZ O C. Generalized plasticity and some models for geomechanics[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1982, **3**(3): 303 – 318.
- [21] DAFALIAS Y F. An anisotropic critical state soil plasticity model[J]. Mechanics Research Communications, 1986, **13**(6): 341 – 347.
- [22] GUTIERREZ M, ISHIHARA K, TOWHATA I. Flow theory for sand during rotation of principal stress direction[J]. Soils and Foundations, 1991, **31**(4): 121 – 132.
- [23] 蔡燕燕, 俞 缙, 余海岁, 等. 加载路径对粗粒土非共轴性影响的试验研究[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(6): 1117 – 1122. (CAI Yan-yan, YU Jin, YU Hai-sui, et al. Experimental study on effect of loading path on non-coaxiality of granular materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(6): 1117 – 1122. (in Chinese))
- [24] YAMADA Y, ISHIHARA K. Undrained deformation characteristics of sand in multi-directional shear[J]. Soils and Foundations, 1983, **23**(1): 61 – 79.
- [25] NAKATA Y, HYODO M, MURATA H, et al. Flow deformation of sands subjected to principal stress rotation[J]. Soils and Foundations, 1998, **38**(2): 115 – 128.
- [26] 童朝霞, 张建民, 于艺林, 等. 中主应力系数对应力主轴循环旋转条件下砂土变形特性的影响[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(6): 946 – 952. (TONG Zhao-xia, ZHANG Jian-min, YU Yi-lin, et al. Effects of intermediate principal stress parameter on deformation behavior of sands under cyclic rotation of principal stress axes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2009, **31**(6): 946 – 952. (in Chinese))
- [27] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Géotechnique, 2000, **50**(4): 449 – 460.
- [28] GUDEHUS G. A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading[C]// Proceedings of the 3th Conference on Numerical Methods in Geomechanics, 1979, Aachen.

新书介绍:《非饱和土与特殊土力学——理论创新、科研方法及治学感悟》

陈正汉教授的专著《非饱和土与特殊土力学—理论创新、科研方法及治学感悟》由科学出版社于2021年7月出版发行。全书内容分为三篇及附录。正文分为7章: 第一篇(第1章和第2章)系统介绍作者及其学术团队在非饱和土与特殊土力学的基本理论和本构模型研究方面取得的主要创新成果, 对非饱和土与特殊土力学及其工程应用的新进展进行全面系统的总结, 并对今后的研究工作提出若干建议; 第二篇(第3章至第5章)对土力学的理论模型和科研方法进行系统论述, 总结作者在加强团队创新文化建设及学风建设方面的经验, 阐述知行合一理念的形成及对发展岩土力学理论体系的思考; 第三篇(第6章和第7章)是作者的学术奋斗生涯和治学感悟。书末附录共17个, 主要介绍第十届全

国土力学及岩土工程学术会议的盛况和办会经验、非饱和土与特殊土专业委员会的章程及开展的国内外学术交流活动、部分同行专家对作者学术成果的评价。内容丰富、自主创新、深入系统、推理严谨、数据翔实、旁征博引、表述精炼是该书的鲜明特色。

该书可供从事岩土力学与工程的教学、科研人员及研究生参考阅读。

顺便指出, 陈正汉教授与秦冰博士合著的《缓冲/回填材料的热-水-力耦合特性及其应用》一书已由科学出版社在2017年7月出版发行。该书共10章, 是国内关于高放废物深地质处置库的缓冲/回填材料研究成果的第一本专著。

(本刊编辑部)